

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

VOLUME SETTIMO







DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

COMPILATO DA UNA SOCIETA'
DI ANTICHI ALLIEVI DELLA SCUOLA POLITECNICA DI PARIGI

SOTTO LA DIREZIONE

DI

A.-S. DE MONTFERRIER

MEMBRO DELL' ANTICA SOCIETÀ REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE
DI PARIGI, DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MARSIGLIA,
DI QUELLA DI METZ EC. EC.

PRIMA VERSIONE ITALIANA

CON NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI

DEL D. GIUSEPPE GASBARRI

E

DI GIUSEPPE FRANÇOIS



VOLUME SETTIMO





FIRENZE
PER V. BATELLI E COMPAGNI
1845



DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE



NAP

NADIR (*Astron.*). Chiamasi con questo nome il punto del cielo che rimane direttamente sotto i nostri piedi, ed al quale termina la linea verticale condotta dal punto che abitiamo pel centro della terra. Il punto opposto del cielo, che rimane sopra la nostra testa, dicesi *zenit*. *Vedi* ARMILLARE e ZENIT.

NAPIER, o **NEPER**, o **NEPAIR** (GIOVANNI), barone scozzese divenuto celebre per la scoperta dei logaritmi, nacque nel 1550. Poche sono le notizie biografiche che si hanno su questo geometra, il quale sdegnando i vantaggi che avrebber potuto procacciargli alla corte la sua nascita e la sua fortuna, preferì di condurre nel ritiro una vita consacrata interamente allo studio. Si sa solamente che dopo aver fatto i suoi studj nella università di S. Andrea viaggiò in Europa, e molto si occupò di teologia prima di darsi alle matematiche e quindi alle ricerche che lo condussero alla scoperta dei logaritmi. In altro luogo abbiamo esposto la teoria di questa brillante scoperta, che rendendo semplice la scienza del calcolo giovò sì maravigliosamente ai progressi dell'astronomia, della geometria pratica e della navigazione (*Vedi* LOGARITMI). Napier morì il 3 Aprile 1617. Le di lui opere matematiche sono: I *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edimburgo, 1614, in-4. Napier non diede in quest'opera la dottrina sulla quale è fondata la tavola dei logaritmi; egli morì senza godere del successo che attendeva la sua scoperta, ed anzi col timore che fosse per esser rigettata dai matematici, poichè in un passo del suo libro così egli si esprime: » attendo il giudizio e la censura » de' matematici prima di esporre il rimanente alla malignità degl' invidiosi. » Fu suo figlio che pubblicò la spiegazione dei principj sui quali è fondata la teoria e la costruzione dei logaritmi, Edimburgo, 1619, in-4. Le due opere unite furono ristampate a Lione nel 1620 col titolo, alla prima, di *Logarithmorum canonis descriptio*, ed alla seconda di *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Questo libro, divenuto rarissimo, è stato ristampato da Maseres (*Vedi* MASERES) nella raccolta intitolata: *Scriptores logarithmici*, Londra, 1791, tom. I. II *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas, libri duo*, Edimburgo, 1617, in-12: l'autore vi descrive i suoi bastoni o aste aritmetiche, che servono ad abbreviare le moltiplicazioni e le divisioni: se ne trova una descrizione nelle *Ricreazioni matematiche* di Montucla, tom. I, pag. 14. Napier è noto ancora per le analogie

che portano il suo nome e che sono notabili per l' elegante loro semplicità. Infine sono a lui dovute due formule generali per la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.

NATURA. *Leggi della Natura.* Ad onta degl' immensi lavori dei quali la *natura* è stata l' oggetto, il significato di questa parola non è stato per anche fissato in un modo definitivo, ed è ben lungi dal presentare un concetto assoluto e determinato. Infatti, intendono gli uni per *natura* l' intero complesso degli esseri creati, le leggi che gli governano, l' ordine che si scorge nell' universo, in una parola, l' universo stesso; gli altri sotto questo nome comprendono la forza, l' intelligenza attiva che tutto ha stabilito, che tutto ha creato, che tutto conserva. Secondo l' inetto sistema del *naturalismo*, la natura è il principio cieco e fatale della organizzazione del mondo, è la MATERIA; secondo quello del *deismo*, è lo spirito universale e intelligente, l' eterno creatore: DIO.

Essendo in questo articolo nostro scopo di stabilire i principj che rendono possibile l' applicazione delle matematiche alla fisica, di esporre cioè la deduzione filosofica delle *leggi della natura*, abbiamo necessità indispensabile di dare a questa parola *natura* un significato più preciso e più direttamente riferibile all' oggetto che abbiamo in mira. Distingueremo dunque nella produzione dei fenomeni dell' universo due cause distinte, due potenze attive differenti: l' una necessaria, in attività continua, e sottoposta a certe leggi determinate e invariabili; l' altra, libera, spontanea, ed agente soltanto in virtù delle sue proprie determinazioni. La prima si manifesta generalmente nella *necessità* di tutti i fenomeni fisici; la seconda, sulla quale in ultima analisi riposa la possibilità della prima, si manifesta particolarmente nella *libertà* delle azioni umane, immagine sensibile della spontaneità assoluta della intelligenza suprema. Ora, ogni potenza in forza della quale accada un fatto nell' universo dicesi *causalità*; così non considerando il mondo fisico che nel rapporto delle sue leggi necessarie, intenderemo d' ora innanzi colla parola *natura*, la *causalità non intelligente* che regola i fenomeni fisici che ci sono dati *a posteriori* cioè dalla esperienza:

Ogni fenomeno fisico resulta da un *moto*, perchè la *materia*, base e *substratum* di tutte le intuizioni che abbiamo degli oggetti sensibili non ha altro carattere generale che il moto. La scienza della natura deve esser dunque considerata come una teoria pura ed applicata del moto; e per ottenere, se sia possibile, una deduzione *a priori* delle sue leggi fondamentali, diviene necessario di analizzare l' idea della materia in generale, senza aver riguardo ai suoi caratteri particolari. Ma un' analisi qualunque non è compiuta che quando è fatta secondo le leggi dell' intendimento, leggi che regolano tutte le determinazioni di cui è suscettibile l' idea generale dell' oggetto di cui si tratta: così noi dobbiamo esaminare il moto nel quadruplice rapporto della *quantità*, della *qualità*, della *relazione* e della *modalità*, donde resultano le determinazioni seguenti. Il moto può esser considerato:

1.° Come *quantità*, nel rapporto soltanto della sua composizione senza aver riguardo ad alcuna qualità del mobile. — *Considerazione foronomica.*

2.° Nel rapporto della *qualità* che è essenzialmente propria della materia come forza motrice originale. — *Considerazione dinamica.*

3.° Nel rapporto scambievole del moto della materia e della sua qualità. — *Considerazione meccanica.*

4.° Nel rapporto del moto o del riposo della materia col nostro modo proprio di vedere. — *Considerazione fenomenologica.*

Ecco i risultati di questa analisi dovuta all' illustre riformatore della filosofia, e che forma l' oggetto d' una delle sue più belle opere (Kant, *Metafisica della Natura*).

Idee fondamentali e principj della foronomia.

I. La materia è il mobile nello spazio. Lo spazio mobile è lo spazio materiale o relativo. Lo spazio immobile, nel quale in ultima analisi deve concepirsi il moto, è lo spazio puro o assoluto.

II. Il moto di un oggetto è il cangiamento del rapporto esterno che esiste tra questo oggetto ed uno spazio dato. Il riposo al contrario è la presenza permanente dell'oggetto in un medesimo luogo.

III. Costruire un moto composto vuol dire rappresentare *a priori* nell'intuizione un moto come prodotto da due o più moti impressi ad un sol mobile.

IV. Ogni moto come oggetto di una esperienza possibile può esser considerato a piacere come moto del corpo in uno spazio in riposo, o come riposo del corpo in un spazio che si muova in senso contrario con eguale celerità.

V. La combinazione di due moti nascenti da un solo e medesimo punto non può esser compresa che immaginando che uno di essi si effettui nello spazio assoluto e l'altro colla stessa celerità, ma in una direzione opposta, nello spazio relativo.

Idee fondamentali e principj a priori *della dinamica.*

I. La materia è il mobile in quanto che riempie uno spazio, e resiste così a qualunque mobile che tenda a penetrare, col suo moto, in questo spazio. Lo spazio che non è in tal guisa ripieno è lo spazio vuoto.

II. La materia non riempie lo spazio per effetto della sola sua esistenza, ma per una forza motrice particolare. Infatti, la penetrazione nello spazio è un moto; e la resistenza è il moto in senso contrario, il quale suppone per conseguenza una forza motrice.

III. La matèria non ha che due forze motrici: l'attrattiva e la repulsiva. La prima è la causa per cui un'altra materia ad essa si avvicina. La seconda è quella che produce l'allontanamento di un'altra materia. Niuna forza fuori di queste due è possibile, perchè ogni movimento di una materia rapporto ad un'altra non può consistere che in attrazione o repulsione.

IV. La forza per la quale la materia riempie lo spazio che essa occupa è la forza di estensione (di repulsione). Questa forza è suscettibile di gradi successivamente più grandi o più piccoli all'infinito, cosicchè niuno di questi gradi può considerarsi come il più grande o come il più piccolo di tutti.

V. Come al di sopra di una forza qualunque data di estensione può trovarsene sempre una più grande, così esiste pure per ognuna una forza compressiva (di attrazione) che può ridurla in uno spazio più ristretto. Ma siccome egualmente non vi ha forza, nessuna che sia la più piccola di tutte, una materia può per verità esser ristretta all'infinito, ma non può essere penetrata interamente ossia annientata. L'impenetrabilità della materia, che cresce in proporzione del grado di compressione, è relativa, ma quella che riposa sulla supposizione che la materia come tale non è suscettibile di penetrazione, si chiama *impenetrabilità assoluta*. La pienezza dello spazio prodotta dalla impenetrabilità assoluta può chiamarsi *matematica*, e quella prodotta dalla impenetrabilità relativa può portare l'epiteto di *dinamica*.

VI. La materia è divisibile all'infinito, ed è divisibile in parti, ognuna delle quali è sempre materia. Questa divisibilità è una conseguenza delle forze repulsive di ogni punto materiale nello spazio. Lo spazio in sè stesso non può essere che *distinto* all'infinito, ma non potrebbe esser mosso, nè per conseguenza *diviso* fisicamente. Ma ogni spazio ripieno di materia essendo mobile per sè stesso e per conseguenza divisibile, la divisibilità fisica della sostanza si regola sulla divisibilità matematica dello spazio all'infinito.

VII. Oltre la forza di estensione o di repulsione, la forza di attrazione appartiene pure alla possibilità della materia. Se la materia non possedesse che la prima di queste forze, le sue parti si allontanerebbero le une dalle altre all'infinito. Bisogna dunque che essa ne possegga un'altra che prescriva dei limiti all'estensione. Ma reciprocamente la semplice forza attrattiva non basta per la possibilità della materia, perchè senza la forza repulsiva che viene ad imporle dei limiti la materia si ristringerebbe all'infinito per effetto della sola attrazione, ossia si ridurrebbe al punto matematico. Ogni materia resulta dunque dalla sintesi di due forze opposte, quella dell'estensione e quella dell'attrazione. Kant pretende che non sia possibile di spiegare ulteriormente la possibilità di queste forze radicali, la necessità della loro associazione, e la possibilità della materia stessa; il che è rigorosamente vero finchè si vuole stare dentro i limiti della ragione temporale dell'uomo.

VIII. Il contatto, nel significato fisico che ha questa parola, è l'azione immediata e la reazione della impenetrabilità. Quando una materia agisce sopra un'altra senza contatto, è un azione a distanza. Siccome quest'azione a distanza è pure possibile senza la cooperazione della materia intermedia, così vien chiamata ancora azione immediata a distanza, o azione sopra un'altra materia attraverso al vuoto.

IX. L'attrazione essenziale a qualunque materia è l'azione immediata di questa materia sopra un'altra attraverso al vuoto. Infatti, l'azione della forza attrattiva, che comprende essa pure una ragione della possibilità della materia, è indipendente da qualunque contatto. Bisogna che essa abbia luogo anco quando sia vuoto lo spazio esistente tra le materie. È dunque un'azione attraverso al vuoto.

X. Avendo riguardo alla circostanza che una materia non può agire immediatamente sopra un'altra che nella superficie comune del contatto, essa ha una forza di superficie; e considerando che essa agisce immediatamente sulla superficie di contatto attraverso al vuoto, ha una forza di penetrazione. Ora l'azione primitiva è una forza di penetrazione. Si estende dunque da ogni parte della materia nello spazio del mondo a tutte le altre fino all'infinito. Un'altra materia non può opporsi alla propagazione della sua azione per la ragione che è una forma di penetrazione, e non potrebbe racchiudere in sè stessa causa alcuna di limitazione, perchè non può mai diventare una forza la più piccola di tutte.

Idee fondamentali e principj della meccanica metafisica.

I. La materia è il mobile in quanto che come tale possiede la forza motrice.

II. La grandezza del moto che, valutata *foronomicamente*, non consiste che nel grado di celerità, non può esser valutata *meccanicamente* che per la quantità di materia posta in moto e per la celerità che ha nel medesimo tempo.

III. La quantità di materia non può, paragonata con qualunque altra, esser valutata che mediante la quantità del moto in una data celerità. Infatti, siccome la materia è divisibile all'infinito la quantità di nessuna materia potrebbe esser determinata immediatamente per mezzo del numero delle sue parti. Se si confronta la materia data con un'altra simile, la quantità ne è proporzionale alla grandezza del volume. Ma adesso si tratta di confrontarla con qualunque altra materia, e allora riesce impossibile di calcolarne la quantità, se si fa astrazione dal suo moto. Bisogna peraltro ammettere che la celerità del moto delle materie da confrontarsi sia eguale.

IV. Esistono tre leggi fondamentali per la meccanica metafisica.

1.° In tutti i cangiamenti del mondo fisico, la quantità totale della materia rimane la stessa senza aumento o diminuzione. — *Legge delle sostanze.*

Questa legge si applica soltanto alla materia come oggetto del senso esterno e non agli oggetti del senso interno, come spesso a torto è stato preteso.

2.° Ogni cangiamento della materia ha una causa esterna. — *Legge d' inerzia.* La materia, come semplice oggetto dei sensi esterni, non ha altre determinazioni che quelle dei rapporti esterni nello spazio, e non può per conseguenza subir cangiamenti che in forza del moto. Questo moto e le sue variazioni debbono avere una causa. Ora questa causa non può essere interna, perchè la materia non ha causa interna di determinazione e persevera per conseguenza nel suo stato di moto o di quiete, senza potere per sè stessa modificare questo stato. Dunque qualunque cangiamento di una materia dipende da una causa esterna. Questa legge deve sola portare il nome di *legge d' inerzia*, perchè l' inerzia della materia non consiste nel persistere che essa faccia a stare nel suo posto, perchè ciò è esercitare un' azione, ma nell' esser senza vita e nel mancare totalmente di cause interne di determinazione.

3.° In ogni comunicazione di moto l' azione e la reazione sono costantemente eguali ed opposte l' una all' altra. — *Legge d' antagonismo.*

Resulta da questa legge che ogni corpo, per quanto grande sia la sua massa, deve esser mobile in forza dell' urto di un altro corpo, per quanto piccola possa essere la massa e la celerità di questo secondo corpo, perchè deve sempre resistere al moto.

Idee fondamentali e principj della fenomenologia.

I. La materia è il mobile in quanto che come tale può esser l' oggetto della esperienza.

II. Il moto in linea retta di una materia rapporto ad uno spazio empirico non è che un semplice attributo *possibile*, per distinguere il moto opposto dello spazio assoluto. Lo stesso moto è impossibile quando non gli si suppone nessuna relazione con una materia esistente al di fuori di esso. Questo principio riposa sulla considerazione che rispetto al moto come oggetto dell' esperienza è affatto identico che s' immagini in moto il corpo nello spazio assoluto, o questo in luogo di quello; ma ciò che è indeciso rapporto a due attributi opposti non è possibile che rispetto ad uno di essi; inoltre il moto è una relazione e non può per conseguenza essere oggetto dell' esperienza, che in quanto lo siano le due cose in correlazione. Ora lo spazio puro ed assoluto non è oggetto dell' esperienza; dunque il moto in linea retta senza relazione a un moto correlativo opposto, vale a dire come moto assoluto, è impossibile.

III. Il moto circolare di una materia è un attributo *reale* di questa materia per distinguerla dal moto opposto dello spazio; perchè il moto circolare, come ogni moto in linea curva, è un cangiamento continuo della relazione della materia rapporto allo spazio esterno. È dunque un principio continuo di nuovi moti. Pure, in virtù della legge d' inerzia, il corpo, ad ogni punto del circolo, prova una tendenza a continuare il suo moto in linea retta, ed agisce in un modo contrario a questa causa esterna; ma il moto dello spazio confrontato con quello del corpo non è che *foronomico* e non ha forza; dunque, quando si dice che il corpo o lo spazio si muove in una direzione opposta, si forma un giudizio disgiuntivo in forza del quale tostochè uno dei membri, per esempio il moto del corpo, è stabilito, l' altro, il moto dello spazio, rimane escluso. Dunque il moto circolare è reale.

IV. In ogni moto di un corpo, che fa sì che questo corpo sia mosso rapporto ad un altro, un moto simile opposto di questo ultimo corpo diviene *necessario*. Per la terza legge della meccanica, la comunicazione del moto dei corpi non è possibile che mediante la comunione delle loro forze motrici primitive, e questa comu-

nione non è neppur' essa possibile che in forza del moto scambievole opposto ed eguale. Il moto dei due corpi è dunque reale. Ma siccome inoltre la realtà di questo moto non dipende dalla influenza delle forze esterne, e succede immediatamente e inevitabilmente alla idea della relazione che la cosa mossa nello spazio ha con qualunque altra cosa che così vien resa mobile, il moto di quest'ultima è necessario.

NATURALE (*Alg.*). Diconsi *numeri naturali* quelli che compongono la serie dei numeri consecutivi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ec.

I *logaritmi naturali* sono quelli la cui generazione è data in un modo indipendente dalla loro base. *Vedi* Logaritmo.

NAUTICA. Arte di dirigere una nave sul mare e di determinare tutte le circostanze del suo cammino. Dividesi la *nautica* in *cabottaggio* e in *navigazione d' alto mare*. Il *cabottaggio* consiste nel dirigere una nave lungo le coste senza perder di vista la terra, e si fonda principalmente sopra cognizioni di fatto o di esperienza. La *navigazione d'alto mare* consiste nel dirigere una nave in alto mare fuori della vista delle coste: essa esige cognizioni teoriche il cui complesso prende il nome di *astronomia nautica*. Si possono consultare il *Trattato di navigazione* di Bouguer; quello di Bezout; il *Trattato di astronomia nautica* di Rossel, che trovasi unito al *Trattato di astronomia fisica* di Biot; il *Trattato di navigazione* di Dubourguet, approvato dall'Istituto; il *Compendio dello navigazione* di Lalande, e la *Raccolta delle tavole utili alla navigazione* di Guglielmo Norie, tradotte dall' inglese in francese da Violaine.

NAUTICO. Si applica questo epiteto a tuttociò che ha rapporto alla nautica. Così l'*astronomia nautico* è l'astronomia propria dei naviganti, ec.

NAVE (*Astron.*). Costellazione meridionale, che si trova sovente rammentata negli autori coi nomi di *Argo navis*, *Corina orgoa*, *Celox Josonis*, *Curris maris*, *Carino*, *Equus neptunius*, *Carina pegosea*, *Novigium praedotorium*. Essa fu formata nel cielo per eternare la memoria della celebre spedizione degli Argonauti. Nel Catalogo britannico si trova composta di 22 stelle, tra le quali si nota la bella stella di prima grandezza detta *Canopo*.

NAVIGAZIONE. *Vedi* Nautica.

NEBULOSE (*Astron.*). Stelle o ammasso di stelle che compariscono sotto l'aspetto di piccole nubi biancastre.

A Guglielmo Herschel (*Vedi* Herschel) è dovuta la classificazione la più completa dei varj fenomeni conosciuti sotto il nome comune di *nebulosità*. Prima delle osservazioni di questo celebre astronomo, si credeva generalmente che ogni nebulosa fosse formata da un numero grande di stelle situate a distanze tanto considerabili da noi, che la loro luce propria si confondesse per l'effetto della irradiazione e non offrisse all' occhio che un debole barlume presso a poco uniforme (*Vedi* Stella). Ciò infatti ha luogo generalmente per le grandi nebulose e particolarmente per la via lattea. Ma oltre questa nebulosità, che col soccorso del telescopio si risolvono in ammassi di stelle distinte, ve ne sono altre che hanno un carattere affatto differente, e che sembrano resultare da corpi particolari la cui natura non ci è per anche nota. Tale è per esempio la nebulosa che si vede tra le stelle β e γ della Lira: essa presenta l'aspetto di un anello solido, ovale e schiacciato, terminato in un modo distintissimo, ed offre una gran somiglianza coi pianeti. Due altre nebulose anco più singolari sono quelle segnate coi numeri 27 e 51 nel catalogo di Messier. La prima consiste in due corpi brillanti, rotondi o un poco ovali, uniti insieme per mezzo di un collo della stessa natura, e attorniati da una leggera atmosfera luminosa. La seconda presenta un globo largo e brillante circondato da un doppio anello situato a una distanza considerabile dal globo.

Herschel divide le nebulose in tre classi: 1° ammassi di stelle globulari o irregolari, nei quali le stelle possono essere vedute distintamente; 2° nebulose risolubili, che sembrano non poter resultare che da una agglomerazione di stelle, e che probabilmente si risolverebbero in stelle distinte, se si avessero telescopj di una sufficiente potenza amplificante; 3° nebulose propriamente dette, vale a dire che non possono risolversi in stelle distinte. Quest'ultima classe comprende le *nebulose planetarie*, le *nebulose stellari*, e le *stelle nebulose*. Si veda su questo soggetto il piccolo *Trattato di astronomia* di Giovanni Guglielmo Herschel recentemente tradotto in francese.

NEGATIVO (*Alg.*). In generale si dà il nome di *quantità negative* a quelle che sono affette dal segno —, che dicesi *meno*. *Vedi* Algebra e Filosofia della Matematiche.

NEOMENIA (*Astron.*). Nome che gli antichi astronomi davano al novilunio e che deriva dalle parole greche νέον *nuovo* e μήνη *luna*.

NEPER. *Vedi* Napier.

NEWTON (Isacco). Tra i nomi gloriosi di quel ristretto numero di uomini privilegiati il cui ingegno ha aperto nuove vie alla scienza ed avvicinato lo spirito umano alla sua destinazione, sorprendendo le leggi eterne che presiedono all'organizzazione dell'universo, spiegando i fenomeni maravigliosi che ne emanano, portando infine la luce nei più profondi misteri della creazione, quello d'Isacco Newton dee brillare di splendore immortale. Siffatte organizzazioni grandi e forti sono rare nel mondo. L'entusiasmo e l'ammirazione che eccitano i loro lavori non annunziano che a lunghi intervalli la loro apparizione nei secoli. I loro lavori affratellano tra loro le razze umane divise dai climi, dalle leggi e dai costumi. L'intelligenza che gli produce attesta luminosamente la maestosa unità dell'uomo. L'orgoglio delle nazionalità può a suo grado manifestarsi nella storia sociale e attribuire ad un sol popolo l'onore che un uomo si è acquistato colle sue azioni. Quest'onore infatti è ristretto come le circostanze nelle quali nasce, come il fine a cui tende. Ma la storia della scienza considerando lo spirito umano nell'intero complesso delle sue opere, non ammette un pregiudizio smentito dal carattere di universalità che distingue l'ingegno. I fatti del sapere, al pari delle intelligenze da cui emanano, appartengono all'umanità.

Il 25 Dicembre 1642, sul finire dell'anno nel quale aveva cominciato la posterità per l'illustre Galileo, Newton nacque a Woolstrop, nella contea di Lincoln, in Inghilterra. Il suo ingegno lo ha collocato in un posto ben altrimenti superiore a quello che avrebber potuto procurarli i più splendidi titoli ereditarj; pur non ostante era di una nobile famiglia la quale da due secoli possedeva la signoria di quel villaggio. Avendo di buon'ora perduto il padre, fu sua madre che vegliò alla sue educazione. Di dodici anni fu inviato alla scuola di Grantham, ove fece i suoi primi studj. Quando ebbe appreso tutto ciò che allora costituiva l'educazione di un gentiluomo di campagna, sua madre lo richiamò presso di se, e volle applicare agli affari domestici l'intelligenza precoce che aveva manifestato. Ma il giovine Newton non corrispose alle vedute di sua madre; l'inclinazione sua per lo studio lo toglieva alle occupazioni volgari alle quali si voleva che si applicasse: fin d'allora fu detto che ei non sarebbe diventato che un dotto, e fu rinviato alla scuola di Grantham, oggetto dei suoi più vivi desiderj. Dopo poco tempo entrò nel collegio della Trinità di Cambridge, ove soltanto si crede ch'ei cominciasse a studiare le matematiche. I progressi maravigliosi ch'ei fece in poco tempo in queste alte scienze annunziarono tosto ciò che diventato sarebbe un giorno. Dalla rapida lettura di Euclide passò alla *Geometria* di Cartesio e all'*Aritmetica degl'infiniti* di Wallis. Entrato una volta in possesso della scienza, il suo ingegno non si arrestò sulle tracce di questi grandi

maestri, ma insieme con essi lanciossi nel sentiero delle scoperte. Prima di aver compiuto l'età di ventisette anni, Newton era già in possesso del suo *Calcolo delle flussioni* e della sua *Teoria della luce*. Ei cominciò ad esporre quest'ultima scoperta nelle sue *Lectiones opticae*, di cui pubblicò un compendio nelle *Transazioni filosofiche*. Attese pure a mettere in ordine il suo trattato delle flussioni, ma le objezioni che da tutte le parti gli vennero fatte allarmarono il suo spirito meditabondo e pacifico; ed amante come era del suo riposo, temendo sopra ogni cosa le querele letterarie, che meglio però avrebbe evitate se avesse pubblicato più presto le sue scoperte, non si diede cura di darle alla luce. Il dottore Barrow, di cui era l'amico e il discepolo, si dimise in suo favore dalla cattedra di matematiche nell'università di Cambridge. Da quest'epoca prendono data i lavori che hanno illustrato per sempre il suo nome, e specialmente il libro celebre e sublime dei *Principj*, ch'ei pubblicò per consiglio di Halley e dietro le premure della Società Reale di Londra. L'università di Cambridge, di cui aveva con zelo difeso i privilegi attaccati dal re Giacomo II, lo scelse per suo rappresentante alla celebre Convenzione del 1688 e al Parlamento del 1701. Newton partecipò così alla rigenerazione sociale del suo paese. Fu successivamente nominato direttore della zecca e creato cavaliere della regina Anna. Ma il favore al quale si mostrò più sensibile fu la sua elezione alla presidenza della Società Reale, che ebbe luogo nel 1703. Egli occupò questa carica onorifica fino al termine della lunga e gloriosa sua corsa.

Tali in poche parole sono gli avvenimenti più importanti della vita di Newton; i suoi lavori debbono occupare un posto più grande nella sua storia. Noi non crediamo di dover qui trattenerci di nuovo sulla penosa discussione alla quale diede luogo il calcolo delle flussioni: altrove abbiamo esposto questa teoria (*Vedi* Flussioni) e la mala intelligenza di cui fu il pretesto fra i due più begli ingegni di quell'epoca (*Vedi* Leibnitz). Esamineremo dunque nel loro insieme le scoperte di Newton, analizzando il libro dei *Principj* nel quale trovansi raccolte.

Era riserbato a quest'uomo sommo, dice l'illustre Laplace, di farci conoscere il principio generale dei moti celesti. La provvidenza dotandolo di un ingegno profondo prese pure cura di collocarlo nelle circostanze le più favorevoli. Cartesio aveva cangiato l'aspetto delle scienze matematiche mediante l'applicazione feconda dell'algebra alla teoria delle curve e delle funzioni variabili. Fermat aveva perfezionato la geometria mediante i suoi bei metodi dei massimi e delle tangenti. Wallis, Wren e Huygens avevano allora allora trovato le leggi della comunicazione del moto. Le scoperte di Galileo sulla caduta dei corpi e quella di Huygens sulle evolute e sulla forza centrifuga conducevano alla teoria del moto nelle curve. Keplero aveva determinato quelle che descrivono i pianeti, ed aveva pure sospettato la gravitazione universale. Finalmente Hooke aveva benissimo veduto che i moti planetarj sono il resultato di una forza primitiva di projezione combinata colla forza attrattiva del sole. Ma la scienza attendeva ancora l'ingegno che coordinasse in un solo sistema queste potenti idee e stabilisse la legge della gravitazione, della generalizzazione e del ravvicinamento di queste grandi scoperte. Tale appunto fu la grand'opera di Newton. Ecco, secondo il dotto geometra che abbiamo di sopra citato, come egli vi giunse.

Il peso dei corpi, che è alla sommità delle più alte montagne presso a poco lo stesso che alla superficie della terra, gli fece congetturare che si estendesse fino alla luna, e che là combinandosi col moto di projezione di questo satellite gli facesse descrivere un'orbita ellittica intorno alla terra. Per verificare questa congettura, era d'uopo conoscere la legge di diminuzione del peso. Newton considerò che se il peso terrestre ritiene la luna nella sua orbita, i pianeti dove-

vano parimente esser ritenuti nelle loro orbite dal loro peso verso il sole, e giunse a dimostrar questo mediante la legge delle aree proporzionali ai tempi; ora è noto che dal rapporto costante trovato da Kepplero tra i quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti e i cubi degli assi maggiori delle loro orbite resulta che la loro forza centrifuga, e per conseguenza la loro tendenza verso il sole, diminuisce in ragione del quadrato della loro distanza dal centro di quest' astro; Newton suppose dunque la stessa legge di diminuzione nel peso di un corpo a misura che si alze al di sopra della superficie della terra. Partendosi dalle esperienze di Galileo sulle cadute dei gravi, determinò la distanza della quale la luna abbandonata a se stessa si avvicinerebbe alla terra in un brevissimo spazio di tempo. Questa distanza è il senoverso dell' arco che essa descrive nello stesso intervallo, senoverso che la parallasse lunare dà in parti del raggio terrestre; così, per confrontare coll' osservazione la legge del peso reciproco al quadrato delle distanze, bisognava conoscere la grandezza di questo raggio. Ma Newton non avendo allora che una misura erronea del meridiano terrestre giunse ad un resultato diverso da quello che attendeva, e sospettando che forze incognite si associassero al peso della luna abbandonò momentaneamente le sue idee. Ciò avveniva nel 1666, secondo Pemberton, contemporaneo ed amico di Newton, che ci ha conservato queste particolarità. Alcuni anni dopo riprese le sue ricerche, e dalla misura che allora Picard aveva fatto di un grado del meridiano riconobbe che la luna era ritenuta nella sua orbita per effetto della sola gravità supposta reciproca al quadrato delle distanze. Secondo questa gravità, trovò che la linea descritta dai corpi nelle loro caduta è un' ellisse della quale il centro della terra occupa uno dei fuochi. Considerando poscia che Kepplero aveva riconosciuto che le orbite dei pianeti sono parimente ellissi nel fuoco delle quali è posto il centro del sole, ebbe la soddisfazione di vedere che la soluzione la quale egli aveva cercato per mera curiosità si applicava agli oggetti più grandi della natura.

Così il gran Newton era giunto alla legge della gravità per mezzo del rapporto tra i quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti e i cubi degli assi delle loro orbite supposte circolari. Dimostrò che questo rapporto ha luogo egualmente nelle orbite ellittiche, e che indica un' egual gravità dei pianeti verso il sole, supponendoli posti alla stessa distanze dal suo centro. Generalizzando quindi le sue ricerche, Newton fece vedere che un projettile può muoversi in una sezione conica qualunque in virtù di una forza diretta verso il suo fuoco e reciproca al quadrato delle distanze: sviluppò le diverse proprietà in questo genere di curve; determinò le condizioni necessarie affinchè la curva sia un circolo, un' ellisse, un' iperbola, una parabola, condizioni che non dipendono che dalla celerità e dalla posizione primitiva dei corpi. Qualunque sia questa celerità, questa posizione, e la direzione centrale del moto, Newton assegnò una sezione conica che il corpo può descrivere e nella quale deve per conseguenza muoversi. Queste ricerche applicate al moto delle comete gli fecero conoscere che questi astri si muovono intorno al sole secondo le stesse leggi dei pianeti, colla sola differenza che le loro ellissi sono allungatissime, e diede i mezzi di determinare per mezzo delle osservazioni gli elementi di queste ellissi. Confrontando tra loro la grandezza delle orbite dei satelliti e la durata delle loro rivoluzioni colle stesse quantità relative ai pianeti, giunse a conoscere le masse e le densità respettive del sole e dei pianeti accompagnati da satelliti e la intensità del peso alla loro superficie. Considerando che i satelliti si muovono intorno ai loro pianeti presso a poco come se i pianeti fossero immobili, riconobbe che tutti questi corpi obbediscono alla medesima gravità verso il sole. L' eguaglianza dell' azione alla reazione non gli permise di dubitare che il sole graviti verso i pianeti e questi verso i loro satelliti, e che anco la terra sia attirata da tutti i corpi che gravitano su di essa. Estese poscia questa proprietà

a tutte le parti della materia, e stabilì il principio che: » ogni molecola di ma- » teria attire tutte le altre in ragione diretta della sua massa e in ragione in- » versa del quadrato della sua distanza dalla molecola attratta. »

Non è questa una semplice ipotesi, ma un principio superiore, conseguenza necessaria delle leggi osservate nei moti celesti; principio d'altronde fecondo da cui Newton vide discendere la spiegazione dei grandi fenomeni del sistema del mondo. Considerando la gravità alla superficie dei corpi celesti come la resultante delle attrazioni di tutte le loro molecole, trovò questa proprietà notabile e caratteristica della legge di attrazione in ragione inversa del quadrato delle distanze, cioè: che due sfere, formate di strati concentrici e di densità variabili secondo una legge qualunque, si attraggono scambievolmente come se le loro masse fossero riunite nei loro centri: così, i corpi del sistema solare agiscono presso a poco come tanti centri attrattivi gli uni sugli altri ed anco sui corpi posti alla loro superficie; resultato che contribuisce alla regolarità dei loro moti, e che a questo sommo geometra fece riconoscere la gravità terrestre nella forza che ritiene la luna nella sua orbita. Dimostrò che il moto di rotazione della terra ha dovuto schiacciarla verso i suoi poli, e determinò le leggi della variazione nei gradi dei meridiani e nel peso dei corpi alla sua superficie. Vide che le attrazioni del sole e della luna fanno nascere nell'oceano le oscillazioni che vi si osservano, conosciute sotto il nome di *flusso e riflusso del mare*. Riconobbe che varie ineguaglianze della luna e il moto retrogrado de' suoi nodi provengono dall'azione del sole. Considerando poi il rigonfiamento della sferoide terrestre all'equatore come un sistema di satelliti aderenti alla sua superficie, trovò che le azioni combinate del sole e della luna tendono a fare retrogradare i nodi dei circoli che descrivono intorno all'asse della terra, e che tutte queste tendenze comunicandosi alla massa intera di questo pianeta debbono produrre, nell'intersezione del suo equatore coll'ecclittica, quella lenta retrogradazione che si dice *Precessione degli Equinozj*.

Tali in brevi parole sono le scoperte principali che Newton espose nel libro dei *Principj*. Ma non è inutile di far notare che, eccettuate le grandi leggi che egli vi stabilisce, la maggior parte delle sue teorie non vi sono che abbozzate, e che il loro perfezionamento è opera de' suoi successori. Ma questo libro, nel quale d'altronde ha così ben determinato l'esistenza del principio generale da lui scoperto, non sarà meno la produzione la più originale e forse la più maravigliosa dell'umano ingegno.

È chiaro che la legge di attrazione rovescia affatto una delle ipotesi di Cartesio, ma invano cercherebbesi nel libro dei *Principj* l'esposizione di una *filosofia* contraria a quella dell'illustre autore del *Discorso sul metodo*. Perciò non si comprende oggi come siasi potuta stabilire una lotta, una opposizione tra le idee alle quali si è dato il nome di *Cartesianismo* e le scoperte puramente scientifiche che si indicano col nome di *Filosofia Newtoniana*. Sarebbe forse, come hanno preteso alcune menti del resto molto assennate, che il metodo d'induzione seguito da Newton distruggesse la superiorità di qualunque metodo *a priori*, e che per conseguenza bisognasse ritornare all'osservazione come alla sorgente unica ed assoluta delle nostre cognizioni? Ma, oltrechè sarà sempre mai cosa strana il pretendere di dedurre un principio da un metodo, si vorrà dimenticare che l'immortal Newton non ha potuto basare le sue induzioni che sopra principj e scoperte anteriori alle sue ricerche, principj e scoperte stabiliti unicamente mediante questo metodo *a priori*, che il filosofismo del XVIII secolo si è ostinato a negare? Ci rincresce di non potere dare un maggiore sviluppo a queste considerazioni generali; solo aggiungeremo che nel campo delle realtà che la scienza esplora, essa adotta la verità indipendentemente dai

mezzi usati per trovarla. Se la destinazione dell' uomo è realmente la scoperta della verità, la Provvidenza ha dovuto moltiplicare le vie che ad essa conducono, affinchè tutte le intelligenze potessero contribuire a quest'opera sublime.

Il *Trattato d' ottica* di Newton è, dopo il libro dei *Principj*, uno degli scritti i più notabili di questo grand' uomo, i più degni del suo ingegno originale e profondo. Ma lo spazio ci manca per dar qui un' idea di quest' opera non meno che dei numerosi e mirabili lavori dai quali questo illustre geometra ha arricchito la scienza: non possiamo che farne la rapida enumerazione bibliografica.

La grand' opera di Newton comparve la prima volta a Londra nel 1687 in-4, sotto questo titolo: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Il libro intolato: *Systemata mundi*, che non è altro che un compendio della terza parte di quest' opera, è destinato a renderne la dottrina più accessibile, e non fu pubblicato che nel 1731, per cura di Halley. Noi poi rimanderemo ai trattati speciali di bibliografia quelli tra i nostri lettori che desiderassero di conoscere il numero delle edizioni non meno che le traduzioni in diverse lingue che sono state fatte di quest' opera immortale.

Nel 1704, Newton pubblicò a Londra in inglese il suo *Trattato d' ottica*, accompagnato da due altri trattati in latino intitolati: *De quadratura curvarum*, e *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Nel 1706, Samuel Clarke diede una nuova edizione di quest' opera colla traduzione in latino del trattato d'ottica.

Nel 1707, comparve l' *Arithmetica universalis*, e nel 1711 Newton pubblicò di nuovo i suoi due trattati *De quadratura ec.*, insieme con quello che ha per titolo: *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias*.

Comparvero in seguito le sue *Lectiones opticae*, che non debbonsi confondere col suo *Trattato di ottica* di cui abbiamo parlato di sopra, e in fine il suo *Metodo delle flussioni, e delle serie infinite*, che è una delle sue prime opere, quantunque non fosse pubblicato che nel 1736 in inglese per cura del dottor Colson. Buffon ne ha data una traduzione in francese. Le opere complete di Newton sono state pubblicate a Londra nel 1779 da Horsley col titolo di *Isaaci Newtoni Opera quae extant omnia, commentariis illustrabat Samuel Horsley*, Londra, 1779-1785, 5 vol. in-4.

Il sommo Newton, che durante la lunga sua vita godè della più florida salute, morì il 20 Marzo 1727, in età di ottantaquattro anni e tre mesi. La sua patria, nella quale il culto dei grandi uomini è sì nobilmente praticato, gli decretò onori funebri straordinarj. Il suo corpo fu trasportato a Westminster e posto sopra un letto di parata, i più alti personaggi si disputarono l' onore di portare i lembi della coltre mortuaria, ed una immensa folla di cittadini inglesi assistè in religioso silenzio a questa ceremonia. Fu però la famiglia di Newton che in seguito gli fece erigere un monumento. Vi si legge il seguente epitaffio che in brevi parole espone la vita più bella che un mortale abbia potuto godere.

H. S. E. Isaacus Newtonus, eques auratus, qui animi vi prope divina, planetarum motus, figuras, cometarum semitas, oceanique aestus, sua mathesi lucem praeferente, primus demonstravit. Radiorum lucis dissimilitudines, colorumque inde nascentium proprietates, quas nemo suspicatus erat, pervestigavit. Naturae antiquitatis, S. Script. sedulus, sagax, fidus interpres, Dei. O. M. majestatem philosophia asperuit, evangelii simplicitatem moribus expressit. Sibi gratulentur mortales tale tantumque extitisse humani generis decus. Natus XXV Decembris A. D. MDCXLII, obiit XX Martis MDCCVI (1727 V. S.).

Le ultime frasi di questo epitaffio alludono alla *Cronologia degli antichi regni corretta*, la quale, ad onta delle critiche di Fieret, è rimasta una delle opere

le più importanti che esistano su questa materia, e ad un' opera di esegesi degli ultimi anni di Newton, intitolata: *Osservazioni sopra Daniele e sull' Apocalisse*, lavoro mal giudicato in Francia e che non era ridicolo che per la setta antireligiosa che avea osato per un istante farsi un appoggio del nome venerabile di Newton.

NEWTON (Giovanni), distinto matematico inglese, cui la troppa celebrità del sommo ingegno che ha portato lo stesso nome ha sepolto nell' oblio. Giovanni Newton nacque nel 1622 e morì nel 1678. Le principali sue opere sono: I *Trigonometria britannica*, Londra, 1658, in-fol. II *Astronomia britannica*, ivi, 1656, in 3 parti, in-4.

NICCOLAI (Giovanni Battista), dotto matematico italiano, nato nel 1726 a Venezia e morto a Schio nel 1793. Si leggono di lui diverse memorie importanti nei *Saggi scientifici e letterarj dell'Accademia di Padova*, e nella *Nuova Raccolta Calogeriana*: l'opera sua più rinomata è quella intitolata: *Nova analysis elementa*, Padova, 1791, 2 vol. in-4.

NICOLAS (Pietro), gesuita ed uno dei migliori geometri del suo tempo, nacque a Tolosa verso la metà del secolo decimosettimo e morì nel 1720 a Béziers. Nella *Storia delle matematiche* di Montucla, Tom. II, pag. 78, si leggono varie particolarità su questo matematico. I suoi scritti sono: I *De novis spiralibus exercitationes*, Tolosa, 1693, in-4; II *De lineis logarithmicis, spiralibus, hyperbolicis*, ivi, 1696, in-4; III *De conchoidibus et cissoidibus*, ivi, 1697, in-4.

NICOLE (Francesco), nato a Parigi nel 1683, dimostrò di buon'ora le più felici disposizioni per le matematiche. Non aveva che 19 anni quando pubblicò, nel *Giornale dei dotti*, un metodo per la rettificazione della cissoide. Tre anni dopo, un' eccellente memoria sulla teoria delle cicloidi da lui letta all' Accademia delle scienze di Parigi lo fece ammettere nel seno di quella dotta società, alla Raccolta della quale per un lungo corso di anni somministrò un numero grande di memorie: tra queste meritano una particolare attenzione quelle che trattano del *Calcolo delle differenze finite*, applicazione del calcolo infinitesimale accennata da Taylor nella sua opera *De methodo incrementorum*, e quelle che contengono la *Teoria delle linee del terzo ordine*. Nicole, che morì nel 1758, non ha pubblicato nessun' opera separata.

NICOMEDE, geometra greco, è conosciuto principalmente per l' invenzione della concoide. Sono discordi le opinioni sul tempo in cui ha vissuto; ma Montucla ha dimostrato, colle testimonianze di Proclo e di Eutocio, come Nicomede, comunemente reputato posteriore di alcuni secoli all' era cristiana, fioriva almeno cento anni av. G. C. Di tutti i suoi lavori non rimane che la concoide, curva che serve a risolvere tanto il problema della trisezione dell'angolo quanto quello della duplicazione del cubo o delle due medie proporzionali. Immaginò per descriverla uno strumento ingegnoso, che Montucla ha descritto, insieme alle proprietà principali di questa curva, nella sua *Storia delle matematiche*, Tom. I, pag. 254-57. Gemino parlava della concoide in uno dei suoi trattati dei quali si deplora la perdita. *Vedi* Gemino.

NIEUWENTYT (Bernardo), medico e matematico, nato nel 1654 in Olanda e morto nel 1718. I suoi scritti più importanti sono: I *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, Amsterdam, 1694, in-8; II *Analysis infinitorum, seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deducae*, ivi, 1695, in-4; III *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia et responsio ad G. G. Leibnitium*, ivi, 1696, in-8. A tale scritto risposero a difesa di Leibnitz e Giovanni Bernoulli e Giacomo Hermant.

NODO (*Geom.*). Figura ovale formata dall' intersezione dei rami di una curva. (*Vedi* Punto Singolare).

In astronomia diconsi *nodi* i punti in cui l'orbita di un pianeta taglia l'ecclittica. Il punto nel quale il pianeta attraversa l'ecclittica per passare dall'emisfero australe nel boreale dicesi *nodo ascendente*, e s'indica col segno ☊, a quello pel quale il pianeta passa per tornare nell'amisfero australe dicesi *nodo discendente*, e s'indica col segno ☋.

NONAGESIMO (*Astron.*). Punto dell'ecclittica distante 90 gradi dalle sezioni dell'ecclittica coll'orizzonte. È il punto di questo circolo il più elevato al di sopra dell'orizzonte in un momento dato.

NONE (*Calend.*). Nome che si dà a certi giorni del mese nel calendario romano. *Vedi* CALENDARIO.

NONIO, specie di divisione di cui si fa uso negli strumenti di matematiche, per ottenere con maggiore esattezza la suddivisioni dei gradi del circolo. Ecco in che consiste: fissato al traguardo, all'alidada, al cannocchiale mobile di un istrumento, vi ha un arco di circolo concentrico alla circonferenza graduata dell'istrumento stesso; lo spazio di un certo numero di gradi, preso su questa circonferenza, si porta sull'arco concentrico, che più particolarmente dicesi *nonio*, e si divide in tante parti eguali più una, quante se ne trovano segnate sull'arco della circonferenza. Per esempio, se l'arco preso sul lembo dello strumento è diviso in 9 parti, che supporremo gradi, questo stesso arco portato sul *nonio* sarà diviso in 10 parti eguali. Indicando pertanto per maggior chiarezza le divisioni del lembo dello strumento colle cifre romane e quelle del *nonio* colle cifre arabe, quando il punto O (*Tav.* CLXXVII, *fig.* 1), del lembo coinciderà col punto o del nonio, la divisione IX deve coincidere colla divisione 10; la divisione 1 sarà distante di $\frac{1}{10}$ dalla divisione I, 2 differirà da II di $\frac{2}{10}$, 3 differirà da III di $\frac{3}{10}$, ec. Dunque, se si fa scorrere il *nonio* di $\frac{1}{10}$, 1 coinciderà con I; se si fa scorrere di $\frac{2}{10}$, 2 coinciderà con II; se si fa scorrere di $\frac{3}{10}$, 3 coinciderà con III, e così di seguito. Il posto della coincidenza di una divisione del *nonio* con una divisione del lembo indica dunque il numero dei decimi di grado di cui si è avanzato il *nonio* dacchè le sue estremità coincidevano con due divisioni della circonferenza. Per esempio, nella figura 2 della Tavola CLXXVII, l'estremità 10 è compresa tra XV e XVI e 7 coincide con un punto di divisione del lembo: ciò indica che tra O e 10 vi ha una distanza di $15^{\circ}+\frac{7}{10}$. In questa guisa si può valutare una distanza qualunque a meno di $\frac{1}{10}$. Potrebbe valutarsi ancora a meno di $\frac{1}{20}$; poichè se, per esempio, i punti di divisione 6 e 7 si trovassero compresi tra due punti di divisione consecutivi della circonferenza, senza che vi fosse coincidenza, e l'estremità 10 fosse sempre compresa tra XV e XVI, la distanza tra i punti O e 10 sarebbe sensibilmente eguale a 15° più 6 decimi più un mezzo decimo, ossia a $15^{\circ}+\frac{13}{20}$. Il metodo è applicabile ancora a valutare le linee rette e allora il *nonio* è una linea retta. Il nome di *nonio* è derivato dal nome del supposto inventore di questo metodo, Pedro Nonio, quan-

tunque sia oggi accertato che la scoperta ne è dovuta interamente a Pietro Vernier. *Vedi* Nonio.

NONIO (Pedro Nunnez, più noto sotto il nome di), distinto matematico portoghese, nato nel 1492 in Alcacer-do-Sal, e morto nel 1577. È noto principalmente per l'invenzione di uno strumento destinato a misurare gli angoli con gran precisione. Ecco in che consisteva: sopra il piano di un quarto di circolo erano descritti, con raggi arbitrarj e tutti diseguali, 44 archi di 90° ciascuno. Il più grande era diviso in 90 parti o gradi, e i seguenti in 89, 88, 87 ec. fino al 44° che era diviso in 47 parti. Allora, se nell'osservare l'altezza di un astro il traguardo avesse incontrata alcuna di queste divisioni, una semplicissima regola del tre avrebbe dato i gradi, i minuti e i secondi dell'altezza osservata. Ma il fatto sta che non sempre il traguardo incontra esattamente alcuna delle divisioni dello strumento, e in questo caso possono commettersi errori che Delambre, nella sua *Storia dell'astronomia del medio evo*, pag. 402, ha dimostrato potere giungere a 10 o 12 minuti. Ticone, che aveva fatto eseguire tali 44 divisioni su parecchi quarti di circolo, ne rimase malcontento, e presto vi renunziò: ciò però non tolse che i più degli astronomi ponessero il nome di Nonio (*Vedi* Nonio) ad un'invenzione totalmente diversa e per la forma e pel principio, la quale, secondo ciò che ha dimostrato Lalande, è dovuta a Pietro Vernier. Un titolo di gloria più reale e più solido farà vivere il nome di Nonio: primo tra i geometri moderni si applicò ai quesiti dei *massimi* e dei *minimi*, cioè dei valori i più grandi e i più piccoli che può ricevere la variabile di un problema. Fra parecchie ricerche di tal genere citeremo la soluzione elegante e compiuta cui diede del *più breve crepuscolo*. Le opere di Nonio sono: I *De arte navigandi libri duo*; II *In theoricas Planetarum Georg. Purbachii annotationes aliquot*; III *De erratis Orontii Finaei Delphinatis*; IV *De crepusculis liber unus*. Tali opere riunite furono in un sol volume e ristampate col titolo di *Petri Nonii Salaciensis Opera*, Basilea, 1592, in-fol. È pure autore di un trattato di algebra che composto aveva in spagnuolo e che comparve ad Anversa nel 1567, in-8.

NORIA. (*Idraul.*) Macchina idraulica che serve ad elevare l'acqua. Una noria si compone di un seguito di secchie fisse ad una catena continua che passa sopra un tamburo o grosso verricello stabilito al di sopra del serbatojo dal quale si vuole tirare l'acqua. L'estremità inferiore della catena, come pure le secchie che essa porta, sono immerse nell'acqua. La loro apertura è rivolta verso l'alto nel ramo che sale e verso il basso nel ramo che scende. Il moto è impresso alla catena per mezzo di una manovella ovvero di un'incastratura situata all'estremità dell'asse di rotazione del tamburo. Le secchie, passando nel pozzo, si riempiono d'acqua; esse la portano seco lungo il ramo che sale; giunte in alto, esse s'inchinano seguendo la convessità superiore del tamburo e versano la loro acqua in un trogolo o bacino destinato a riceverla; dimodochè le secchie si riempiono e si vuotano da esse stesse subito che la continuità del moto è perfettamente stabilita.

Questa macchina è molto impiegata nel mezzogiorno dell'Europa; essa serve da più secoli all'annaffiamento di tutti i grandi giardini nelle vicinanze di Tolosa, ove essa è mossa da un cavallo. Si vedono ancora in alcune località, delle norie le cui catene sono treccie di paglia; le secchie, semplici vasi di terra cilindrici; e le ruote, pezzi di legno disposti in doppia croce; ma quest'apparecchio grossolano ha generalmente ricevuto, dei miglioramenti che molto aumentano il suo effetto utile. Ora le secchie sono di legno scelto e tinte, ovvero in foglie di rame; le catene sono di ferro, e gl'ingranaggi di ferro gettato.

Il signor d'Aubusson dà la seguente descrizione di una buona noria stabilita dal signor Abadie.

il tamburo, nel suo taglio verticale, è un esagono regolare di metri o, 45ᶜ di lato: ed è una lanterna a sei fusi. Essa è chiusa da due piatti di ferro fuso aventi metri 0,02ᶜ di grossezza, distanti di metri 0,43ᶜ e riuniti mediante fusi o chiavarde di ferro di metri 0,43ᶜ di diametro. Uno dei piatti è forato da una semplice apertura pel passaggio dall' asse di rotazione, il quale consiste in un pezzo di ferro di metri 0,054ᵐ di riquadratura. L' altro presenta al suo centro come un mozzo formato da due anelli concentrici di metri 0,08ᶜ di salita in larghezza; il piccolo, di metri 0,06ᶜ di diametro, abbraccia l' asse; fra esso e il grande, il quale ha metri 0,13ᶜ, vi sono sei piccoli tramezzi di legno situati nel seno dei raggi: il tutto è di ferro fuso e colato col piatto. Fra i due piatti, a come un nocciolo nel mezzo del tamburo, si fissa orizzontalmente una piramide troncata esagonale e vuota; la sua altezza è di metri 0,43ᶜ, il lato della gran base di metri 0,20ᶜ, e quello della piccola di metri 0,05ᶜ: questa piccola base si applica contro il piccolo anello del mozzo, e la grande contro la parete interna del piatto opposto. Queste sei costole corrispondono alle sei piccole separazioni del mozzo e ai sei fusi. Fra ciascuna costola e il fuso corrispondente vi è una placca di ferro fuso o gran separazione, e il tamburo si trova così diviso in sei compartimenti.

La catena ha metri 13,72ᶜ di lunghezza ed è chiusa da 28 grandi anelli. Ciascuno porta una secchia fatta in foglia di rame: la figura 4 della Tav. CCI ne presenta un taglio perpendicolare all' asse di rotazione: si ha AC=0ᵐ,271; AB=0ᵐ,21; CD=0ᵐ,13; e la larghezza, paralellamente all'asse, è di 0ᵐ,335: la capacità della secchia è mediante ciò di 15 litri (essa non è che la metà nelle norie le più ordinarie, e le quali importano circa a franchi 700 messe al posto). Nel mezzo del fondo CD vi è un foro circolare di 0ᵐ,227 di diametro, ricoperto da una piccola animella di legno.

Sopra i due lati opposti di ciascuna secchia sono fissate due piccole lame di ferro M, aventi 0ᵐ,005 di grossezza, 0ᵐ,032 di larghezza e 0ᵐ,53 di lunghezza. Le loro estremità sono attraversate da una chiavarda di metri 0,02ᶜ di diametro, e in modo che quello, il quale attraversa le estremità superiori delle lame di una secchia, attraversa ancora l'estremità inferiori delle lame della secchia che è al di sopra. Ed è così che si formano i grandi anelli, e bisogna avere gran cura che la loro lunghezza (la distanza da una chiavarda all' altra) sia tale che, nella parte della catena che si piega sopra la parte superiore del tamburo, le chiavarde corrispondano perfettamente ai fusi della lanterna, vale a dire ai vertici degli angoli dell' esagono.

Una dell'estremità dell'asse di rotazione porta una ruota verticale a 23 denti e i quali ingranano in quelli, nel numero di 38, di una ruota orizzontale. Questa è attraversata da un albero verticale di ferro di metri 0,054ᵐ di riquadratura, e di metri 1,10 di lunghezza: la sua estremità inferiore riposa sopra una batrachite, a la sua estremità superiore, disposta in anello, riceve il braccio della manovella, il quale ha 4 metri di lunghezza.
Sopra l' asse orizzontale, si ha ancora una ruota a rocchetto destinata ad impedire il moto retrogrado.

Quando la macchina si muove e che l' estremità superiore di un grande anello giunge alla lanterna, esso è come preso da un fuso che lo trasporta seco. Nel salire quando la secchia di questo grande anello comincia ad inclinarsi, essa comincia ancora a versare la sua acqua nel compartimento che gli corrisponde, ed essa ha finito avanti di essere ritornata nella posizione orizzontale, e per conseguenza avanti di aver cominciato a scendere. Quest' acqua discende nei compartimento; giunta al fondo, il quale è una delle facce inclinate del tronco di piramide, essa lo segue e va ad uscire dall'apertura corrispondente del mozzo, senza che durante il versamento se ne perda una gocciola.

Questa noria è stabilita sopra un pozzo il cui livello è a metri 5,20° al di sotto dell'asse di rotazione. Mossa da un cavallo da giardiniere di forza ordinaria, essa eleva 23 metri cubi di acqua in un' ora e la versa a metri 5,13° al di sopra del pozzo. Osservando che un metro cubo di acqua pesa 1000 chilogrammi, si vede che l' effetto utile in un' ora di tempo è di

$$23000^{ch} \times 5^{m},13 = 117990^{ch}$$

ovvero di 118 unità dinamiche. In una giornata di 8 ore di lavoro, quest' effetto è perciò di 944 unità dinamiche, e siccome l' effetto medio di un cavallo che agisce sopra un maneggio è valutata a 1164 unità dinamiche (*Vedi* CAVALLO), ne resulta che la noria in questione dà gli 0,81 della forza trasmessa.

Il Navier riferisce che una noria impiegata in disseccamenti vicino a Parigi, condotta da due cavalli, elevava in un' ora 70^{m},12 di acqua a metri 3,60 d' altezza; vale a dire che essa rendeva gli 0,87 della forza motrice. Ordinariamente la perdita è molto più forte, e il signor d' Aubusson la valuta da 20 a 30 per 100. In un' esperienza fatta dal signor ingegnere Emmery, cinque forti operai che agivano nello stesso tempo ed esercitando sopra la manovella un effetto di chilogrammi 46,38 con una velocità di metri 0,838, hanno elevato in un'ora, con una noria, 25 metri cubi e $\frac{1}{2}$ di acqua a metri 3,60. L' effetto utile non è perciò stato che 0,657 della forza impiegata.

Una buona tromba produce un effetto utile superiore, e si deve preferire alle norie quando si hanno i mezzi di procurarsela e di conservarla; ma, nel caso contrario, bisogna impiegare quest' ultime macchine, la cui semplicità permette di confidarne le riparazioni al fabbro del più piccolo villaggio.

La perdita di forza, nelle norie, proviene da due cause: 1.° che le secchie, salendo lasciano ricadere una parte dell' acqua che esse contengono; 2.° che l' acqua è sempre elevata più alto della superficie del serbatoio superiore.

Possiamo aver riguardo alla prima di queste perdite e ad alcune altre cause di diminuzione, riducendo da 145 a 120 metri cubi il volume medio dell' acqua che un cavallo deve elevare ad *un metro* in un' ora di tempo. Per tener conto della seconda, si dovrà diminuire questi 120 metri nel rapporto di H ad $H+r$; H essendo l' altezza della superficie del serbatoio superiore al di sopra di quella del pozzo, ed r essendo la distanza verticale fra la prima di queste superficie e il punto il più alto, al quale l'acqua è portata avanti di colare nel serbatojo superiore; r sarà generalmente il raggio del tamburo aumentato da uno a due decimetri.

Per mezzo di queste riduzioni, l'effetto utile che un cavallo può produrre, in un'ora, con l'aiuto di una noria ben costruita è espresso, in unità dinamiche, da

$$120 \frac{H}{H+r}.$$

Così il volume d' acqua che esso può elevare nello stesso tempo ad un' altezza H è, in metri cubi,

$$\frac{120}{H+r}.$$

Resulta da ciò che il numero dei cavalli da impiegare, ad una o più norie, per elevare un numero Q di metri cubi di acqua ad un' altezza H in un' ora di tempo è

$$Q \cdot \frac{H+r}{120}.$$

Per l' uso delle norie, dobbiamo consultare, *l' architetture hydraulique* del Bélidor (édit. Navier) — Il tomo 8 *du Cours d' agriculture* del Rosier e le *Traité des machines hydraul.* del Borgnis.

NORD (*Astron.*). Si dà questo nome ad uno dei quattro punti cardinali, e precisamente a quello che rimane a settantrione.

NORMALE. (*Geom.*) Questa parola significa la stessa cosa di *perpendicolare*, ma ci serviamo più particolarmente di questa parola nella teoria delle curve. (*Vedi* Perpendicolare e Sunnormale).

NORWOOD (Riccardo), geometra inglese, noto principalmente per la prima misura di un arco di meridiano che sia stata fatta in Inghilterra. Questa operazione, che fu terminata nel 1635, trovasi descritta nella raccolta che sotto il nome di Norwood fu impressa a Londra nel 1694 col titolo di *Trigonometria*. L'arco di meridiano misurato è quello che si stende da Londra a York, e che comprende un' amplitudine di 2° 28'. Le altezze del sole furono prese a Londra e a York con un sestante di cinque piedi di raggio. La strada che conduce dall' una all' altra città fu misurata colla catena, osservando gli angoli a tutte le sinuosità per mezzo di un grafometro. Lo stesso fu fatto per le diverse chine; e riducendo tutto ad un arco di meridiano, Norwood trovò 9149 catene, donde inferisce il grado di 3709 catene e 5 piedi, che fanno 57300 tese secondo Newton, 57442 secondo Bailly, e 57424 secondo Lalande. Comunque sia, tale grado è certamente eccedente di 300 e più tese. L' errore non farà stupire se si pensa che il sestante e il grafometro non erano armati di canocchiale. Snellio, più valente geometra, erasi alcuni anni avanti ingannato di 2000 tese. Si può giudicare da questi due esempj qual conto abbiasi a fare dei gradi misurati dai Greci e dagli Arabi, e della fede che si può prestare alle misure più antiche che si attribuiscono a popoli, i quali non avevano nè nonii, nè canocchiali, nè micrometri, nè tampoco alcuno strumento di cui rimanga la più piccola menzione. Esistono pure di Norwood parecchie memorie inserite nelle *Transazioni filosofiche*.

NOTAZIONE (*Alg.*) Rappresentazione ovvero segno esterno che si usa per indicare le quantità numeriche. Per esempio, il modo di scrivere l' esponente al di sopra della base, in a^m, per indicare la potenza di questa base, è una *notazione*.

NOTTE (*Astron.*). Spazio di tempo durante il quale il sole sta sotto l' orizzonte.

NOTTURNO (*Astron.*). Si dà questo epiteto a tutto ciò che si riferisce alla *notte*, ed è l' opposto di *diurno*.

Si dice *arco notturno* l'arco che il sole descrive o sembra descrivere nel tempo che si trova sotto l' orizzonte.

Dicesi poi *arco semi-notturno* la porzione di circolo compresa tra la parte più bassa del meridiano e il punto dell' orizzonte in cui il sole si leva o tramonta. *Vedi* Diurno.

NOVE (*Aritm.*). È questo l' ultimo o il massimo dei numeri semplici della nostra scala di numerazione. La sua posizione in questa scala gli dà diverse proprietà particolari utilissime nella pratica di certi calcoli. Noi esporremo le principali, quelle che lo hanno reso celebre presso gli aritmetici arabi (*Vedi* Aritmetica), e che eccitano anche oggi la curiosità delle persone poco versate nella teoria dei numeri.

1. La somma delle cifre che esprimono un multiplo di 9, è eguale a 9 o ad un multiplo di 9. Per dimostrare in generale questa proprietà, rappresentiamo con a, b, c, d, ec. dei numeri semplici qualunque del nostro sistema di numerazione, vale a dire dei numeri da 0 fino a 9, ed allora la formula

$$a10^m + b10^{m-1} + c10^{m-2} \ldots\ldots + p10 + q \ldots\ldots (1)$$

potrà rappresentare tutti i numeri qualunque più grandi di 9 (*Vedi* Scala e Numerazione). Ma 9 essendo l'ultimo numero semplice, si ha $10=9+1$, valore che sostituito nella formula (1) la cambierà nell'altra

$$a(9+1)^m+b(9+1)^{m-1}+c(9+1)^{m-2} \dots\dots p(9+1)+q \dots\dots + (2).$$

Esaminando quest'ultima espressione, si vede che in generale si ha

$$(1+9)^{\mu}=1+9A_{\mu},$$

indicando con A_{μ} la somma di tutte le quantità che moltiplicano 9 nello sviluppo della potenza μ del binomio $1+9$, così potremo dare alla formula (2) la forma

$$a(1+9A_m)+b(1+9A_{m-1}) \dots\dots +p(1+9)+q \dots\dots (3).$$

Eseguendo le moltiplicazioni che sono accennate in questa espressione, si otterranno due serie di termini, la prima delle quali sarà

$$a+b+c+d \dots\dots +p+q,$$

e la seconda

$$9aA_m+9bA_{m-1}+9cA_{m-2} \dots\dots +9p.$$

Rappresentando dunque con M la somma delle cifre semplici a, b, c, d ec. e con N la somma di tutte le quantità che moltiplicano 9 nella seconda serie, si otterrà in fine per la forma generale di un numero qualunque l'espressione

$$9N+M \dots\dots\dots (4).$$

Ora quest'espressione è evidentemente divisibile per 9 se M è anch'esso divisibile per 9; così la proprietà che si esamina è una conseguenza necessaria dell'essere il numero 9 l'ultima cifra della nostra scala numerica, e questa proprietà apparterrebbe egualmente all'ultima cifra semplice di qualunque altro sistema di numerazione.

2. Dalla formula generale (4) resulta ancora che, per trovare il resto della divisione per 9 di un numero che non sia esattamente divisibile per 9, basta trovare il resto della divisione per 9 della somma delle cifre che compongono questo numero. Ciò è abbastanza evidente per non aver bisogno di altri schiarimenti.

3. Ecco una seconda proprietà sulla quale sono stati fatti moltissimi comenti. Se si rovescia l'ordine delle cifre che esprimono un numero qualunque, la differenza tra il numero *diretto* e il numero *rovesciato* è sempre un multiplo di 9. Per esempio, $53-35=18$, ossia 2 volte 9; $534-435=99$, ossia 11 volte 9, ec. Infatti, siccome M indica la somma delle cifre di un numero qualunque, la forma di questo numero è

$$9N+M,$$

e per qualunque altro numero composto delle stesse cifre sarà

$$9P+M,$$

donde la differenza dei due numeri sarà

$$9N+M-9P-M=9(N-P),$$

vale a dire un *multiplo* di 9.

Così la proprietà della quale si tratta è assai più generale, e può in questa guisa enunciarsi: *la differenza di due numeri espressi colle stesse cifre è sempre un multiplo di* 9. Per esempio, partendosi dal numero 1724, e formando

tutti quelli che possono resultare dalle permutazioni delle cifre che lo compongono, si trova

$$1724-1274=450\text{, ossia 50 volte 9,}$$

$$1724-1247=477\text{, ossia 53 volte 9, ec.}$$

La prova della moltiplicazione, detta *prova del* 9, che abbiamo già esposta all'articolo Aritmetica, è fondata su queste due proprietà. Basta osservare la forma generale (4) per comprenderne appieno la ragione senza difficoltà alcuna.

NOVEMBRE (*Calend.*). Undecimo mese del calendario giuliano e gregoriano. Nel calendario di Romolo era il nono, e di qui è derivato il suo nome che ha conservato anco dopo che l'aggiunta dei mesi di Gennajo di Febbrajo gli ha fatto cambiar posto. In origine era composto di 30 giorni: Giulio Cesare gliene aggiunse uno, ma Augusto lo ridusse di nuovo a 30, numero che ritiene anch'oggi nel calendario gregoriano.

NUMERATORE (*Alg.*). Nome di uno dei numeri che servono ad esprimere una frazione. (*Vedi* Frazione).

NUMERAZIONE. Generazione di tutti i numeri per mezzo di certi numeri che si considerano come semplici o come dati immediatamente. (*Vedi*. Aritmetica).

Siccome è impossibile di avere la concezione immediata di una pluralità indefinita di unità numeriche, è essenziale, per la possibilità dell'Aritmetica, di determinare mediatamente questa concezione. Ora, questa determinazione non può evidentemente aver luogo che mediante una combinazione degli algoritmi elementari primitivi, sopra i quali riposa in ultimo luogo tutta la scienza dei numeri, combinazione che stabilice l'algoritmo elementare derivato dalla Numerazione. (*Vedi* Matematiche, 4).

Combinando insieme i due algoritmi primitivi della *sommazione*, e della *riproduzione*, si ottiene una generazione derivata, la cui forma generale è

$$A_1 . M+A_2 . N+A_3 . O+A_4 . P+ \text{ec.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (a).$$

A_1, A_2, A_3, ec., indicando numeri dati dalla *sommazione*, o dall'addizione successiva dell'unità con se stessa, ed M, N, O, P, ec., numeri simili, ma legati tra essi da una legge, affinchè questa generazione abbia una forma determinata.

Ma affinchè quest'algoritmo sia capace di risolvere, in tutta la sua estensione, la questione che ci occupa, bisogna che si possa ristringere le due generazioni componenti tra limiti arbitrari, e ciò non ostante ottenere la generazione completa di una quantità qualunque. Questo è quello che effettivamente ha luogo.

Considerando come data immediatamente una certa quantità m di numeri A_1, A_2, A_3, ec., e prendendo per i numeri M, N, O, ec., la serie delle potenze progressive del numero limitante m, ciò che è la legge più semplice che possa legare questa quantità, avremo per la generazione di un numero qualunque X_1, seguendo il caso più semplice dell'algoritmo (a), l'espressione

$$X=A_1m^p+A_2m^{p-1}+A_3m^{p-2}+A_4m^{p-3}+ \text{ec.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (b).$$

Ma per uscire dal punto di vista generale, prendiamo *dieci* per limite, vale a dire consideriamo come semplici le dieci quantità

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

ed avremo per la generazione del numero X_1

$$X=A_1 10^p+A_2 10^{p-1}+A_3 10^{p-2}+ \text{ec.},$$

le quantità A_1, A_2, A_3, ec., essendo alcuni dei numeri semplici o, 1, 2, 3, ec.

Nell' aritmetica ci si sottintende le potenze 10^p, 10^{p-1}, ec., e i posti che si fanno occupare ai numeri semplici o, 1, 2, 3, ec., non sono che un mezzo per tener conto di queste potenze. Ed è mediante ciò che si chiamano *diecine*, i dell' ordine 10^1; *centinaia* quelli dell' ordine 10^2, ec. Per esempio, scrivendo numeri come nell' aritmetica la quantità X,

$$X = \ldots\ldots A_4A_3A_2A_1.$$

A_1 sarebbero le *unità*; A_2 le *diecine*; A_3 le *centinaia*, ec. Supponiamo per rendere l' applicazione ancora più sensibile che la generazione del numero X sia,

$$2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

si scriverebbe

$$X = 23957.$$

E, allora, 2 esprimerebbe 2 unità dell' ordine 10^4, ovvero 20000, o 2 *diecine di migliaja*; 3 esprimerebbe 3 unità dell' ordine 10^3, o 3000 ovvero 3 *migliaja*; 9, 9 unità dell' ordine 10^2, o 900, ovvero 9 *centinaja*; 5, 5 unità dell' ordine 10^1, ovvero 50, o 5 *diecine*; e finalmente 7, 7 unità primitive. Si enuncerebbe la quantità X dicendo che essa uguaglia *ventitremila novecento cinquantasette unità*. (*Vedi* Aritmetica.)

Ci rimane da dimostrare che la generazione di un numero intero qualunque è sempre possibile per mezzo dell' algoritmo (*b*), qualunque sia il limite *m*: il che si riduce a provare che la determinazione dei numeri A_1, A_2, A_3, ec., è possibile in tutti i casi.

Ora, X essendo un numero intero, sia, se è possibile,

$$X = A_0m^0 + A_1m^1 + A_2m^2 + A_3m^3 + A_4m^4 + \text{ec.} \ldots\ldots$$

Dividendo i due termini di quest' eguaglianza per *m*, si ha

$$\frac{X}{m} = \frac{A_0}{m} + A_1m^0 + A_2m^1 + A_3m^2 + \text{ec.},$$

ovvero, semplicemente

$$\frac{X}{m} = X_1 + \frac{A_0}{m} = X_1, \quad \text{resto } A_0.$$

X_1 rappresentando $A_1m^0 + A_2m^1 +$ ec.

Segue da ciò che A_0 è il resto della divisione di X per *m*. Dividendo di nuovo i due membri dell' uguaglianza,

$$X_1 = A_1m^0 + A_2m^1 + A_3m^2 + A_4m^3 + \text{ec.},$$

per *m*, viene

$$\frac{X_1}{m} = \frac{A_1}{m} + A_2m^0 + A_3m^1 + A_4m^2 + \text{ec.},$$

ovvero

$$\frac{X_1}{m} = X_2 + \frac{A_1}{m} = X_2, \quad \text{resto } A_1,$$

indicando con X_2 la quantità $A_2m^0 + A_3m^1 +$ ec.

Il numero A_1 è dunque il resto di questa seconda divisione. Proseguendo nella

stessa maniera, fino a tanto che si giunga ad un ultimo quoziente minore di m, i resti delle divisioni successive saranno gli altri numeri A_2, A_3, ec.

Ecco il quadro di questo calcolo:

$$X = A_0 m^0 + A_1 m^1 + A_2 m^2 + A_3 m^3 + \text{ec.}$$

$$\frac{X}{m} = \frac{A_0}{m} + \left\{ A_1 m^0 + A_2 m^1 + \text{ec.} \ldots\ldots \right\} = X_1, \quad \text{resto } A_0.$$

$$\frac{X_1}{m} = \frac{A_1}{m} + \left\{ A_2 m^0 + A_3 m^1 + \text{ec.} \ldots\ldots \right\} = X_2, \quad \text{resto } A_1.$$

$$\frac{X_2}{m} = \frac{A_2}{m} + \left\{ A_3 m^0 + A_4 m^1 + \text{ec.} \ldots\ldots \right\} = X_3, \quad \text{resto } A_2.$$

$$\frac{X_3}{m} = \frac{A_3}{m} + \left\{ A_4 m^0 + A_5 m^1 + \text{ec.} \ldots\ldots \right\} = X_4, \quad \text{resto } A_3.$$

ec. ec.

La determinazione dei numeri A_0, A_1, A_2, ec., è dunque sempre possibile, ed è, conseguentemente, vero che un numero intero qualunque X può esser dato dalla generazione derivata in questione, qualunque sia il limite m.

Siccome i numeri interi servono inseguito ad esprimere tutti gli altri, si vede che l'algoritmo (b) contiene implicitamente la soluzione generale dell'importante questione, che ci ha condotti a determinare la sua natura.

Daremo alla parola Scala Aritmetica il processo per passare da un sistema di numerazione ed un'altro; quest'articolo è il complemento di quello che precede. (*Vedi* ancora Binario).

NUMERICO o NUMERALE. Ciò che ha rapporto ai numeri.

Il *calcolo numerico* è quello che si effettua sopra i numeri rappresentati da cifre, con l'aiuto della *numerazione*; nel mentre che il *calcolo algebrico* è quello che si effettua sopra i numeri rappresentati in un modo generale per mezzo di lettere.

NUMERO. (*Alg.*). Questa parola nel suo significato volgare indica una collezione di unità della medesima specie. (*Vedi* Aritmetica e Matematiche).

I *numeri* si distinguono in *interi*, *frazionarii*, *razionali*, *irrazionali*, *abbondanti*, *amicabili*, *astratti*, *concreti*, *figurati*, *perfetti*, *poligonali*, *primi*, ec. (*Vedi* Queste diverse parole).

Teoria dei numeri. Uno dei rami fondamentali della *Teoria dell'Algebra*. (*Vedi* Matematiche n.° 13).

Abbiamo detto che la *teoria dei numeri* ha per oggetto la doppia considerazione che si presenta nella loro natura e ce gli fa concepire come un'*aggregazione di unità*, o come un *prodotto di fattori*, vale a dire, come essendo dati dall'algoritmo della sommazione

$$A + B = C,$$

o da quelli della riproduzione e della graduazione

$$A \times B = C, \quad A^B = C;$$

il primo di questi algoritmi portando esattamente nei numeri la considerazione dell'aggregazione dell'unità, e i due ultimi quella dell'esistenza dei fattori.

Ma limitandoci a questo doppio carattere generale di *somma* e di *prodotto*,

sia M un numero dato nello stesso tempo dalle generazioni

$$M = A + B, \quad M = C \times D;$$

avremo necessariamente

$$A + B = C \times D \; . \; . \; . \; . \; . \; (a),$$

e quest' eguaglianza esprimerà l'influenza sistematica e reciproca dei due algoritmi primitivi nella generazione del numero M. Ora, le leggi di quest' influenza reciproca sono evidentemente quelle che legano le quantità A, B, C, D, e rendono possibile la doppia generazione in questione. Daremo, per mezzo dell'opera del signor Wronski, la deduzione di queste leggi.

1. Siano n_1, n_2, n_3, n_4, ec., dei numeri qualunque positivi o negativi: cominciamo dal fare

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \text{ec.} \; . \; . \; . \; . \; . \; + n_\omega = N_\omega .$$

Se si formano con questi medesimi numeri tutti i prodotti differenti, che possono resultare combinandoli m ad m senza permutazioni, la somma di tutti questi prodotti sarà una funzione di N_ω, e potremo considerarla come lo sviluppo della potenza

$$\left(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \text{ec.} \; . \; . \; . \; . \; . \; + n_\omega\right)^m$$

sostituendo in questo sviluppo i coefficienti m, $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$, ec., per l'unità. Il signor Wronski indica con la caratteristica $\aleph$ questa funzione particolare di graduazione, che esso semplicemente chiama, dal nome di questa lettera funzione *aleph* e che esso scrive

$$\aleph\left[N_\omega\right]^m .$$

Abbiamo con questo metodo,

$$\aleph\left(n_1 + n_2\right)^2 = n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$$

$$\aleph\left(n_1 + n_2\right)^3 = n_1^3 + n_1^2 n_2 + n_1 n_2^2 + n_2^3$$

ec. ec.

$$\aleph\left(n_1 + n_2 + n_3\right)^3 = n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_1^2 n_2 + n_1^2 n_3 + n_2^2 n_1$$

$$+ n_2^2 n_3 + n_3^2 n_1 + n_3^2 n_2 + n_1 n_2 n_3$$

ec. ec.

2. Dalla costruzione delle funzioni *alephs* si ha, n indicando un numero qualunque

$$\aleph\left[N_\omega + n\right]^m = \aleph\left[N_\omega\right]^m + n\aleph\left[N_\omega\right]^{m-1} + n^2\aleph\left[N_\omega\right]^{m-2}$$

$$+ \text{ec.} \; . \; . \; . \; . \; . \; + n^{m-1}\aleph\left[N_\omega\right] + n^m \; . \; . \; . \; . \; . \; (b).$$

Infatti, prendendo semplicemente la potenza m del binomio $N_\omega + n$, abbiamo

$$\left(N_\omega + n\right)^m = N_\omega^{\ m} + mN_\omega^{\ m-1}n + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}N_\omega^{\ m-2}n^2 + \text{ec.}$$

ovvero sostituendo invece di N_ω il polinomio che questa quantità rappresenta

$$\left\{\left(n_1+n_2+n_3+\text{ec.}\ldots\ldots+n_\omega\right)+n\right\}^m =$$

$$\left(n_1+n_2+n_3+\text{ec.}\ldots\ldots+n_\omega\right)^m$$

$$+m\left(n_1+n_2+\ldots\ldots+n_\omega\right)^{m-1}n$$

$$+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\left(n_1+n_2\ldots\ldots+n_\omega\right)^{m-2}n^2$$

$$+\text{ec.}\ldots\ldots$$

Ora, per avere lo sviluppo finale della potenza del primo membro di quest' ultima espressione, non è necessario che sviluppare le potenze del polinomio

$$n_1+n_2+n_3+n_4+\text{ec.}\ldots\ldots n_\omega\ldots\ldots\ (c),$$

le quali si trovano nel secondo membro, ma la funzione $\aleph\left[N_\omega + n\right]^m$ è uguale a questo sviluppo dopo che abbiamo tolto i coefficienti, si ha perciò definitivamente l' espressione (b), poichè gli sviluppi delle potenze del polinomio (c) presi senza i coefficienti sono le funzioni *alephs*

$$\aleph\left[N_\omega\right]^m,\ \aleph\left[N_\omega\right]^{m-1},\ \aleph\left[N_\omega\right]^{m-2},\ \text{ec.}$$

3. Se indichiamo con n_p uno qualunque dei numeri n_1, n_2, n_3, ec., abbiamo evidentemente in virtù dell' espressione (b).

$$\aleph\left[N_\omega\right]^m = \aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m + n_p\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^{m-1}$$

$$+ n_p^2\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^{m-2} + \text{ec.}$$

$$= \aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m + n_p\left\{\aleph\left(N_\omega - n_p\right)^{m-1}\right.$$

$$+ n_p\aleph\left(N_\omega - n_p\right)^{m-2} + n_p^2\aleph\left(N_\omega - n_p\right)^{m-3}$$

$$\left.+\text{ec}\ldots\ldots\right\}$$

$$= \aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m + n_p\aleph\left[N_\omega\right]^{m-1}$$

e per qualunque altro numero n_q, preso ugualmente tra i numeri n_1, n_2, n_3, ec.

$$\aleph\left[N_\omega\right]^m = \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m + n_q \aleph\left[N_\omega\right]^{m-1},$$

il che ci dà la relazione generale,

$$\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m + n_p \aleph\left[N_\omega\right]^{m-1} = \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m + n_q \aleph\left[N_\omega\right]^{m-1}$$

e, definitivamente

$$\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m = \left(n_q - n_p\right) \cdot \aleph\left[N_\omega\right]^{m-1} \ldots\ldots (d).$$

Tale è l'espressione della relazione che esiste tra la generazione per sommazione, e la generazione per graduazione per mezzo dei numeri n_1, n_2, n_3, ec. E questa è la legge fondamentale di tutta la teoria dei numeri. Infatti si vede che essa si riduce alla forma (a).

4. Stabilendo tra due qualunque n_p e n_q dei numeri arbitrari $n_1+n_2+n_3+$ ec. . . $+n_\omega = N_\omega$ la differenza $\left(n_q - n_p\right)$ uguale a 2, 3, 4, 5, ec., si avrà, mediante questa legge, per la forma primitiva della generazione di tutti i numeri composti respettivamente dei fattori 2, 3, 4, 5, ec., l'espressione

$$\aleph\left[N_\omega - n_p\right]^m - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^m \ldots\ldots (e);$$

m essendo un numero intero positivo qualunque. — Da ciò dipende l'origine assoluta dei *fattori* nei numeri interi.

« Quei numeri primi, dice il signor Wronski, i quali non sono compresi sotto la forma (e), se ciò non segue nel caso in cui la differenza $\left(n_q - n_p\right)$ sia uguale all'unità, e i quali ciò nonostante si trovano come gli altri nella serie naturale dei numeri, vale a dire, nella serie prodotta dalla generazione consecutiva per sommazione, e specialmente per l'addizione consecutiva dell'unità, sono quelli che si chiamano NUMERI PRIMI. — Ora, si vede qual'è la natura di questi numeri, e quale ne è il carattere distintivo; si vede che questo carattere è puramente *negativo*, e che esso consiste nell'esclusione di questi numeri fuori dei limiti della forma primitiva (*d*), che abbiamo trovato per la generazione possibile dei numeri composti di fattori, all'eccezione del caso insignificante in cui la differenza $\left(n_q - n_p\right)$ sia uguale all'unità. — Dipende da questo carattere negativo o d'esclusione che resulta l'impossibilità di esprimere, in un modo generale, i numeri che si chiamano *primi*, vale a dire, l'impossibilità di sottoporre questi numeri ad una legge: i loro opposti sono, i numeri composti di fattori il cui carattere distintivo è *positivo*, a i quali possono essere sottoposti a leggi, e per conseguenza ricevere un'espressione generale; ed è quest'espressione che abbiamo dedotto dalla legge fondamentale dei numeri »

6. Con facilità possiamo riconoscere, esaminando le due quantità

$$\aleph\left[N_{\omega}-n_{p}\right]^{m},\ \aleph\left[N_{\omega}-n_{q}\right]^{m}$$

le quali concorrono alla generazione dei numeri composti del fattore $\left(n_{q}-n_{p}\right)$, che queste quantità sono costruite in un modo identico, e che non esiste fra esse alcuna differenza di generazione. Ed è quest' identità di formazione che è il principio primo della *congruenza* dei numeri (*Vedi* Congruenza) e dà luogo all' espressione generale di questa congruenza

$$\aleph\left[N_{\omega}-n_{p}\right]^{m}=\aleph\left[N_{\omega}-n_{q}\right]^{m},\ \left[modulo=\left(n_{q}-n_{p}\right)\right];$$

sopra la quale riposano tutte le proposizioni delle *Teorie dei numeri*. (*Vedi* Wronski, *Introd. à la Phil. des Math.*) *Vedi* Congruenza e Indeterminato.

Numero d'oro. Questo è quello che esprime l' anno corrente del ciclo *lunare*. (*Vedi*, Calendario).

NUTAZIONE (*Astron.*). Oscillazione periodica dell' asse del globo terrestre, cagionata principalmente dall' attrazione della luna, e il cui effetto è quello di produrre un movimento apparente nelle stelle fisse. Questo fenomeno, scoperto da Bradley, altera necessariamente le ascensioni rette e le declinazioni degli astri, perchè queste coordinate si riferiscono all' equatore celeste e alla linea degli equinozj, che in tal modo trovansi entrambi sottoposti ad una variazione periodica della stessa durata di quella della rivoluzione retrograda dei nodi della luna. È dunque di grande importanza il trovare la *posizione vera* di una stella, essendo data la sua posizione media, ossia, il che è lo stesso, quella posizione che unicamente dipende dalla precessione e dalla obliquità media. Ora, per la teoria dell' attrazione, la variazione periodica di questa obliquità, dovuta alla nutazione, è, secondo quello che ha stabilito Bessel nella sue opera intitolata: *Fundamenta astronomiae*, pag. 128,

$$d\omega=9'',426\cos N,$$

indicando con N la longitudine del nodo ascendente della luna: e la variazione periodica in longitudine, dovuta alla stessa causa, è

$$dl=-17'',615\ \text{sen}\ N.$$

A queste due ineguaglianze aggiungonsi talvolta per maggior precisione quelle assai più piccole cagionate dall' azione del sole ed alle quali si dà il nome di *nutazione solare*: queste ultime sono presso a poco

$$d\omega'=+0'',5253\cos 2L,$$

$$dl'=-1'',1104\ \text{sen}\ 2L,$$

ove L rappresenta la longitudine del sole.

Ritenendo pertanto questi dati come certi, il probleme non offre più difficoltà alcuna come passeremo adesso a far vedere.

Sia ΥQ (*Tav.* CLXXVII, *fig.* 3) l'equatore, P il suo polo, $\Upsilon E'$ l'ecclittica, P' il suo polo, $\Upsilon B=A$ l' ascensione retta media della stella E, $BE=D$ la sua declinazione media, $\Upsilon B'=l$ la sua longitudine, $B'E=\lambda$ la sua latitudine, e finalmente ω l' obliquità dell' ecclittica, ossia l' angolo P'CP.

Ciò posto, il triangolo sferico PEP', nel quale $PE=90^{\circ}-D$, $P'E=90^{\circ}-\lambda$,

$PP' = \omega$, l'angolo $P = 90° + A$ e l' angolo $P' = 90° - l$, darà queste tre relazioni

$$\text{sen}\,\lambda = \cos\omega\,\text{sen}\,D - \text{sen}\,\omega\cos D\,\text{sen}\,A,$$

$$\text{sen}\,D = \cos\omega\,\text{sen}\,\lambda + \text{sen}\,\omega\cos\lambda\,\text{sen}\,l,$$

$$\cos A\cos D = \cos\lambda\cos l.$$

Differenziando la seconda relazione rapporto a D, ad l e ad ω, si otterrà dal resultato un valore di dD, dal quale potranno eliminarsi i fattori $\cos\lambda\,\text{sen}\,l$ e $\text{sen}\,\lambda$ dedotti dalle altre due relazioni, e fatte tutte le operazioni si avrà

$$dD = d\omega\,\text{sen}\,A + dl\,\text{sen}\,\omega\cos A \ldots\ldots\ldots (1).$$

Tale sarà la nutazione in declinazione, se si sostituiscono a $d\omega$ e a dl i loro valori indicati di sopra, e se si prende per ω il suo valore attuale, che è presso a poco di 23° 27′ 40″.

Se nello stesso modo si differenzia la terza relazione, e se nel valore di dA che ne resulta si sostituiscono quelli di $\cos\lambda\,\text{sen}\,l$ e di dD che adesso abbiamo ottenuto, si avrà infine

$$dA = -d\omega\cos A\,\text{tang}\,D + dl(\cos\omega + \text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,A\,\text{tang}\,D) \ldots\ldots (2),$$

e sarà questa la nutazione in ascensione retta ponendo in luogo di $d\omega$ e di dl i loro valori.

Tali in brevi parole sono le formule che gli astronomi hanno disposto in tavole all' oggetto di calcolare la nutazione e di potere per conseguenza cangiare le posizioni medie in posizioni vere. Per maggiori particolarità si consultino i trattati di astronomia e l' articolo Posizione Apparente.

O

OBJETTIVO (*Diottr.*). In ottica dicesi *objettivo* la lente di un canocchiale o di un telescopio che è rivolta verso l' oggetto. *Vedi* TELESCOPIO.

OBLIQUANGOLO. (*Geom.*). Nome che si dà ai triangoli di cui tutti gli angoli sono *obliqui*, vale a dire, acuti o ottusi. Questa parola è antiquata.

OBLIQUITÀ. Posizione di una retta o di un piano che sono *obliqui* rapporto ad una retta o ad un altro piano.

OBLIQUITÀ DELL' ECCLITTICA. I geometri, che hanno approfondato la teoria dell'attrazione universale, hanno scoperto la causa della diminuzione progressiva ma lentissima della obliquità dell' ecclittica, ed hanno presso a poco assegnati i limiti ristretti dentro i quali questa diminuzione, dopo essersi sempre più rallentata, dovrà cangiarsi in aumento (*Vedi* ECCLITTICA). Bessel, astronomo di Koenigsberg, ha fatto e discusso un numero grande di osservazioni solstiziali, le quali fissano l' obliquità media pel 1° Gennajo 1800 a 23° 27′ 54″,8, e la sua diminuzione annua a 0″,457. Osservazioni simili fatte a Parigi, ed egualmente discusse con molta accuratezza, portano questa obliquità a 23° 27′ 57″, e la diminuzione secolare a 48″. Si ha dunque in generale, essendo t il numero degli anni scorsi dopo il 1800, ed n il numero d' ordine del giorno dell' anno che si considera

$$\text{Obliquità media, } \Omega = 23° \; 27' \; 57'' - 0'',48t - 0'',0013n.$$

Se a questa obliquità si aggiunge la nutazione solare e lunare, si ottiene ciò che comunemente si dice *obliquità apparente*. Ora, la nutazione lunare che dipende dalla longitudine media N del nodo ascendente della luna è 9″,426 cos N, e la nutazione solare che dipende dal doppio della longitudine media ☉ del sole è 0″,525 cos 2☉; così si ha infine, indicando con ω l' obliquità apparente,

$$\omega = \Omega + 9'',426 \cos N + 0'',525 \cos 2☉$$

I coefficienti 9″,426 e 0″,525 sono le *costanti* della nutazione luni-solare. Gli astronomi non si trovano tutti precisamente d' accordo su questi valori, che noi però diamo come i più probabili, poichè Lindeneau prende il primo di 8″,97707, e Bessel porta il secondo a 0″,5799. Queste leggere variazioni derivano in parte da qualche incertezza che tuttora esiste sulla massa della luna, che però può supporsi $\frac{1}{80}$ di quella della terra, secondo i calcoli i più recenti.

La teoria indica ancora due altre piccolissime ineguaglianze periodiche, che influiscono sulla obliquità dell' ecclittica, e che dipendono l' una dal doppio della longitudine N del nodo della luna, e l' altra dal doppio della longitudine ☾ di quello satellite, cioè

$$-0'',08773 \cos 2N + 0'',08738 \cos 2☾;$$

ma fino al presente il solo Bessel ne ha fatto conto nei calcoli astronomici.

Per un' applicazione di queste formule cerchiamo l' obliquità apparente per il 1° Gennajo 1838 a mezzogiorno a Parigi. Per quest' epoca le tavole danno

Longitudine media . . . . ☉ = 280° 40′ 56″
Longitudine media del nodo. . . . . N = 18 14 29

e, per ciò che precede, la nutazione luni-solare avendo la forma

$$+ a \cos N + b \cos 2☉$$

si otterrà

$\log a = 0{,}97433$	$\log b = 9{,}72016$
$\log \cos N = 9{,}97761 +$	$\log \cos 2☉ = 9{,}96908 -$
$0{,}95194 +$	$9{,}68924 -$
Nutaz. lun. $+8'',95$	Nutaz. sol. $-0'',49$

Nel 1800	Ω = 23° 27′ 57″
Diminuzione in 38 anni	− 18″,24
Obliquità media nel 1838	23° 27′ 38″,76
Nutazione luni-solare	+ 8″,46
Obliquità apparente cercata	23° 27′ 47″,22

È questo, colla sola differenza di un decimo di secondo, il numero che dà la *Connaissance des temps*. Le tavole di nutazione dispensano da quest o lieve calcolo.

OBLIQUO. (*Geom.*). Una retta è *obliqua* rapporto ad un'altra, quando esse non non gli è *perpendicolare*. Segue lo stesso rapporto ad un piano.

Due piani che formano un angolo differente da un resto sono *obliqui* l' uno rapporto all' altro.

Si dimostra, negli elementi di geometria, che di tutte le rette che si possano condurre da un punto ad una retta o ad un piano, la più piccola è la perpendicolare, e che, di due *oblique*, la più grande è quella che incontra la retta o il piano ad una maggior distanza del piede della perpendicolare. Per esempio, se dal punto A (*Tav.* CLXVI, *fig.* 2 e 3) si conducano le rette AE, AD, AF, AG, ec., la più piccola di tutte queste rette sarà la perpendicolare, la più grande sarà la più lontana AF.

Le oblique che si allontanano ugualmente, come AE ed AF sono uguali. (*Vedi* PERPENDICOLARE).

OCCHIO ARTIFICIALE. Si dà questo nome ad un certo apparecchio di ottica la cui parti essenziali somigliano quelle dell' occhio, e che è destinato a render sensibili i fenomeni della visione. *Vedi* VISIONE.

Consiste questo apparecchio in una sfera vuota (*Tav.* CLXXVII, *fig.* 4) di circa un decimetro di diametro e con due aperture circolari: una di queste in C ha 2 centimetri di larghezza ed in essa si pone una lente *convesso-convessa* che fa l' ufficio di *cristallino*; l' altra in HL ha 6 centimetri di diametro. Si adatta a quest' ultima un tubo HK, nel quale un altro tubo EGDF può a piacere scorrere avanti e indietro: all' estremità EG si pone un foglio da lucidare ovvero un vetro piano spulito. Quest' ultimo pezzo rappresenta la *retina* sulla quale vanno a dipingersi gli oggetti nell' occhio naturale.

Per vedere l'effetto di questa macchina, si volge l'apertura C verso un oggetto, e si fa scorrere avanti o indietro il tubo mobile finchè, osservando per l'apertura DF, non si veda l'oggetto rappresentato sulla carta o sul vetro spulito. L'immagine vi è rovesciata come lo sarebbe sulla retina. In diverse maniere può variarsi la costruzione di questo apparecchio, che in sostanza non è che una specie di *camera oscura*.

OCCIDENTALE (*Astron.*). Si dà questo epiteto a tutto ciò che si riferisce all'occidente.

OCCIDENTE o OVEST (*Astron.*). Parte dell'orizzonte ove il sole tramonta. Si dà ancora particolarmente questo nome al punto in cui il sole tramonta il giorno dell'equinozio, vale a dire al ponto in cui l'equatore taglia l'orizzonte. Preso in questo senso ristretto, l'*occidente vero* è uno dei quattro punti *cardinali*.

Il sole non tramontando due giorni di seguito nel medesimo punto, si distingue l'*occidente d'estate* dall'*occidente d'inverno*, e questi due dall'*occidente vero*. Il primo è il punto dell'orizzonte in cui il sole tramonta quando entra nel segno del *Cancro*, il giorno del solstizio d'estate; il secondo è quello in cui il sole tramonta quando entra nel segno del *Capricorno*, il giorno del solstizio d'inverno. *Vedi* Armillare.

OCCULTAZIONE (*Astron.*). Nome col quale s'indica l'ecclisse di una stella o di un pianeta prodotto dalla luna o da qualunque altro pianeta. *Vedi* Ecclissa.

Le occultazioni offrono, come gli ecclissi, un mezzo prezioso per ottenere la longitudine dei luoghi terrestri. Questi fenomeni si predicono in un modo analogo a quello degli ecclissi del sole e della luna, ma hanno il vantaggio di essere più frequenti, perchè non scorre un solo istante senza che la luna passi avanti a qualche stella e non intercetti la sua luce: perciò la *Connaissance des temps* indica per ciascun giorno dell'anno le occultazioni che possono essere osservate.

Le occultazioni dei pianeti prodotte da altri pianeti sono più rare di quelle delle stelle fisse, ma servono almeno a dimostrare sensibilmente che i pianeti sono situati a distanze diseguali dalla terra e dal sole, perchè il pianeta che rimane *occultato* da un astro è necessariamente più lontano di quello che produce l'*occultazione*.

La determinazione delle longitudini terrestri per mezzo delle occultazioni è di un'utilità troppo grande in astronomia e in geografia, per non richiamarci ad entrare in qualche dettaglio su questo soggetto.

Quando un astro descrivendo la sua orbita da occidente in oriente ecclissa una stella e cessa poco dopo di nasconderla agli sguardi dello spettatore, la differenza tra le longitudini delle stazioni in cui questo fenomeno è stato osservato nelle circostanze atmosferiche le più favorevoli si deduce dalle ore dell'*immersione* e dell'*emersione*. Ma siccome per l'effetto delle parallassi queste due fasi non corrispondono agli stessi istanti fisici per gli osservatori posti sotto meridiani differenti, così è necessario di ridurre le cose a questo stato, calcolando per ciascuna stazione l'ora della *congiunzione vera*, vale a dire l'istante in cui la longitudine vera dei due astri era la stessa, perchè allora la differenza delle ore di questa congiunzione in due diverse stazioni è quella delle loro longitudini.

Bisogna prima di tutto conoscere approssimativamente la longitudine cercata rapporto al meridiano di Parigi pel quale sono state calcolate le tavole della *Connaissance des temps*, all'oggetto di poter determinare la posizione della luna nel momento di ciascuna fase che si osserva, e per conseguenza il suo movimento orario in latitudine e in longitudine. Queste effemeridi danno ancora la parallasse orizzontale equatoriale della luna, che si riduce al luogo dell'osservatore di cui

si conosca la latitudine geografica, se per maggior precisione si vuole aver riguardo allo schiacciamento della terra: finalmente vi si prende il semidiametro di quest' astro, di cui si calcola l' *aumento* in ragione della sua elevazione al di sopra dell' orizzonte.

Ciò fatto, il tempo medio dell' osservazione si converte in tempo sidereo aggiungendovi l' ascensione retta media del sole. Questo tempo sidereo è ciò che si dice *ascensione retta dello zenit.*

La latitudine geografica dello spettatore diminuita dell' angolo che fa la verticale col raggio della terra è la *latitudine geocentrica* o la *declinazione dello zenit.*

Il calcolo della latitudine e della longitudine apparente della luna si eseguisce direttamente col metodo indicato all' articolo Posizione apparente, ovvero per maggior semplicità si calcolano le parallassi di longitudine e di latitudine che poi si aggiungono al luogo vero per avere il luogo apparente. Nell' uno e nell' altro caso fa d' uopo determinare preventivamente la posiziona del *nonagesimo*, o la longitudine e la latitudina dello zenit. *Vedi* Parallassa.

La stella occultata deve anch' essa esser riferita all' ecclittica, vale a dire deve esser data di posizione mediante la sua longitudine e la sua latitudine apparente: ma quest' astro essendo senza parallasse, basterà, dopo aver preso nella *Connaissance des temps* la sua ascensione retta e la sua declinazione appareote, passare da queste due coordinate alla longitudine e alla latitudine apparante. *Vedi* Trasformazione delle Coordinata

Sia ora P (*Tav.* CLXXVII, *fig.* 4) il polo dell' eeclittica QQ', E il luogo apparente di uoa stella a contatto coll' orlo della luna il cui centro apparente è in L, ed FE un arco paralello all' ecclittica: il triangolo ELF potrà, in tutta la durata dell' ecclisse, esser coosiderato, a motivo dell' estrema sua piccolezza, come un triaogolo rettilineo rettangolo in F. L' ipotenusa LE sarà la distanza apparente del centro della luna dalla stella, ed FE la differenza delle longitodini apparenti, misurata nella regione della stella. Se dunque L' e Λ' sono respettivamente la longitudine a la latitudine apparenta della luna, l' e λ' le coordinate simili della stella, Δ' il semidiametro apparente della luna, a se per brevità si fa $\Lambda' - \lambda' = \varepsilon$, ed $FE = \beta$, si avrà questa relazione

$$\beta = \sqrt{\Delta'^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{(\Delta' + \varepsilon)(\Delta' - \varepsilon)}.$$

Ma β essendo la differenza delle longitudini apparenti misurata sopra un paralello all' ecclittica la cui latitudine è λ', questa stessa differenza valutata sul circolo massimo QQ' sarà $QQ' = \frac{\beta}{\cos\lambda'}$. Per l' istaote dell' immersione si ha dunque

$$l' - L' = \frac{\sqrt{(\Delta' + \varepsilon)(\Delta' - \ )}}{\cos\lambda'},$$

e per l' istante dell' emersione

$$L' - l' = \frac{\sqrt{(\Delta' + \varepsilon)(\Delta' - \varepsilon)}}{\cos\lambda'}.$$

Facendo $l' - L' = x$, e chiamando π la parallasse di longitudine della luna, si avrà, indicando con L la sua longitudina vera,

$$L' = L + \pi, \quad e \quad l' - L' = l' - L - \pi;$$

per conseguenza $l'-L=x+\pi$ è la differenza della longitudine vera dei due astri per l'immersione ed $L-l'=x-\pi$ lo è per l'emersione; la qual differenza è necessaria a conoscersi per poter calcolare il tempo scorso dall'epoca della fase osservata fino all'ora della congiunzione vera. Ora, essendo m il moto orario della luna espresso in secondi di tempo medio, si ha evidentemente questa proporzione

$$m : 3600'' :: x \pm \pi : dt = \frac{3600}{m}(x \pm \pi);$$

e se t è l'ora dell'osservazione, T quella della congiunzione vera, si avrà finalmente

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{(\Delta' + \ )(\Delta' - \varepsilon)}}{\cos\lambda'} \\ T &= t \pm dt = t \pm \frac{3600}{m}(x \pm \pi) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (A),$$

prendendo il segno + per l'immersione e il segno — per l'emersione.

Un esempio numerico chiarirà meglio l'andamento di questo metodo.

Il 30 Marzo 1822, il sig. Rupel osservò al Cairo l'occultazione di due stelle menzionate nel catalogo del Piazzi. La posizione apparente della prima, alla quale ei fermeremo, era la seguente:

Ascensione retta apparente . . . . $AR' = 111^{\circ}\ 52'\ 19'',1$

Declinazione apparente . . . . $D' = 24^{\circ}\ 45'\ 9'',0$

ed alla stessa epoca l'obliquità apparente dell'ecelittica era $\omega = 23^{\circ}\ 27'\ 54''$.

Con questi dati, si troverà, per mezzo delle formole dimostrate all'articolo Trasformazione delle coordinate, e facendo uso dei logaritmi con sette decimali,

Longitudine apparente . . . . $l' = 109^{\circ}\ 47'\ 53'',0$

Latitudine apparente . . . . $\lambda' = 2^{\circ}\ 46'\ 47'',0$ boreale.

Per avere il luogo della luna, conviene prima di tutto osservare che la posizione geografica del Cairo è stata supposta come appresso:

Latitudine . . . . . $H = 30^{\circ}\ 3'\ 20''$ Nord

Longitudine . . . . . $P = 28^{\circ}\ 58'\ 0''$ Est $= 1^{or}\ 55'\ 52''$ in tempo.

Così l'osservazione dell'immersione essendo stata fatta in questa città il 30 Marzo 1822 a ore 19 33' 37'',7 di tempo medio, ossia verso le ore 7 della sera, l'orologio segnava a Parigi $1^{or}\ 55'\ 52''$ di meno, ossia $5^{or}\ 37'\ 45'',7$ di sera. È dunque per quest'epoca che deve determinarsi, per mezzo della *Connaissance des temps* del 1822, la longitudine e la latitudine vera della luna, vale a dire la longitudine e la latitudine che avrebbero avuto luogo per l'osservatore posto nel centro della terra. Ora queste due coordinate sono

Longitudine vera ☾ . . . . $L = 109^{\circ}\ 39'\ 22'',6$

Latitudine vera . . . . $\Lambda = 2^{\circ}\ 56'\ 44'',5$ boreale

e il moto orario in longitudine è $m = 33'\ 48''$. Si prenderà pure nello stesso al-

manacco

Parallasse orizzontale . . . . $\Pi = 57'\ 55'',2$.
Semidiametro orizzontale . . . . $\Delta = 15'\ 47'',0$

Riducendo il tempo medio dell'osservazione in tempo sidereo, si ha

Tempo sidereo, o ascensione retta dello zenit $= 8^{or}\ 3'\ 45'',24$
In arco . . . . $g = 120^\circ\ 56'\ 18'',6$
Latitudine del Cairo. — Angolo della verticale, o declinazione dello zenit . . . . . $h = 29^\circ\ 53'\ 24'',0$

Quest'angolo della verticale è $= \frac{1}{300} \cdot \frac{\text{sen}\ 2H}{\text{sen}\ 1''}$, supponendo lo schiacciamento della terra $\frac{1}{300}$.

Con questi elementi possiamo ora calcolare la longitudine n dello zenit e la sua latitudine q.

Formule del nonagesimo

$$\text{tang}\ n = \cos\omega\ \text{tang}\ g + \frac{\text{sen}\ \omega\ \text{tang}\ h}{\cos g},$$

$$\text{sen}\ q = \text{sen}\ h \cos\omega - \cos h\ \text{sen}\ \omega\ \text{sen}\ g.$$

Dalla prima si ha

$\log\cos\omega = 9{,}96251$
$\log\text{tang}\ g = 0{,}22228 -$
$0{,}18479 -$

$\log\text{sen}\ \omega = 9{,}60009$
$\text{col tang}\ h = 9{,}75951$
$\log\cos g = 0{,}28893 -$
$9{,}64853 -$

Così si ha

1° termine $= -1{,}53040$
2° termine $= -0{,}44517$
$\text{tang}\ n = -1{,}97557$, $\log\text{tang}\ n = 0{,}2956770 -$

donde si ottiene

$n = -63^\circ\ 9'\ 5''$, e la longitudine dello zenit $n = 116^\circ\ 50'\ 55''$.

Dalla seconda formula si ha, senza dubbio nessuno intorno alla specie dell'angolo cercato,

$\log\text{sen}\ h = 9{,}69752$
$\log\cos\omega = 9{,}96251$
$9{,}66003 +$

$\log\cos h = 9{,}93801 -$
$\log\text{sen}\ \omega = 9{,}60009$
$\log\text{sen}\ g = 9{,}93334$
$9{,}47144 -$

donde si ricava

1° termine $= +0{,}45712$
2° termine $= -0{,}29610$
$\text{sen}\ q = +0{,}16102$ $\log\text{sen}\ q = 9{,}20688$
latitudine dello zenit . . . . $q = 9^\circ\ 15'\ 57''$.

Calcolo delle parallassi in longitudine e in latitudine.

La formula della parallasse di longitudine, facendo $\theta = \frac{\text{sen}\,\Pi \cos q}{\cos \Lambda}$, è

$$\pi = \theta \frac{\text{sen}(L-n)}{\text{sen}\,1''} + \frac{1}{2}\theta^2 \frac{\text{sen}\,2(L-n)}{\text{sen}\,1''}.$$

Eseguendo il calcolo indicato, si ha primieramente

$$\begin{array}{rl} L = & 109^\circ\ 39'\ 22'',6 \\ n = & 116\ \ 50\ \ 55\ ,0 \\ \hline L-n = & -7^\circ\ 11'\ 32'',4 \end{array}$$

Operando poi coi logaritmi con cinque decimali, si trova

$$\begin{array}{rl} \log \text{sen}\,\Pi = & 8,22651 \\ \log \cos q = & 9,99429 \\ \text{col} \cos \Lambda = & 0,00057 \\ \hline \log \theta = & 8,22137 \\ \log \text{sen}(L-n) = & 9,09760 - \\ \text{col sen}\,1'' = & 5,31443 \\ \hline & 2,63340 - \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \tfrac{1}{2}\theta^2 = & 6,14171 \\ \log \text{sen}\,2(L-n) = & 9,39524 - \\ \text{col sen}\,1'' = & 5,31443 \\ \hline & 0,85138 - \end{array}$$

Così si ha

$$\begin{array}{rl} 1.^\circ \text{ termine} = & -429'',94 \\ 2.^\circ \text{ termine} = & -\ \ 7\ ,10 \\ \hline \text{Parallasse di longitudine } \pi = & -437'',04 = -7'\ 17'',0 \end{array}$$

Il calcolo della parallasse di latitudine è meno semplice del precedente, a motivo del calcolo di un angolo ausiliario dipendente dalla parallasse di longitudine (*Vedi* PARALLASSE). Sarà perciò quasi egualmente spedito il determinare direttamente la distanza polare apparente della luna per mezzo della formula seguente

$$\cot \delta' = \frac{\text{sen}(L'-n)}{\text{sen}(L-n)} \left(\cot \delta - \frac{\text{sen}\,\Pi\ \text{sen}\,q}{\text{sen}\,\delta} \right),$$

che facilmente si ottiene dall' analisi trigonometrica di cui si fa uso nell'articolo citato, e che si cangia nella seguente più comoda pel calcolo

$$\cot \delta' = \frac{\text{sen}(L'-n) \cos(\delta + \theta)}{\text{sen}(L-n) \text{sen}\,\delta \cos \theta},$$

facendo $\tang \theta = \frac{\text{sen}\,\Pi\ \text{sen}\,q}{\text{sen}\,\delta}$, ed avvertendo che δ è la distanza polare vera e δ' l' apparente. Facendo uso della prima formula si ha

$$\begin{array}{rl} L' = & 109^\circ\ 32'\ \ 5'',6 \\ n = & 116\ \ 50\ \ 55\ ,0 \\ \hline L'-n = & -7^\circ\ 18'\ 49'',4 \end{array} \qquad \delta = 90^\circ - \Lambda = 87^\circ\ 3'\ 15'',5$$

prendendo quindi i logaritmi a sette decimali si trova

$0{,}0072463$	$0{,}0072463$
$\log \text{sen}\,(L'-n) = 9{,}1048456 -$	$\log \text{sen}\,\Pi = 8{,}2265091 -$
$\text{col sen}\,(L-n) = 0{,}9024007 -$	$\log \text{sen}\, q = 9{,}2069059$
$\log \cot \delta = 8{,}7114684$	$\text{cosen}\, \delta = 0{,}0005743$
$8{,}7187147$	$7{,}4412356 -$

1° termine $= +0{,}052326$

2° termine $= -0{,}002762$

$\cot \delta' = +0{,}049564$ $\qquad \log \cot \delta' = 8{,}6951663$

Per conseguenza si ha infine

Distanza polsre apparente ☾ . . . . $\delta' = 87^\circ\ 9'\ 45'',0$

Distanza polare vera . . . . $\delta = 87\ \ 3\ \ 15\ \ ,5$

Parallsse della distanza polare. . . . . $6'\ 29'',5$

Calcolo della congiunzione vera.

Adesso non si tratta più che di dedurre i valori di x e di T dalle formule (A). Si ha pertanto

Semidiametro orizzontale ☾ . . . . $\Delta = 15'\ 47'',0$

Aumento . . . . $16\ \ ,3$

Semidiametro apparente . . . . $\Delta' = 16'\ \ 3'',3 = 963'',3$

Differenza delle latitudini apparenti . . . . $\varepsilon = 3\ \ 27\ \ ,7 = 207\ \ ,7$

$\Delta' + \varepsilon = 1171,0$

$\Delta' - \varepsilon = 755,6$

Operando poscia coi logaritmi, si ottiene

$\log(\Delta' + \varepsilon) = 3{,}0685569$

$\log(\Delta' - \varepsilon) = 2{,}8782919$

Somma $= 5{,}9468488$

Semisomma $= 2{,}9734244$

$\text{col}\cos\lambda' = 0{,}0005116$

$\log x = 2{,}9739360$ $\qquad x = +941'',74$

$\pi = -437\ \ ,04$

$x + \pi = +504\ \ ,70$

$\log(x + \pi) = 2{,}7030333$

$\log 3600'' = 3{,}5563025$

$\text{col}\, m = 6{,}6929237$

$\log dt = 2{,}9522595$ $\qquad dt = 995'',9 = 14'\ 55'',9$

Infine si ha

Ora dell' immersione.	$t = 19^{or}\ 33'\ 37'',7$ tempo medio
Tempo scorso fino alla congiunzione	+ 14 55 ,9
Congiunzione vera al Cairo.	$T = 19^{or}\ 48'\ 33'',6$
Congiunzione vera a Parigi, secondo la *Connaissance des temps*	17 52 49 ,2
Longitudine del Cairo	$1^{or}\ 55'\ 44'',4$
La seconda stella ha dato	1 55 36 ,9
Media	1, 55 40, 6

Il calcolo della longitudine geografica per mezzo di un ecclisse solare è in tutto simile a questo, ma esige di più che si assegni la posiziona apparente di quest' astro per mezzo delle parallassi di longitudine e di latitudine. Per non dare una maggiore estensione al presente articolo, faremo soltanto osservare che siccome la latitudine λ del sole à nulla, le formule (A) si cangiano nella appresso

$$x = \sqrt{(\Delta' + \iota)(\Delta' - \iota)}$$

$$dt = \frac{3600}{m - \mu}\left(x \pm (\pi - p)\right)$$

nelle quali ι è la differenza della latitudini apparenti dei due astri, p la parallasse di longitudine del sole, μ il suo movimento orario in questo senso, e Δ' la semisomma o la differenza dei semidiametri della luna e del sole, secondochè il contatto è stato esterno o interno.

Per mezzo di buone e numerose osservazioni di questo genere gli astronomi e i navigatori correggono le longitudini geografiche imperfette. Esse servono inoltre a mettere in evidenza gli errori delle tavole lunari, e delle antiche specialmente, quando la posizione vera della luna, che esse fanno conoscere per l' epoca precisa della congiunzione, differisce da quella che danno queste tavole: posizione facile a determinarsi, perchè i movimenti orarj in longitudine e in latitudine non sono punto dubbiosi, e il tempo scorso dall'istante di una fase fino all' ora in cui i due astri hanno avuta la stessa longitudine può essere valutata con tutta l' esattezza.

OCULARE (*Diottr.*). Si dà questo nome a quella delle lenti di un canocchiale, di un telescopio, o di un microscopio composto, alla quale si pone l' occhio. Un tal nome serve a distinguere questa lente dall' *objettivo*, che è la lente rivolta verso l' oggetto. *Vedi* CANOCCHIALE.

ODDI (MUZIO), dotto geometra, nato nel 1569 in Urbino, abbracciò dapprima la carriera militare. In seguito, dedicatosi più specialmente allo studio delle matematiche, ottenne per concorso nel 1609 una cattedra di tale scienza a Milano. Dopo avervi professato con onore per molti anni, passò nel 1626 a Lucca a dirigervi le fortificazioni di quella città; quindi ebbe l' impiego d' ingegnere a Loreto, donde infine tornò in patria, ove morì nel 1639. Le opere sue sono: I *Degli orologi solari nelle superficie piane*, 1614, in-4; — ed una *seconda opera* sullo stesso soggetto, 1638, in-4. Questi due trattati sono notabili, dice Montucla, per diverse pratiche ingegnose, e per una geometria assai più profonda di quella che d' ordinario trovasi in opere di tal genere (*Storia delle Matematiche*, Tom. I, pag. 730); II *Dello squadro*, Milano, 1625, in-4; III *Della fabbrica e dell' uso del compasso polimetro*, ivi, 1633, in-4.

ODIERNA. *Vedi* Hodierna.

ODOMETRO (*Agrim.*). Strumento che serve a misurare le distanze per mezzo del numero dei passi che si fanno nel percorrerle.

L' *odometro* è, in generale, composto, come un orologio, di più rote che ingranano le une nelle altre e che fanno muovere con molta lentenza certe lancette che indicano le divisioni di un quadrante graduato. Questo strumento, che un uomo porta nella sua tasca o che attacca ad una vettura, è posto in movimento da una catena che ha una delle sue estremità attaccata alla gamba di quello che lo porta, o ad una leva sulla quale agisce il movimento delle ruote della vettura. In tal guisa si può conoscere il numero dei passi o dei giri delle ruote che si sono fatti, donde si valuta la distanza percorsa. L' *odometro*, già noto fino dai tempi di Vitruvio, ha ricevuto parecchi perfezionamenti; ma non può però sperarsi giammai una grande esattezza dall' uso di strumenti di tal fatta.

OFIUCO (*Astron.*). Costellazione boreale conosciuta più comunemente sotto il nome di *Serpentario.*

OLIMPIADE (*Cronologia*). Periodo di 4 anni in uso presso i Greci, e che aveva il suo principio dalla istituzione dei giuochi olimpici.

OMBELLICO (*Geom.*). S' indica sotto questo nome il punto di una superficie curva pel quale tutte le sezioni normali hanno la stessa curvatura. *Vedi* Sezione.

La ricerca degli *ombellichi* di una superficie data dalla sua equazione $F(x, y, z)=0$ si riduce a trovare se essa possiede punti tali che *tutti i raggi di curvatura delle sezioni normali relative a questi punti siano uguali tra loro.* Ora, l' espressione generale del raggio di curvatura di una sezione normale, relativa ad un punto qualunque (x, y, z), essendo

$$\rho=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\frac{(1+p^2)+2pqm+(1+q^2)m^2}{r+2sm+tm^2}\ldots(a),$$

nella quale (*Vedi* Raggio di Curvatura),

$$p=\frac{dz}{dx},\quad q=\frac{dz}{dy},\quad r=\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$s=\frac{d^2z}{dxdy},\quad t=\frac{d^2z}{dy^2},$$

e il valore di questo raggio non variando per ciascun punto dato che mediante la quantità m, la quale varia sola quando il piano secante normale gira intorno dello stesso punto dato (x, y, z) sopra la superficie, è evidente che il punto (x, y, z) non può essere un ombellico che quando il valore del raggio o rimane lo stesso per tutti i valori di m. Così, per ottenere la condizione dell' esistenza di un ombellico, bisogna stabilire tra le quantità p, q, r, s, t delle relazioni che rendano il secondo membro di (a) indipendente dalla variabile m. Osserviamo, per quest' effetto, che una quantità frazionaria della forma

$$\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2},$$

benchè contenente una variabile x, diviene costante quando i coefficienti di ciascuna potenza della variabile hanno tra essi il medesimo rapporto; poichè ponendo

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\text{A},$$

questa quantità diventa

$$\frac{a'A+b'Ax+c'Ax^2}{a'+b'x+c'x^2}=A.$$

Così, il punto (x, y, z) sarà un ombellico se si ha la doppia equazione

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t} \ldots\ldots (b).$$

Resulta da queste considerazioni che, per trovare se una superficie data ammette degli ombellichi, bisogna dedurre dalla sua equazione $F(x, y, z)=0$ le derivate differenziali p, q, r, s, t, quindi stabilire le due condizioni (b) le quali, unite all'equazione della superficie, formeranno un sistema di tre equazioni finite, il quale non ammetterà valori reali per x, y, z che quando esistono degli ombellichi. Ciascun sistema di valori x, y, z, corrisponderà ad un ombellico, donde si vede che in generale il numero di questi punti è limitato sopra una superficie data.

Quando le due equazioni (b) si riducono ad una sola veramente distinta, questa, unita all'equazione $F(x, y, z)=0$, determina sopra la superficie data una curva di cui ciascun punto è un ombellico, e che si chiama *la linea delle curvature sferiche*, perchè in ciascuno di questi punti la superficie presenta una curvatura uniforme come quella di una sfera.

La superficie della sfera è la sola che presenta una curvatura in tutto uniforme per ciascuna normale. Possiamo assicurarci che ciascuno di questi punti è un ombellico, osservando che la condizione (b) si trova adempita per qualunque sistema di valori delle coordinate x, y, z, capace di soddisfare all'equazione della sfera

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Infatti, le derivate differenziali ricavate da quest'equazione sono:

$$p=\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},$$

$$q=\frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z},$$

$$r=\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3},$$

$$s=\frac{d^2z}{dxdy}=-\frac{xy}{z^3},$$

$$t=\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3};$$

donde si deduce

$$\frac{1+p^2}{r}=-z, \quad \frac{pq}{s}=-z, \quad \frac{1+q^2}{t}=-z.$$

Si veda, per tutto ciò che riguarda gli *ombellichi*, una memoria del signor Poisson inserita nel 21° fascicolo *del giornale della scuola politecnica*.

OMBRA (*Ottica*). Spazio privo di luce a motivo della interposizione di un corpo opaco.

In un mezzo omogeneo, la luce propagandosi in linea retta e in tutti i sensi, l'insieme di tutti i raggi che partono da un punto luminoso occupa interamente lo spazio, se nessun corpo si presenta ad arrestarli nella loro direzione. Ma se in questo spazio si trova un corpo opaco, i raggi che lo incontrano sono arrestati, mentre gli altri continuano a propagarsi. Esiste dunque al di là dal corpo opaco una parte dello spazio che non riceve luce, ed è questa parte priva di luce che costituisce ciò che dicesi *ombra* del corpo. Nel linguaggio ordinario e nella prospettiva, s' intende propriamente per *ombra*, non lo spazio intero privo di luce per l' interposizione di un corpo opaco avanti una sorgente di luce, ma la projezione di questo spazio sulla superficie che la riceve. Così l'ombra assoluta dei corpi esposti ai raggi solari viene projettata sulla superficie della terra e forma l'ombra particolare di questi corpi.

La teoria delle ombre è una parte importantissima dell'ottica, ed è il fondamento della gnomonica e della teoria degli ecclissi. Passeremo ora ad esporre i suoi principj generali.

1. Ogni corpo opaco getta un' ombra nella stessa direzione dei raggi di luce e nella parte opposta al punto luminoso. Se il punto luminoso o il corpo opaco cangiano di posto, l' ombra cangia di posto anch' essa.

2. La grandezza dell' ombra dipende dalle grandezze relative dell' oggetto luminoso e del corpo opaco.

Quando il corpo opaco è più piccolo del corpo luminoso, le dimensioni dell' ombra diminuiscono tanto più quanto maggiormente si allontana essa dal corpo, e in questo caso l' ombra ha un termine, vale a dire è *finita*.

Quando al contrario il corpo opaco è più grande del corpo luminoso, le dimensioni dell' ombra divengono sempre più grandi a misura che essa si allontana dal corpo, e in questo caso l' ombra si stende a distanze *infinite*.

Se il corpo opaco e quello luminoso sono di grandezza eguale, l'ombra si stende anco in questo caso a una distanza infinita, ma è sempre della stessa ampiezza.

La figura 2 della Tavola IX rappresenta queste tre circostanze.

3. Supponendo che il corpo opaco sia sferico, si vede che nei primi due casi l'ombra è uno spazio conico; ma il vertice del cono è dalla parte dell' oggetto luminoso, quando quest' oggetto è più piccolo del corpo opaco, mentre, quando è più grande, il vertice del cono si trova dall' altra parte del corpo opaco. Nel terzo caso, l' ombra è uno spazio cilindrico.

Abbiamo veduto altrove (*Vedi* Ecclissa, n° 23) come si possa determinare la lunghezza finita di un cono d' ombra projettato nello spazio assoluto da un corpo opaco illuminato da un oggetto luminoso di una grandezza superiore a quella di questo corpo.

4. Quando l' ombra assoluta, projettata nello spazio assoluto, è incontrata da una superficie qualunque, la sua traccia su questa superficie forma l' *ombra relativa*; ed è questa soltanto che si considera e di cui si ha bisogno nella prospettiva.

Si distinguono due specie di ombre relative, *l' ombra diritta* e *l' ombra rovesciata*. La prima è quella che un corpo projetta sopra un piano orizzontale sul quale questo corpo è perpendicolare; la seconda è quella che esso projetta sopra un piano verticale.

5. Considerando un corpo opaco AB (*Tav.* IX, *fig.* 3) perpendicolare sul piano orizzontale MN ed illuminato dal sole, l' *ombra diritta* di questo corpo sarà AC e la sua lunghezza sarà determinata dal raggio luminoso DBC, che rade l' estremità B del corpo. In forza delle proprietà del triangolo rettangolo

BAC, si trova che il rapporto tra le lunghezze AC e AB dell'ombra e del corpo è quello medesimo che passa tra i seni degli angoli ABC e BCA: e siccome il seno di ABC è la stessa cosa del coseno di BCA, e di più l'angolo BCA è l'angolo di altezza del sole al di sopra dell'orizzonte, così si avrà, indicando con h quest'altezza,

$$AB : AC :: \operatorname{sen} h : \cos h \ldots\ldots (1).$$

Così, quando $\cos h = \operatorname{sen} h$, il che ha luogo quando il sole è elevato di 45° sopra l'orizzonte, l'ombra diritta del corpo è eguale al corpo stesso; è più grande finchè $\cos h$ è maggiore di $\operatorname{sen} h$, vale a dire da 0° ove è infinita fino a 45°, ed è più piccola finchè $\cos h$ è minore di $\operatorname{sen} h$, vale a dire da 45° fino alla massima altezza del sole al di sopra dell'orizzonte, altezza che varia secondo le stagioni e secondo la posizione dei luoghi.

Se si trattasse di dover calcolare la lunghezza dell'ombra diritta, essendo data quella del corpo e viceversa, si farebbe uso delle espressioni

$$AC = \frac{AB \cos h}{\operatorname{sen} h} = \frac{AB}{\operatorname{tang} h},$$

$$AB = \frac{AC \operatorname{sen} h}{\cos h} = AC \operatorname{tang} h,$$

le quali si deducono dalla proporzione (1).

Gli antichi geometri si servivano dell'ombra diritta per misurare l'altezza dei corpi, e del rapporto di quest'ombra coll'altezza nota del corpo per trovare l'altezza del sole; ma questo metodo è soggetto a molte difficoltà a motivo della *penombra* di cui parleremo in seguito.

6. Se MN (*Tav.* IX, *fig.* 7) è un piano verticale, l'ombra AC projettata su questo piano da un corpo AB sarà *l'ombra rovesciata* di questo corpo. Conducendo le linee rette che sono indicate nella figura, si vede che l'estremità C dell'ombra è determinata dal raggio luminoso BC che rade l'estremità B del corpo, e che si ha l'*angolo* ACB = *complemento dell'angolo* BCD = *complemento di* h. Ora, nel triangolo rettangolo ABC, si trova

$$AC : AB :: \operatorname{sen} ABC : \operatorname{sen} ACB :: \operatorname{sen} h : \cos h;$$

dunque l'ombra rovesciata è soggetta per la sua lunghezza a leggi inverse a quelle dell'ombra diritta.

Una volta si faceva uso dell'*ombra rovesciata* per misurare le altezze, quando l'*ombra diritta* era troppo lunga.

7. Se il corpo luminoso non fosse che un punto, e se nello spazio non vi fosse nulla che riflettesse la luce, l'ombra projettata da un corpo opaco sopra una superficie posta dietro ad esso sarebbe perfettamente nera, perchè nessun raggio potrebbe giungervi nè direttamente nè indirettamente. Quest'ombra sarebbe dunque di un nero assoluto, perfettamente eguale in tutta la sua estensione, e terminerebbe a secco al suo contorno che sarebbe una linea perfettamente netta e distinta. Ma ciò non può mai accadere perchè qualunque corpo luminoso ha dimensioni finite, e il contorno dell'ombra invece di terminare a un tratto presenta una gradazione insensibile tra il nero e il chiaro.

Per render ragione di questo fenomeno, consideriamo un corpo sferico AB (*Tav.* IX, *fig.* 4) illuminato da un punto luminoso che supporremo ad una distanza infinita da questo corpo, perchè i raggi si possano supporre paralleli; i raggi MA ed MB che radono la superficie del corpo determinano il limite

dell' ombra, che essendo projettata sopra una superficie EF avrà il suo contorno perfettamente netto e distinto. Ma qualunque altro punto di uno stesso oggetto luminoso projetterà egualmente dei raggi paralleli NA ed NB (*Tav.* IX, *fig.* 5) che saranno i limiti di un' altra ombra ABN′N′ di cui una parte BN′M′ riceverà i raggi paralleli del primo punto luminoso, mentre la parte AM′N′ della prima ombra riceverà alla sua volta i raggi paralleli del secondo punto luminoso. L' ombra totale ABN′M′ sarà dunque composta di una parte totalmente nera ABM′N′ e di una altra parte che la circonda, e la cui oscurità andrà decrescendo da AN′ e BM′ fino ad AM′ e BN′. Quest' ombra totale projettata sopra un piano EI non avrà dunque il suo contorno terminato in un modo netto e distinto.

Quest' ombra incompleta che accompagna e circonda tutte le ombre dicesi *penombra*, che significa *quasi ombra*.

8. Per trovare l' ombra di un corpo, bisogna dunque immaginare che ogni punto dell' oggetto luminoso è il vertice di una specie di piramide o di un cono di raggi che vengono a radere il corpo in modo da produrre tante piramidi quanti sono i punti del corpo luminoso. L' ombra perfetta sarà continua nello spazio comune a tutte queste piramidi, poichè è evidente che questo spazio non riceverà alcun raggio luminoso. Tutte le altre parti dello spazio, che non riceveranno raggi da alcuni punti, ma che ne riceveranno da alcuni altri, saranno nella penombra; e questa penombra sarà più o meno densa in diversi luoghi, secondochè in questi luoghi cadranno i raggi di un numero maggiore o minore di punti del corpo luminoso.

9. Questa incertezza prodotta dalla penombra nei limiti dell' ombra ha fatto immaginare di porre all' estremità degli stili degli orologi solari e degli gnomoni delle lastre nelle quali si fa un piccolo foro tondo. Questo foro projetta un piccolo spazio luminoso il cui cammino indica quello del sole in un modo più preciso di quello che possa fare il cammino dell' ombra. Per l' applicazione della teoria delle ombre alla prospettiva si consulti il *Trattato di prospettiva* di Priestley, quello di *Ottica* di Lacaille, la *Geometria descrittiva* di Monge, e la *Scienza delle ombre* di Dupain.

OMODROMO. Termine antiquato di *Meccanica*. La leva *omodroma* è quella nella quale la potenza e la resistenza sono tutte due dalla stessa parte del punto di appoggio. *Vedi* Leva.

Si considerano due sorti di *leve omodrome*: l' una, che presentemente si chiama *leva della seconda specie*, ha la resistenza tra l' appoggio e la potenza; l' altra che si chiama *leva della terza specie*, ha la potenza tra l' appoggio e la resistenza.

OMOGENEITA' (*Geom.*) *Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria.

OMOGENEO (*Alg.*). Si chiamano *quantità omogenee*, quelle che hanno il medesimo numero di dimensioni. Per esempio, x^3, x^2y, xyz sono quantità omogenee perchè ciascuna ha tre dimensioni. (*Vedi* Dimensione.). Un' equazione vien detta *omogenea* quando le variabili hanno lo stesso numero di dimensioni in tutti i termini.

OMOLOGO. (*Geom.*) (da ὅμος *simile* e da λόγος *ragione*). Nome che si dà ai lati opposti ad angoli uguali nelle figure simili. *Vedi* Similitudine.

ONDA. *Vedi* Ondulazione.

ONDECAGONO. (*Geom.*). Figura che ha undici lati e undici angoli. *Vedi* Poligono).

ONDULAZIONE o ONDA. Moto oscillatorio o di vibrazione che si osserva in un liquido e in forza del quale questo liquido si abbassa e si alza alternativamente come i flutti del mare: a un tal moto appunto Newton ha dato il nome di *onda*.

Se quando il liquido è unito ed in riposo si viene ad operare una pressione sopra una parte della sua superficie, il moto di *ondulazione* si moltiplica in circoli concentrici al punto toccato: ciò si può osservare gettando una pietra sulla superficie di un' acqua tranquilla. La causa di queste ondulazioni circolari nasce dalla depressione che toccando una parte del liquido si produce nel punto del contatto. In forza di questa depressione, le parti circonvicine sono spinte successivamente fuori dei loro piani e salgono e ricadono alternativamente finchè non sia ristabilito di nuovo l' equilibrio.

Si fa uso ancora della parola *ondulazione* per indicare il moto che si opera nell' aria allorchè si produce un suono (*Vedi* Acustica); donde è derivata l' espressione di *onda sonora*. La propagazione della luce è spiegata oggi dalla maggior parte dei fisici supponendo delle *ondulazioni* e delle *onde luminose*, simili alle *ondulazioni* e alle *onde sonore*. Questo sistema è dovuto ad Huygens che ne ha esposto i fondamenti nel suo *Trattato della luce* pubblicato nel 1690.

Le leggi del moto delle onde nei liquidi sono state date da Newton alla fine del secondo libro dei suoi *Principj*. Prima di questo uomo sommo nessun geometra erasi occupato di questa teoria, che in seguito è divenuta l' oggetto di molti pregevoli lavori.

ONS-EN-BRAY (Luigi Leone Pajot Conte di), celebre meccanico francese, nato a Parigi nel 1678 e morto nella stessa città il 22 Febbrajo 1753. Oltre la *Descrizione* di un numero grande di macchine ingegnosissime da lui inventate, si legge di lui nella Raccolta dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1750 una memoria che ha per titolo: *Metodo facile per costruire quanti mai si vogliono quadrati magici.*

OPPOSIZIONE (*Astron.*). Aspetto o situazione di due astri distanti l' uno dall' altro della metà di un circolo della sfera celeste. *Vedi* Aspetto.

OPPOSTI. (*Geom.*). Si chiamano *angoli opposti* al vertice, quelli che sono formati da due stesse rette, le quali si tagliano e le quali sono situate in modo inverso. (*Vedi* Angolo).

Due *coni* opposti sono due coni simili i quali hanno i loro vertici al medesimo punto e i cui assi formano una sola linea retta.

Le *iperbole opposte* sono le *sezioni opposte* fatte da uno stesso piano sopra due *coni opposti*.

ORA. Parte aliquota del giorno naturale, del quale è comunemente un ventiquattresimo. L'origine della parola *ora*, ossia ὥρα, viene secondo varj autori dal nome di *Horus* che gli Egiziani davano al sole, il padre delle ore. Altri la fanno derivare dalla voce greca ὁρίζειν, *terminare*. Un' *ora* presso di noi è la ventiquattresima parte del giorno naturale, cioè della durata della rotazione diurna della terra. Vien divisa in 60 minuti, il minuto in 60 secondi, ec. La divisione del giorno in ore è antichissima, ma non tutti i popoli hanno adottato la stessa divisione.

Gli Ebrei ed i Romani, avanti la prima guerra punica, non conoscevano la divisione in 24 ore eguali: essi dividevano il giorno artificiale, preso dalla levata fino al tramontare del sole, in quattro parti principali dette: *prima*, *terza*, *sesta* e *nona*, composte ognuna di tre ore. *Prima* cominciava al levare del sole, *terza* cominciava tre ore dopo, *sesta* a mezzogiorno e *nona* tre ore prima del tramonto del sole. Le ore erano più o meno lunghe nelle diverse stagioni dell' anno, secondo il tempo più o meno lungo della presenza del sole al di sopra dell' orizzonte: le ore che trovansi anco oggigiorno indicate nei breviarj sono appunto le ore ineguali degli Ebrei e dei Romani. Anco la notte si divideva in quattro parti principali di tre ore ognuna.

I Greci cominciavano a contare le loro ore (che erano un ventiquattresimo

del giorno) dal tramonto del sole. Questo sistema è stato adottato da parecchi popoli. Oggi in generale il giorno civile comincia a mezzanotte, vale a dire nel momento del passaggio del sole pel meridiano inferiore.

Gli astronomi distinguono tre specie di ore, le *ore siderali*, le *ore solari medie*, e le *ore solari vere*. Le prime si riferiscono al giorno siderale, che è la durata di una rivoluzione completa della sfera celeste; le seconde al giorno solare medio, e le ultime al giorno solare vero (*Vedi* Equazione del tempo). Ognuna di queste ore è il ventiquattresimo del giorno del quale fa parte.

Le ore siderali, egualmente che le ore solari medie, sono respettivamente eguali tra loro ed uniformi; ma le ore solari vere non sono eguali che in un medesimo giorno, e variano di grandezza da un giorno ad un altro.

Per confrontare tra loro le durate di queste diverse ore, prenderemo l'ora siderale per termine di confronto. Quest'ora per ciò che abbiamo detto è la ventiquattresima parte della durata del tempo scorso tra due passaggi successivi di una stella qualunque pel meridiano; ora, le stelle che sono fisse, almeno sensibilmente, e che sono trasportate da oriente in occidente con un moto comune, ritornano sempre al meridiano ad intervalli eguali, dopo un'intera rivoluzione di 360°, mentre il sole, che ha un moto proprio da occidente in oriente, non ritorna ogni giorno al meridiano che dopo aver percorso un circolo intero più l'arco che ha descritto in senso inverso durante questa rivoluzione; così, in 24 ore siderali, il moto di una stella da oriente in occidente è di 360° e quello del sole di 360°—A, indicando con A l'arco retrogrado descritto dal sole nel tempo di queste 24 ore.

Se con T s'indica il tempo siderale che deve scorrere tra due ritorni successivi del sole al meridiano, si avrà

$$360^\circ - A : 360^\circ :: 24^{or} : T;$$

e questa proporzione darà pel valore di T, ossia per la durata del giorno solare espressa in ore siderali,

$$T = 24\left(\frac{360^\circ}{360^\circ - A}\right).$$

Ma il moto proprio *medio* del sole essendo di 58′ 58″,642 in 24 ore siderali, si avrà $A = 58' \, 58'',642$, e per conseguenza

$$T = 24\left(\frac{360^\circ}{359^\circ \, 1' \, 1'',358}\right) = 24^{or} \; 3' \; 56'',554,$$

la cui ventiquattresima parte, $1^{or} \; 0' \; 9'',827$, è il valore dell'ora solare media in tempo siderale.

Se si vuol prendere l'ora solare media per termine di confronto, si avrà pel valore dell'ora siderale espressa in tempo solare medio

$$\frac{1}{1^{or} \; 0' \; 9'',827} = 0^{or} \; 59' \; 50'',17,$$

donde si ha per la durata del giorno siderale espressa in tempo solare medio $23^{or} \; 56' \; 4'',0907$.

Questi rapporti servono per passare dall'ora solare media all'ora siderale e viceversa; riduzioni di un uso continuo nella pratica dell'astronomia. Quanto all'ora solare vera, la sua grandezza essendo variabile, i suoi rapporti coll'ora siderale sono anch'essi variabili.

ORARIO (*Astron.*). Si dà quest' epiteto a tutto ciò che si riferisce alle ore: così si dicono:

Circoli orarj, o circoli di declinazione, i circoli massimi che passano pei poli della sfera e che, colle loro distanze dal meridiano, segnano le ore. Così, quando il sole è in un circolo orario distante dal meridiano di 15°, è un' ora o 11 ore, secondochè questa distanza è occidentale o orientale.

Angolo orario, l' angolo al polo formato dal circolo orario e dal meridiano del luogo.

Moto orario, lo spazio percorso in un' ora di tempo da un astro, ossia la variazione che provano in un' ora la sua longitudine e la sua latitudine.

Linee orarie, le linee che segnano le ore in un orologio solare. *Vedi* Gnomonica.

ORBITA (*Astron.*). Linea curva che un pianeta descrive nello spazio in forza del suo moto proprio. Dopo la scoperta di Kepplero è noto che le orbite dei pianeti sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi. *Vedi* Pianeti.

Orbita delle comete. *Vedi* Cometa.

ORDINATA. (*Geom.*). Retta che serve a determinare la posizione di un punto. (*Vedi* Ascissa *e* Applicazione dell' Algebra alla Geometria.)

ORDINE. Nella *geometria*, si distinguono diversi *ordini* di linee corrispondenti ai gradi dell' equazioni che gli rappresentano. Le linee rette, la cui equazione non si eleva che al primo grado, compongono il *primo' ordine*; le sezioni coniche, il *second' ordine*; e le altre curve si dicono *linee dell' terz' ordine*, del *quart' ordine*, ec. secondo che le loro equazioni sono del terzo grado, del quarto grado, ec. Si chiamano *curve del prim' ordine* le linee del second' ordine, perchè esse formano infatti il prim' ordine delle linee curve; in questo senso una curva di un ordine qualunque n è una linea dell' ordine $n+1$. (*Vedi* Curva.)

Nell' *algebra*, le quantità infinitesimali si classano per *ordine*; così, si dice una *differenziale* del prim' *ordine*, del second' *ordine*, ec. una quantità *infinitamente grande* del prim' *ordine*, del second' *ordine*, ec. un' *equazione differenziale* del prim' *ordine*, del second' *ordine*, ec. (*Vedi* Differenziale e Infinito.)

ORDINE (*Arch.*). Rapporto delle diverse parti che compongono una colonna e il suo architrave.

Gli antichi si sono serviti di cinque ordini di architettura, che diconsi: *Toscano*, *Dorico*, *Jonio*, *Corintio* e *Composito*. Si veda l' articolo Architettura e la Tavola **XXX**, nella quale sono rappresentati questi cinque ordini colle loro proporzioni.

ORGANICO. (*Geom.*) La descrizione *organica* delle curve è il metodo di tracciarle sopra un piano, mediante un movimento continuo e con l' aiuto d' istrumenti particolari. Di tutti gl' istrumenti impiegati per descrivere delle curve, il più semplice è il *compasso*, il quale serve per le circonferenze del circolo; ed esso è il solo ammesso nella geometria elementare. Abbiamo indicato diversi istrumenti e diversi metodi inventati per la descrizione di certe curve alle parole *compasso*, *concoide*, *ellisse*, *iperbola e parabola*, ec. Esiste sopra questo soggetto un' Opera del Maclaurin, intitolata *Geometria organica*. (*Vedi* ancora l' *Arithmétique universelle* del Newton, e le *Sections coniques* del marchese dell' Hôpital).

ORGANO. Nella *meccanica pratica* o *applicata*, si chiamano *organi meccanici* le parti costituenti di una macchina.

ORIENTALE. Si appropria questo aggettivo a tutto ciò che ha rapporto coll' oriente, o a qualunque cosa situata dalla parte dell' oriente.

ORIENTE (*Astron.*). È uno dei punti *cardinali*, e significa la stessa cosa che *levante*. *Vedi* Armillare.

Il punto vero di *oriente* è quello nel quale il sole si leva il giorno dell'equinozio, vale a dire quando si trova sull'equatore entrando nei segni dell' Ariete o della Libbra.

L' *oriente d' estate* e l' *oriente d' inverno* sono i punti in cui il sole si leva il giorno del solstizio d' estate e il giorno del solstizio d'inverno. Essi corrispondono al giorno più lungo e al giorno più corto dell' anno.

ORIGINE (*Geom.*). Punto dell' asse di una curva dal quale si cominciano a contare le *coordinate*. (*Vedi* QUESTA PAROLA.)

ORIONE (*Astron.*). Una delle più grandi e più brillanti costellazioni. Quella che serve di punto di partenza per riconoscere quasi tutte le altre. *Vedi* COSTELLAZIONE.

Essa è composta principalmente di sette stelle, delle quali quattro formano un quadrato e le altre tre sono poste nel mezzo in linea retta. Queste ultime diconsi la *Cintura* o il *Budriere di Orione*: si chiamano ancora i *Tre Re*, il *Bastone di Giacobbe*, o il *Rastrello*. La costellazione d' Orione comprende 78 stelle nel Catalogo britannico.

ORIZZONTALE (*Astron*). Si dà questo nome a tutto ciò che è a livello coll'orizzonte, o che si riferisce all' orizzonte.

Orologio solare orizzontale dicesi quell' orologio solare che è disegnato sopra un piano parallelo all' orizzonte. *Vedi* GNOMONICA.

Piano orizzontale. È un piano parallelo all' orizzonte.

Linea orizzontale. Si dà in prospettiva questo nome alla linea retta tirata dal punto di vista parallelamente all' orizzonte, e che in sostanza altro non è che l'intersezione del piano del quadro col piano orizzontale.

Parallasse orizzontale. *Vedi* PARALLASSE.

Refrazione orizzontale. *Vedi* REFRAZIONE.

ORIZZONTE (*Astron.*). Si dà questo nome, che viene dalla voce greca ὁρίζω *io termino*, al circolo massimo della sfera celeste che separa la sua parte visibile della sua parte invisibile.

Quando da un punto qualunque della superficie della terra si esamina il cielo, esso ci comparisce come una volta o come una callotta sferica, appoggiata sopra un piano che è la terra. L' intersezione della volta e del piano apparisce all' osservatore come un circolo di cui egli occupa il centro; ed è appunto questo circolo, che separa la parte superiore e visibile del cielo dalla sua parte inferiore ed invisibile, quello cui in generale si è dato il nome di *orizzonte*.

Si distingue l' orizzonte in *orizzonte razionale* e in *orizzonte sensibile*. L'*orizzonte razionale* o *astronomico* è un circolo massimo della sfera il cui piano passa pel centro della terra, e che ha per poli lo zenit e il nadir. Esso divide la sfera in due parti eguali. L' *orizzonte sensibile* o *apparente* è un piano che si suppone toccare la superficie della terra, e che s' immagina parallelo all' orizzonte razionale. Quest' orizzonte divide la sfera celeste in due parti diseguali, ma il raggio della terra non essendo che un punto rapporto alla distanza immensa della terra dalle stelle fisse, ogni volta che si tratta di questi astri si può a tutto rigore supporre che l' orizzonte sensibile si confonda coll' orizzonte razionale. Così, per l' osservatore posto nel punto D (*Tav.* CLXXVII, *fig.* 5) alla superficie della terra, e il cui orizzonte razionale è nella direzione della retta AB, mentre il suo orizzonte sensibile è nella direzione della retta A'B', i punti A e A' della sfera celeste non saranno che un solo e medesimo punto, perchè l' arco AA', ossia il raggio DT che lo determina, non ha nessuna grandezza da stare in confronto col raggio AT della sfera celeste. La stella fissa osservata in A' nell' orizzonte sensibile sarà dunque realmente in A nell' orizzonte razionale. Nulladimeno siccome ciò non ha luogo per la luna e pei pianeti le distanze dei quali

dalla terra non sono infinite in confronto del raggio terrestre, la distinzione de' due orizzonti è necessarie.

Havvi ancora un' altra specie di orizzonte che dicesi in geografia *visibile*, e che eltro non è ehe l' estensione della terra o del mare ehe può scorgersi osservando intorno a sè finchè può stendersi lo sguardo. La grandezza di quest'orizzonte visibile non è sempre la stessa, poichè è evidente ehe quanto più l' occhio è elevato tanto più grande sarà l' orizzonte. Un osservatore posto sulla sommità di un' alta montagna scopre necessariamente una estensione più grande di quella che vedrebbe se si trovasse al piede della montagna; ed in mare, per esempio, la veletta scorge dall' alto dell' albero maestro un punto B' della terra prima che questo punto possa esser visibile per quelli che sono sul ponte del vascello (*Tav*. LV , *fig*. 4).

Quando si conosce l' altezza dell' occhio al di sopra dalle superficie della terra, superficie ehe si prende sempre al livello di quella del mare, si può determinare facilmente il diametro dell' orizzonte visibile, perchè supponendo(*Tav*. CLXXVII, *fig*. 5) ehe ED sia quest'altezza, la retta EF, tangente alla terra, indica il raggio visuale ehe termina da una parte l'orizzonte visibile, il quale ha per semidiametro l'arco FD ehe può considerarsi come une linee retta, perchè è sempre piccolissimo rispetto alla circonferenza delle terra: ora, nel triangolo TFE, rettangolo in F, si ha

$$1 : \text{sen FET} :: \text{TE} : \text{TF} :$$

così, essendo TF il raggio noto delle terra, TE questo raggio accresciuto dell' altezza deta DE, si calcolerà la grandezza dell' angolo FET, donde si concluderà quella del suo complemento FTE. Ma l' engolo FTE ha per misura l'arco FD, dunque si conoscerà in questa guisa il numero dei gradi di quest' arco, ognuno dei quali equivale e circa 111118 metri, ossiano 57012 tese. Le grandezza del raggio medio della terra di eui bisogna fare uso in questo ealcolo per ottenere un' approssimazione sufficiente è di 6366745 metri.

In alto mare, ove si osservano le altezze degli astri rapporto all' orizzonte visibile, eioè rapporto ella tangente EF, queste altezze sono sempre troppo grandi, e si vede facilmente dietro la semplice ispezione della figura che debbonsi diminuire dell' arco AA'', ossia dell' engolo FTE, per evere le vere altezze al di sopra dell' orizzonte razionale. Tutti i trattati di navigazione contengono delle tavole ehe danno ciò che bisogna togliere dall' altezza osserveta, secondo la diversa elevazione dell' occhio al di sopra del livello del mare.

L' orizzonte, sie razionale, sia sensibile, si divide in due metà, une delle quali si dice *orizzonte orientale*, e l' eltra *orizzonte occidentale*, perchè il primo rimane verso l' oriente, e l' altro verso l' occidente. Questi due orizzonti sono separati l' uno dall' eltro dal meridiano. *Vedi* Armillare.

OROCCIO. *Vedi* Horrox.

OROGRAFIA (*Astron*.). Dicesi così l' arte di costruire gli orologi solari. Si ebiama pure *Orologiografia*, e più comunemente *Gnomonica*.

OROLOGIO (*Mecc*). Nome col quale s' indica in generale qualunque macchina destinata a misurare il tempo.

ORONZIO FINEO. *Vedi* Fineo.

OROTTERE (*Ottic*.). Nome che si dà alle linea rette condotta dal punto in cui concorrono i due assi ottici, e ehe è perallela e quella ehe unisce i centri dei due occhi o delle due pupille.

ORRERY (*Astron*.). Strumento ehe rappresenta il movimento degli astri. Questo nome gli è stato dato perchè in origine fu costruito pel conte d' Orrery. *Vedi* Planetario.

ORSA (*Astron.*). La *Grand' Orsa* o *Orsa maggiore* è la più notabile tra le costellazioni boreali e la più antica che sia stata formata dagli astronomi (*Tav.* LIX, *fig.* 1). Vien detta ancora il *Gran carro*.

Vi si distinguono principalmente sette stelle, quattro delle quali formano un quadrato, e le altre tre una specie di coda: è questa forma che le ha fatto dare il nome di *Carro*. Prendendo la direzione delle due stelle della estremità del quadrato opposta alla coda, si scopre salendo verso il polo la stella polare che appartiene ad un' altra costellazione affatto simile all' Orsa maggiore, ma più piccola e posta in una situazione inversa. Quest' ultima dicesi l' *Orsa minore*, e la stella polare è all' estremità della sua coda.

ORTIVA (*Astron.*). Epiteto che si dà all' *amplitudine orientale* di un astro. *Vedi* Amplitudine.

ORTOGONALE (*Geom.*) Si dà questo nome a tutto ciò che è ad angoli retti, ed è la stessa cosa che *rettangolare*. Per esempio, le coordinate di un punto sono *ortogonali* o *rettangolari* quando le ascisse e le ordinate sono perpendicolari l' una sull' altra.

ORTOGRAFIA (*Geom.*). (da ὀρθός, retto e da γράφω, *descrivo*). Rappresentazione della faccia di un oggetto, come quella di un edifizio, mediante il rapporto geometrico di tutte le sue parti, vale a dire, dando loro, nel disegno, delle altezze e delle larghezze proporzionali a quelle che esse hanno in realtà. (*Vedi* Piano.)

Nell' *astrnomia*, si chiama, *Projezione ortografico* della sfera, la rappresentazione sopra un piano di differenti punti della superficie della sfera, fatta supponendo l' occhio ad una distanza infinita e in una linea perpendicolare al piano. Con questo metodo, ciascun punto della sfera si projetta sul piano mediante una linea che è perpendicolore ad esso. (*Vedi* Projezione.)

OSCILLAZIONE. (*Mec.*). Moto di un corpo pesante sospeso mediante un filo, o mediante una verga ad un punto fisso intorno del quale esso descrive un arco o eseguisce delle vibrazioni.

L' *osse di oscillazione* è la retta, paralleta all' orizzonte, la quale passa pel punto di sospensione. (*Vedi* Centro d' oscillazione.)

OSCULATORE. (*Geom.*). Si chiama *raggio osculotore* di una curva, il raggio dell' *evoluta* di questa curva, e *circolo osculatore*, il circolo descritto con questo raggio. (*Vedi* Curvatura, Evoluta e Raggio.)

Si giudica della curvatura di una linea qualunque, in un punto dato, dall'arco del circolo, il quale, avendo due elementi comuni intorno di questo punto, presenta la medesima curvatura della linea. il raggio del circolo si chiama *raggio di curvaturo*, e il circolo esso stesso *circolo osculotore*. In generale due linee si dicono *osculatrici* l' una dell' altra, quando esse hanno il medesimo raggio di curvatura al loro punto di contatto. (*Vedi* Curvatura.)

La curvatura della superficie non può paragonarsi a quella della sfera, poichè quest' ultima è uniforme del tutto intorno di una stessa normale, il che non ha ordinariamente luogo per una superficie generale. E non è che immaginando diversi piani, i quali passino tutti per la normale delle superficie al punto dato, che possiamo calcolare i raggi di curvatura delle sezioni di questi piani e giudicare della curvatura della superficie intorno del punto, mediante il paragone delle curvature delle sezioni. (*Vedi* Sezione.)

Due superficie si dicono osculatrici l' una dell' altra in un punto in cui la normale è comune, quando tutte le sezioni normali sono respettivamente osculatrici.

Possiamo paragonare la curvatura di una superficie qualunque, in ciascuno dei suoi punti, a quella di un' ellissoide in uno dei suoi vertici. (*Vedi* Raggio di Curvatura); l' ellissoide si dice allora *osculatrice*.

OSCULAZIONE o ABBASSAMENTO. Termine mediante il quale s' indica, nella teoria dell' evolute, il contatto di una curva col circolo descritto sul raggio della sua evolota; il contatto si chiama *punto di osculazione*.

Si chiama ancora *punto di osculazione* il punto di contatto di due rami di una curva, i quali si toccaoo senza tagliarsi. (*Vedi* Punto.)

OSSERVATORIO. Luogo che è destinato alle osservaziooi astronomiche, e che contiene gli strumenti necessarj a tal genere di osservazioni.

Il primo osservatorio che sia stato eretto in Europa è quello che Guglielmo IV langravio di Assia-Cassel fece costruire nel 1561. Abbiamo detto altrove che Ticone Brahé ne avea fatto fabbricare uno a sue spese nella piccola isola di Huène verso il 1582. L' esempio dato dal principe e dall' astronomo fu ben presto seguito generalmente, e tutte le nazioui civilizzate fecero a gara a innalzare degli osservatorj. Quello di Parigi fu cominciato nel 1664, per ordine di Luigi XIV, e terminato nel 1672. Vi si osserva una specie di pozzo che va dall'alto della piattaforma fino al fondo dei sotterranei, e di cui si è fatto uso per alcune esperienze sulla caduta dei gravi.

L' osservatorio di Greenwich, vicioo a Londra, divenuto sì celebre per le numerose osservazioni che vi furono fatte da Flamsteed, non rimonta che al 1676.

Ecco, secondo i calcoli i più recenti, le posizioni dei principali osservatorj attualmente esistenti riferite al meridiano di quello di Parigi. Questa tavola è particolarmente utile per ridurre le longitudini contate da questi osservatorj alle longitudini contate da Parigi, le sole di cui si faccia uso nelle opere francesi.

POSIZIONI GEOGRAFICHE DEI PRINCIPALI OSSERVATORJ

RIFERITE AL MERIDIANO DELL' OSSERVATORIO DI PARIGI.

NOMI DELLE CITTA'	LATITUDINI	LONGITUDINI in gradi	LONGITUDINI in tempo
Aberdeen (*Scozia*)	57° 8′ 58″ N	4° 26′ 6″ O	0or 17′ 44″
Abo (*Russia*)	60 26 58 N	19 56 45 E	1 19 47
Altona (*Germania*)	53 32 45 N	7 36 18 E	0 30 25
Armagh (*Inghilterra*)	54 21 13 N	8 58 35 O	0 35 54
Berlino (*Germania*)	52 31 13 N	11 3 30 E	0 44 14
Brema (*id.*)	53 4 36 N	6 28 30 E	0 25 54
Buda (*Ungheria*)	47 29 12 N	16 42 52 E	1 6 51
Bushey Heath (*Inghilterra*)	51 37 44 N	2 40 36 O	0 10 42
Cambridge (*id.*)	52 12 51 N	2 14 31 O	0 8 58
Capo di Buona Speranza	33 56 3 S	16 3 12 E	1 4 13
Christiania (*Norvegia*)	59 54 5 N	8 24 31 E	0 33 38
Copenhagen (*Danimarca*)	55 40 53 N	10 14 20 E	0 40 57
Cracovia (*Galizia*)	50 3 50 N	17 37 45 E	1 10 31
Dorpat (*Russia*)	58 22 47 N	24 23 13 E	1 37 33
Dublino (*Irlanda*)	53 23 14 N	8 41 52 O	0 34 47
Edimburgo (*Scozia*)	55 57 20 N	5 3 15 O	0 22 1
Firenze (*Italia*)	43 45 41 N	8 55 0 E	0 35 40
Ginevra (*Svizzera*)	46 12 0 N	3 48 41 E	0 15 15
Gotha (*Germania*)	50 56 5 N	8 23 43 E	0 33 35

Gottinga (*Germania*)	51°	31′	48″	N	7°	36′	30″	E	0ʰ	30′	26″
Greenwich (*Inghilterra*)	51	28	39	N	2	20	24	O	0	9	22
Kensington (*id.*)	51	30	13	N	2	32	4	O	0	10	8
Konigsberg (*Germania*)	54	42	50	N	18	9	42	E	1	12	39
Madras (*Indie*)	13	4	9	N	77	56	57	E	5	11	48
Manheim (*Germania*)	49	29	14	N	6	7	30	E	0	24	30
Marsiglia (*Francia*)	43	17	50	N	3	1	54	E	0	12	8
Milano (*Italia*)	45	28	1	N	6	50	56	E	0	27	24
Modena (*id.*)	44	38	53	N	8	35	18	E	0	34	21
Monaco (*Germania*)	48	8	45	N	9	16	18	E	0	37	5
Napoli (*Italia*)	40	51	55	N	11	55	30	E	0	47	42
Nikolajew (*Russia*)	46	58	21	N	29	38	24	E	1	58	34
Oxford (*Inghilterra*)	51	45	39	N	3	35	46	O	0	14	23
Padova (*Italia*)	45	24	3	N	9	31	44	E	0	38	7
Palermo (*id.*)	38	6	44	N	11	1	0	E	0	44	4
Parigi (*Francia*)	48	50	13	N	0	0	0		0	0	0
Pietroburgo (*Russia*)	59	26	31	N	27	58	34	E	1	51	54
Portsmouth (*Inghilterra*)	50	48	3	N	3	26	16	O	0	13	45
Praga (*Germania*)	50	5	19	N	12	5	0	E	0	48	20
Roma (*Italia*)	41	53	54	N	10	8	18	E	0	40	33
Sant' Elena	15	55	26	S	8	3	0	O	0	32	12
Torino (*Italia*)	45	4	8	N	5	21	12	E	0	21	25
Verona (*id.*)	45	26	8	N	8	38	50	E	0	34	35
Vienna (*Germania*)	48	12	36	N	14	2	36	E	0	56	10
Viviers (*Osser. di Flaugergues*) . .	44	29	11	N	2	20	50	E	0	9	23
Wilna (*Russia*)	54	41	0	N	22	57	36	E	1	31	50

OSSERVAZIONE. In astronomia si dà questo nome alle misure, prese con gli strumenti convenienti, delle distanze angolari degli astri, della loro altezze meridiane, dei loro movimenti, ec.

OSTACOLO (*Mecc.*). Si dà questo nome a tutto ciò che resiste ad una potenza che lo preme. Così un corpo in quiete, che è incontrato da un corpo in moto, e che distrugge o almeno modifica questo moto, è un *ostacolo*. L'attrito dei pezzi dei quali si compongono le macchine è un *ostacolo* per la forza che le mette in moto. *Vedi* Urto.

OTTAEDRO. (*Geom.*). Uno dei solidi regolari. Esso è terminato da otto triangoli equilateri uguali. (*Vedi* Poliedro e Solidi.)

OTTAGONO. (*Geom.*). Poligono composto di otto lati e di otto angoli. (*Vedi* Figura e Poligono.)

Un *ottagono regolare* è quello in cui tutti gli angoli e tutti i lati sono respettivamente uguali. Si descrive facilmente questa figura dividendo un circolo in otto archi uguali, poichè le otto corde di questi archi formano gli otto lati dell' *ottagono regolare*.

Il lato dell' ottagono regolare inscritto in un circolo è perciò la corda dell' arco di 45°: così conducendo dei raggi ai vertici della figura, l' angolo al centro è un angolo di 45°. Gli otto angoli ai vertici valendo insieme

$$180^\circ \times \left[8 - 2\right] = 1080^\circ;$$

ciascuno di essi è di 135°.

Se si prende il raggio del circolo per unità, il valore del lato sarà espresso da

$$\sqrt{\left[2-\sqrt{2}\right]}=c,$$

e indicando questo lato, per qualunque altro raggio r, si avrebbe similmente

$$\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\right].r=c.$$

La superficie è data dall' espressione

$$2\left[1+\sqrt{2}\right].c^2=S,$$

S indicando questa superficie.

Per costruire un ottagono regolare, sopra una linea data, possiamo impiegare il seguente processo: all' estremità A e B (*Tav.* XXVIII, *fig.* 8) di questa linea, si elevino le perpendicolari indefinite AF, BE; si dividano gli angoli retti *m*AF, *n*BE in due parti uguali per mezzo delle rette AH e BC, e si prenda AH e BC uguali l' una e l' altra ad AB. Si conducano HG e DC parallele ad AF e BE, e ciascuna uguale ad AB. Finalmente dai punti G e D con un raggio uguale ad AB si descrivano degli archi di circolo che taglino AF e BE in F ed in E. Si uniscano i punti G ed F, F ed E, E e D; l' ottagono sarà costruito.

OTTANTE (*Astron.*). Si chiama così in astronomia uno strumento che serve ad osservare in mare le altezze e le distanze degli astri. *Vedi* Quarto di Riflessione.

Ottante. Nome di una costellazione formata da La Caille nell' emisfero australe (*Vedi* Costellazione). Essa vien rappresentata sulle carte con un *Ottante* o *Quarto di Riflessione*. *Vedi* Quarto di riflessione.

OTTAVA (*Acust.*). Consonanze di due suoni, uno dei quali fa il doppio di vibrazioni dell' altro nel medesimo tempo. *Vedi* Armonico.

OTTICA. Parte delle matematiche applicate che ha per oggetto la *visione*, in quanto che questa resulta dalla *propagazione della luce*.

L' *ottica generale* comprende l' *ottica* propriamente detta, la *catottrica*, la *diottrica*, e la *prospettiva*. *Vedi* Matematiche applicate.

Le prime tracce delle cognizioni teoriche concernenti i diversi rami dell' ottica si rinvengono nella scuola di Platone. Tali cognizioni però limitavansi alla propagazione della luce in linea retta e alla proprietà che essa ha di riflettersi facendo un angolo di riflessione eguale a quello d' incidenza. Nulladimeno molto tempo prima si sapevano costruire degli specchi metallici, ed anco al tempo di Socrate l' uso degli specchi ardenti era abbastanza comune perchè Aristofane vi facesse allusione in una delle scene della sua commedia le *Nuvole*.

Si crede che Empedocle sia stato il primo che abbia scritto sistematicamente sulla luce, ma l' opera più antica che si conosca è un trattato in due libri attribuito ad Euclide; il primo libro tratta dell' ottica propriamente detta, e il secondo della catottrica. Quanto alla diottrica era essa in quel tempo affatto ignota. Quest' opera è tanto piena di errori che si è posto in dubbio se sia realmente di Euclide, quantunque sia certo che quest' abile matematico ha scritto sull' ottica. Montucla ha dimostrato ad evidenza che ammettendo l'origine, almeno dubbiosa, dell' ottica di Euclide, questo libro non è giunto a noi che sfigurato.

Da Euclide a Tolomeo l' ottica fece progressi sensibilissimi. All' autore dell'*Almagesto* si deve un trattato assai esteso su questa scienza, trattato che per

lungo tempo erasi creduto perduto, ma che circa trent' anni fa è stato ritrovato in una biblioteca di Parigi. Secondo la memoria letta da Delambre all'Accademia delle Scienze sul proposito di questa insspettata scoperta, sembra che non solo Tolomeo conoscesse la refrazione della luce, ma che avesse ancora determinato in un modo sufficientemente esatto il rapporto dell' angolo d' incidenza a quello di rrfrazione. Del resto la sostanza di questo trattato ci era già nota per l' *Ottica* di Alhazen che non ne è che un comento.

Alhazen, astronomo arabo dell' undecimo secolo, è divenuto particolarmente celebre per un *Trattato di ottica* diviso in sette libri, nel quale si trova il primo saggio di teoria che sia comparso sulla luce reflessa e refratta.

Dopo aver fatto l' applicazione drl principio dell' eguaglianza drgli angoli d'incidenza e di riflessione alle differenti specie di specchi piani, sferici, concavi e convessi, Alhazen si dà ad un gran numero di ricerche sui fenomeni della refrazione. Osserva primieramente che se un raggio luminoso passa da un mezzo in un altro che esso possa attraversare, continua a moversi in linea retta, quando cade perpendicolarmente sulla superficie che separa i due mezzi; ma, se cade obliquamente, devia dalla prima direzione allontanandosi o avvicinandosi alla perpendicolare alla superficie di separazione dei due mezzi, secondochè il primo mezzo è più o meno denso del secondo. Per esempio, nel passaggio obliquo dal-l' aria nel vetro, il raggio luminoso si approssima alla perpendicolare, mentre al contrario se ne allontana nel passaggio dal vetro nell' aria. Alhazen determina ancora il rapporto degli angoli d' incidenza e di refrazione nel passaggio dall' aria nel vetro o dal vetro nell' aria, e i numeri che trova differiscono poco dai veri. Quanto alle refrazioni astronomiche, ei fa vedere che i raggi luminosi che emanano dai corpi celesti debbono rompersi o cangier direzione entrando nell' atmosfera, alla quale ei dà dei limiti, e che questo cangiamento di direzione deve far comparire gli astri più elevati al di sopra dell' orizzonte di quello che lo siano in realtà. Alhazen indica nella refraziona dei raggi solari la vera causa dei *crepuscoli*.

Nel 1270, Vitellione, geometra polacco, pubblicò un trattato di ottica nel quale non fece altro che distribuire in un ordine migliore le materie trattate da Alhazen; altrettento possiamo dire delle opere di Ruggero Bacone, poichè non è che verso la metà del sedicesimo secolo che l' ottica cominciò a formare una vera scienza.

Maurolico è uno del primi che abbiano aperta la strada ei progressi dell' ottica. Nella sua opera intitolata: *Photismi de lumine et umbra*, ei fa parecchie osservazioni curiose sulla misura e sul confronto degli effetti della luce, sui differenti gradi di chiarezza che un corpo opaco riceve dai corpi luminosi, secondochè è esso più o meno lontano, e sopra molti altri fenomeni interessanti. Se non ha sempre trovato la verità, gli si debbono almeno delle indicazioni che hanno risparmiato molti falsi tentativi ai suoi successori. Maurolico ha risoluto perfettamente il seguente quesito proposto da Aristotile: perchè l' immagine del sole ricevuta attraverso ad un foro qualunque sia simile a questo foro ad una piccola distanza, ma divenga sempre circolare ad una distanza grande. Fenomeno sul quale gli antichi e lo stesso Aristotile non avevano specciato che delle idee fantastiche.

Giovan Batista Porta, gentiluomo nepoletano e contemporaneo di Maurolico, preparò la scoperta del meccanismo della visione mediante la sua invenzione della *Camera oscura*. Nel suo libro intitolato: *Magia naturalis*, egli osserva che il fondo dell' occhio si può considerare come una camera oscura, ma non dà sviluppo nessuno a questa idea vera e felice, della quale alcuni anni dopo Keplero si servì per dare le compiuta soluzione del problema. Questo ingegno potente diede la

teoria della visione nelle sua *Astronomiae pars optica*, opera che contiene un gran numero di osservazioni interessantissime sull'ottica.

Nel 1637, la *Diottrica* di Cartesio sorse a cangiare l'aspetto della scienza producendo, insieme colla sue legge fondamentale del rapporto costante dei seni degli angoli d'incidenza e di refrazione, una moltitudine di proposizioni nuove ed utili, in mezzo però alle quali trovansene delle dubbiose ed anco dalle assolutamente false, come quella della propagazione istantanea della luce. Si è rimproverato Cartesio di aver preso da Snellio, senza nemmeno nominarlo, la dipendenza reciproca dei due angoli d'incidenza e di refrazione. È vero che nei manoscritti lasciati da Snellio si è trovato che questo dotto aveva scoperto per mezzo di esperienze che le cosecanti degli angoli d'incidenza e di refrazione sono sempre in un rapporto costante; ma sebbene Cartesio abbia soggiornato in Olanda poco tempo dopo la morte di Snellio, non è minimamente provato che egli abbia avuto cognizione de' suoi manoscritti; e in ogni caso deve pur convenirsi che il rapporto dai seni sostituito a quello delle cosecanti è molto più comodo pel calcolo, e presenta dei vantaggi ai quali debbonsi molte belle scoperte fatte posteriormente.

L'opera di Cartesio richiamò verso l'ottica gli sguardi e le ricerche di molti dotti, e ben presto tutte le parti di questa scienza ricevettero nuovi incrementi. Nel 1663 Giacomo Gregory pubblicò la sua *Optica promota*, che contiene diverse proposizioni curiose sulla teoria, e parecchie vedute ingegnose pel perfezionamento degli strumenti, dei quali i più importanti erano stati già inventati. Nel 1667 le *Lezioni di ottica* di Barrow, e nel 1678 il *Trattato della luce* di Huygens contribuirono ancora ad estendere il campo della scienza, che poteva finalmente credersi esplorato interamente, quando nel 1706 il *Trattato d'ottica* di Newton si presentò a dimostrare che fino allora non si era fatto che percorrerne i contorni.

Infatti da lungo tempo si conoscevano le proprietà principali della luce, la sua reflessibilità, la sua refrangibilità, il suo calore, allorchè è riunite nel fuoco di uno specchio o di una lente ardente, ma si era ben lungi dal supporre che essa potesse esser decomposta: Newton è il primo che abbia penetrato e rivelato questo gran segreto che è venuto a completare tutte le teorie e a render ragione di un gran numero di fenomeni rimasti fino allora inesplicabili.

La luce non è, come si credeva prima di Newton, una sostanza pura ed omogenea; ogni raggio luminoso è composto di sette raggi primitivi differenti nel colore, nella refrangibilità e nella reflessibilità. Questi raggi primitivi sono il rosso, l'arancio, il giallo, il verde, il turchino, l'indaco, e il violetto. Newton gli separò per mezzo della segnente esperienza divenuta oggi volgare. Introducendo per un piccolissimo foro i raggi del sole in una camera oscura, e presentando loro obliquamente una delle facce di un prisma triangolare di vetro, il cui asse sia perpendicolare a quello del fascio dei raggi, si osserva che questo fascio si spezza, ossia cangia di cammino entrando nel vetro, attraversa il prisma in linea retta, ripassa nell'aria spezzandosi di nuovo, e va a formare sopra un cartone bianco, distante 15 o 18 piedi, un'immagine bislunga, nella quale si distinguono chiaramente sette strisce colorate secondo quest'ordine di basso in alto: *rosso, arancio, giallo, verde, turchino, indaco, violetto*. L'intero fascio è dunque composto di sette raggi che hanno refrangibilità differenti. Il raggio rosso è il meno refrangibile di tutti, come quello che si allontana meno dalla perpendicolare sulla faccia di emergenza del prisma; la refrangibilità aumenta progressivamente per gli altri raggi, fino al raggio violetto che è il più refrangibile di tutti. Se si pone un numero qualunque di prismi in seguito al primo, e se il fascio gli attraversa tutti, si avranno nuove refrazioni; l'immagine disegnata sul cartone si

rovescerà o si raddirizzerà; ma le sette strisce colorate rimarranno sempre inalterabilmente le stesse, e conserveranno sempre tra loro lo stesso ordine di situazione.

Gli oggetti che non sono luminosi per sè stessi, e che noi non scorgiamo che perchè sono illuminati, ci sembrano rossi, verdi, turchini, ec. secondochè riflettono dei raggi rossi, verdi, turchini, ec. Il color bianco è formato dal concorso di tutti i raggi, ed un oggetto non ci sembra nero, che perchè assorbisce tutti i raggi che riceve, e non è visibile che in forza della reflessione dei raggi che vengono dagli oggetti circonvicini. In tutti i casi avviene però una perdita di raggi, i quali rimangono negl' interstizj degli oggetti o sono dispersi in diverse direzioni.

Un raggio di luce che passa obliquamente da un mezzo in un altro si spezza o si refrange, e si allontana o si approssima alla linea retta condotta nel punto d' incidenza perpendicolarmente alla superficie di separazione, secondochè il primo mezzo è più o meno denso del secondo; e l' effetto è tanto più sensibile, quanto sono più differenti le densità dei due mezzi; ma il rapporto del seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo di reflessione rimane sempre lo stesso per qualunque obliquità: esso cangia soltanto di valore quando i due mezzi comparativi vengono a cangiare.

I sette raggi primitivi avendo refrangibilità differenti, quando si parla in generale della refrazione di un fascio di luce, che comprende tutti i raggi, si tratta sempre della refrazione media, che è presso a poco quella del verde. Spesso non si ha bisogno che di questa refrazione media; talvolta occorre aver riguardo alle differenze di refrangibilità di tutti i raggi, come nei canocchiali *acromatici*.

Newton spiega minutamente tutti i fenomeni della luce, e il *Trattato di ottica* fa epoca in questa scienza, come il suo libro dei *Principj* nell' astronomia fisica. Alcune delle sue esperienze furono dapprima contrastate, perchè venivano ripetute male. In tanta moltitudine di fatti, di osservazioni e di ragionamenti, gli sono sfuggite soltanto delle leggere sviste, che non invalidano punto il fondo dell' opera.

Per cinquant' anni, molti geometri celebri, camminando sulle tracce di Newton, applicaronsi a sviluppare e a sottoporre al calcolo le leggi della refrazione e della reflessione della luce, senza che nessun fisico osasse portare una mano temeraria sui principj stabiliti da quell' uomo sommo; fu soltanto nel 1747 che Eulero, nella veduta di rimediare alla dispersione dei colori prodotta dalla refrazione delle lenti dei cannocchiali, cercò la legge di questa dispersione e fu condotto a resultati differenti da quelli di Newton. Altrove abbiamo raccontato la discussione che su questo soggetto insorse tra Eulero e Dollond, discussione alla quale si deve l' invenzione dei canocchiali acromatici, ed una delle più belle opere di Eulero, la sua *Diottrica*. Fu dunque riconosciuto che Newton si era ingannato in una delle sue esperienze, ma nel tempo stesso si dimostrò che la legge di Eulero era falsa, e fu per riparare a tale errore che egli intraprese un lavoro che forse senza questa circostanza oggi non si possederebbe. In quest' opera, Eulero ha ridotto a formule generali e nulladimeno semplicissime la teoria dell' aberrazione di refrangibilità e quella assai più difficile dell' aberrazione di sfericità. In seguito Klugel ha esposto le teorie di Eulero in un modo compendioso, ma estremamente chiaro, nel suo libro intitolato: *Analytisch Dioptrik*, Lipsia, 1778. Queste due opere sono le sorgenti donde debbono oggimai attingersi tutte le cognizioni teoriche dell' ottica.

In questi ultimi tempi la scienza si è arricchita di una moltitudine di belle esperienze sulle proprietà della luce, e della scoperta di una nuova proprietà, quella della sua *polarizzazione*, fatta da Malus. Ma l' esposizione di tutte queste

particolarità ci farebbe uscire dai limiti del nostro piano. Si consulteranno perciò, per la storia della scienza, la *Storia dell' Ottica* di Priestley, e per la sua teoria, i *Trattati di Ottica* di Smith, di Priestley, di Lacaille, ec.; e io questo Dizionario gli articoli Catottrica, Canocchiale, Luce, Lente, Prospettiva, Telescopio, Refrazione, Reflessione, Visione, ec.

OTTICO. Si applica questo epiteto a tutto ciò che si riferisce alla visione, così si dice:

Asse ottico, il raggio che passa pel centro dell' occhio e che forma il mezzo del fascio di raggi che s' immagina che parta da un punto qualunque di un oggetto. Questo fascio si dice: *Cono ottico.*

Ineguaglianze ottiche, tutte quelle irregolarità apparenti che si scorgono nel moto dei pianeti.

Pennello ottico, il complesso dei raggi per mezzo dei quali si vede un punto o una parte di un oggetto.

Luogo ottico, il punto del cielo in cui comparisce un astro: questo punto differisce sempre dal luogo vero a motivo della *refrazione* e dell' *aberrazione* della luce.

OTTOBRE (*Cal.*). Decimo mese del nostro anno civile: era l' ottavo nell' antico anno romano, donde è derivato il suo nome che ha conservato nel nostro Calendario (*Vedi* Calendario). Verso il 22 o il 23 di questo mese il sole entra nel segno dello Scorpione.

OTTUSIANGOLO. (*Geom.*). Nome che si dà ai triangoli che hanno un angolo ottuso. (*Vedi* Triangolo.)

OTTUSO. (*Geom.*) Un angolo ottuso è un angolo maggiore di un retto. (*Vedi* Angolo.)

OUGHTRED (Guglielmo), matematico inglese del XVII secolo, è autore di alcune opere pregevoli di algebra e di geometria, che i progressi della scienza hanno fatto cadere nell' oblio, ma che, nel tempo in cui furono pubblicate, ebbero una gran voga. La maggior parte sono state per lungo tempo adottate come libri classici nelle università della Gran Brettagna. In quell' epoca in cui Viète aveva fatto fare un passo sì grande alla scienza dei numeri, Oughtred compose parecchi trattati nei quali attese specialmente a sviluppare l' applicazione dell' algebra ai problemi geometrici, la costruzione delle equazioni, la formazione delle potenze, e le formule per le sezioni angolari. I suoi lavori che annunziano un dotto coscienzioso e distinto non contengono niuna cosa veramente singolare per il lato dell' invenzione: essi lasciarono la scienza nello stato nel quale l'aveva portata Viète. Oughtred era nato nel 1574: la gioja che provò alla nuova della risoluzione del parlamento che richiamava Carlo II gli cagionò una tal commozione che ne morì nel 1660. L' opera sua principale intitolata: *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio, quae tum logisticae tum analyticae, atque totius mathematicae clavis est*, contiene molti eccellenti teoremi, dei quali alcuni nuovi, di algebra e di geometria: è stata ristampata più volte, ma è divenuta rarissima e appena trovasi indicata nelle raccolte bibliografiche. Gli altri scritti di Oughtred sono stati riuniti sotto il titolo di *Opuscula mathematica hactenus inedita*, e stampati ad Oxford nel 1676.

OULOUGH-BEYG (Mirza Mohammed Taraghy), re della Transossiana e della Parsia orientale, nacque a Sulthanieh l' anno dell' Egira 796 (1394 di G. C.). Appassionato fino dalla sua giovinezza per le scienze esatte, e specialmente per l' astronomia, non aveva che ventisette anni allorchè fece costruire un osservatorio in Samarcanda sua capitale, in cui diresse egli stesso parecchie osservazioni astronomiche esattissime, assistito da quattro dotti mussulmani. Compose le famose tavole denominate *Zydje Chahy* (*Tavole reali*), che gli Orientali tengono

per superiori a quelle del celebre Nassir-eddyn, e delle quali si valgono tuttora per calcolare gli almanacchi, e per determinare le longitudini e le latitodini. Di queste tavole, calcolata nella supposizione che l'obliquità dell'ecclittica sia di 23° 30′ 17″, non si conoscono in Europa che alcuni frammenti pubblicati nelle appresso opere: I *Epochae celebriores astronomicae* di G. Greaves, Londra, 1650. Greaves aggiunse alla sua traduzione, che contiene la prima parte delle tavole di Oulough-Beyg, il testo persiano, ed una tavola in cui le diverse epoche sono messe in armonia coll' era cristiana; II *Binae tabulae geographicoe, una Nassireddini, altera Ulug-Beighi* di Greaves, Londra, 1652. Tali tavole si trovano ordinariamente in seguito all' *Astronomica quoedam ex trad. Schah Cholgii Persae*, ed Hudson le ristampò nella raccolta denominata de' *Geogrnfi Minori*; III *Tabula longitudinum et latitudinum stellarum fixarum, ex observotione Ulugh-Beighi* di Tommaso Hyde, con un erudito comento, Londra, 1665, in-4; e nel tomo I del suo *Syntogma dissertationum*; IV Finalmente Burkhardt pubblicò nel 1799, nelle *Effemeridi geografiche* del barone di Zach, i movimenti di alcuni pianeti secondo il sistema di Oulough-Beyg. Questo astronomo sovrano morì nel 1449.

OUTHIER (Reginaldo), astronomo francese, nato nel 1694 a Lamare-Jonsserand, partì nel 1736 pel settentrione insieme con Maopertuis ed altri astronomi francesi per misurarvi un grado di latitudioe sotto il circolo polare, e scrisse il giornale di qoella celebre spedizione. Egli morì nel 1774. I suoi scritti sono: I *Journal d'un voyage fait au nord en* 1736 *et* 1737, Parigi, 1744, in-4, con 18 carte o tavole disegnate dall' autore; II *Observations du passage de Vénus, le* 6 *Juin* 1761, *et de l'éclipse de la lune du* 8 *Mai* 1762, che sono inserite nel tomo VI delle *Memorie dei dotti stronieri* che fanno parte della Raccolta dell' Accademia delle Scienze di Parigi.

OVALE (*Geom.*). Figura curvilinea bislunga, racchiusa in una sola linea curva rientrante o chiusa.

L' *ovole* è generalmente una figura irregolare più stretta da un capo che dall' altro, il che la distingue dall' *ellisse* che è un' *ovale regolare*.

OVEST. *Vedi* Occidente.

OZANAM (Giacomo), professore di matematiche, nato oel 1640 a Bouligneux nel principato di Dombes, è oggi noto specialmente per le sue *Ricrenzioni motematiche*, che offrono ai giovani un' attrattiva che non trovano in opere di un ordine più elevato. Nulladimeno Ozanam fu considerato al suo tempo come un geometra distinto in grazia soprattutto di un gran numero di opere elementari che ebbero molta voga. Egli aveva appreso da sè solo le matematiche per le quali aveva una specie di passione e che poi si trovò costretto ad insegnare per vivere. Era in età assai avaozata quando entrò nell' Accademia delle Scienze, nella quale prese la qualità di allievo, titolo al quale si voleva dare risalto ed importanza conferendolo ad un uomo della sua età e del suo merito. Montucla, che sotto lo pseudonimo ha pubblicato un' edizione delle *Ricrenzioni matematiche* di Ozanam, non gli ha consacrato nella sua *Storia delle matemotiche* che poche linee insignificanti. Pure se i lavori di questo stimabile e modesto geometra non lo collocano nel grado stesso di alcuni dei suoi illustri contemporanei, deve almeno convenirsi che sono stati di molta utilità per la scienza contribuendo a diffonderne il gusto e lo studio. Ozanam morì improvvisamente a Parigi di un colpo d'apoplessia il 3 Aprile 1717.

Oltre un numero grande di edizioni accresciute di note e di aggionte degli *Elementi di Euclide* del p. De Challes, della *Geometria pratica* e del *Trattato della Sfera* di Boulanger, di varie *Memorie* nella *Roccolta* dell' Accademia delle Scienze, nel *Giornale de' Dotti*, ec., si hanno di Ozanam le opere

seguenti: I *Tables des sinus*, *tangentes*, *et secantes*, *et des logarithmes*, Lione, 1670; Parigi, 1685, 1720, in-8; l'utilità pratica di queste tavole le ha fatte stimare lungo tempo, e secondo Fontenelle presentano maggior correzione ed esattezza di quelle di Ulacq, di Pitisco ed anco di Enrico Briggs. II *Traité de gnomonique*, Parigi, 1673, in-12; ed ivi, nuova ediz. accresciuta col titolo di *Métode générale pour tracer les cadrans*, 1685, in-12; III *La géométrie pratique*, ivi, 1684, in-12; IV *Traité des lignes de premier genre*, *de la construction des équations*, *ec.* ivi, 1687 in-8; in tale opera si trovano molte proposizioni nuove ed importanti, e se l'autore avesse continuato in tale aringo si sarebbe fatto un nome più solido; V *L' usage du compas de proportion expliqué et démontré d'une maniere courte et facile*, ivi, 1688, in-8; nuova edizione riveduta da Garnier, ivi, 1794, in-12; tale ediz. è stimata; VI *Dictionnaire mathématique*, ivi, 1690, in-4; opera incompleta che i progressi della scienza hanno fatto obliare. VII *Cours de mathématiques*, ivi, 1693, 5 vol., in-8; VIII *Traité de la fortification*, ivi, 1694, in-8; IX *Récréations mathématiques et physiques*, 1694, 2 vol. in-8; ivi, 1735, 4 vol. in-8: tale opera curiosa, molto più ampia di quella che erano già comparse collo stesso titolo (*Vedi* Mydorge), contiene la soluzione di una moltitudine di problemi di aritmetica, di geometria, di ottica, di gnomonica, di meccanica, ec. Montucla ha fatto di tale libro un' opera affatto nuova nella edizione che ne ha pubblicata a Parigi nel 1778 o 1790, 4 vol. in-8, per un numero grande di articoli aggiunti, troncati, corretti, ec. (*Vedi* Montucla); X *Nouvelle trigonométrie*, ivi, 1699, in-12; ristampata col titolo di *Méthode pour lever les plans et les cartes*, ivi, 1750, in-12; ivi, 1781, in-12; XI *Méthode facile pour arpenter ou mesurer toutes sortes de superficies*, ivi, 1699, in-12; ivi, 1725, in-12; ristampato con grandi aggiunte da Andierne col titolo di *Traité de l'arpentage et du toisé*, ivi, 1779, in 12; XII *Nouveaux éléments d'algèbre*, Amsterdam, 1702, in-8: l'illustre Leibnitz nel *Giornale dei dotti*, anno 1703, giudicò tale opera superiore alla maggior parte dei trattati d'algebra allora conosciuti; e ne parlò ancora vantaggiosamente a Bernoulli nel suo *Commercium epistolicum*, a motivo di alcuni metodi algebrici utili nella riduzione delle quantità irrazionali; XIII *La perspective théorique et pratique*, ivi, 1711, in-8; XIV *La géographie et cosmographie*, *qui traite de la sphère*, ivi, 1711, in-8. Ozanam ha pure lasciato manoscritto un *Trattato dell'analisi di Diofanto* che non è stato mai pubblicato.

P

PACCIOLI (Luca, più conosciuto sotto il nome di Fra Luca da Borgo), religioso francescano ed uno dei più dotti matematici del secolo XV, nacque a Borgo San Sepolcro in Toscana. È il primo geometra del quale siano state stampate le opere, e per questo motivo solo il suo nome meriterebbe di esser rammentato nella storia della scienza, se per altra parte i suoi lavori non fossero assai notabili per l'epoca in cui furono composti. Paccioli aveva viaggiato nell'oriente prima della caduta dell'impero greco, ed aveva potuto soddisfare l'inclinazione sua per le matematiche, studiando queste scienze nei libri degli antichi geometri, allora quasi del tutto sconosciuti in Europa. Dopo avere insegnato l'aritmetica a Napoli ed a Venezia, si recò a Milano, ove il celebre Lodovico Sforza detto il *Moro* fondò per lui una cattedra di matematiche, che Paccioli occupò con gran lustro, ed ove i suoi corsi seguiti furono da un numero considerabile di discepoli. Fu in quel tempo ch'ei tradusse Euclide o piuttosto rivide interamente l'antica traduzione di Campano di Novara, la cui versione era scorretta e che spesso aveva creduto di poter sostituire le sue proprie idee a quelle del gran geometra della scuola d'Alessandria. Quest'opera non fu stampata che nel 1509. È pure probabile che Paccioli componesse a Milano la sua *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proporzionalità*, che è la principale sua opera, e nel tempo stesso uno dei libri più curiosi la cui pubblicazione abbia fatto conoscere i vantaggi della stampa nascente. La prima edizione fu fatta a Venezia nel 1494, è in-foglio, ed è divenuta di una tal rarità che pochi bibliografi possono vantarsi di averla avuta sotto gli occhi. La seconda edizione, non poco rara anch'essa, è stata stampata nel 1523 da Paganino Paganini di Brescia, in Tusculano, sulle rive del lago Benaco (di Garda), come indica il suo titolo, che secondo l'uso del tempo è estremamente prolisso, e in termini ampollosi. La *Summa de arithmetica, geometria*, è divisa in due libri, uno dei quali è consacrato all'aritmetica, e l'altro alla geometria. Nella prima parte, nella quale brilla una grande erudizione, Paccioli aggiungendo molte cose a quanto aveva detto Fibonacci (*Vedi* Fibonacci) tre secoli prima, espone a lungo le varie regole dell'aritmetica, con alcune invenzioni dovute agli Arabi, per esempio la regola di semplice e doppia falsa posizione; tratta con molte particolarità dell'aritmetica commerciale, aggiungendo una gran profusione di quesiti e di esempj; e consacra parecchi capitoli all'algebra cui chiama *arte maggiore*, donde provenne la denominazione di arte magna (*ars magna*), che Cardano ed altri diedero a questa scienza. L'algebra di Paccioli però non si estende oltre le equazioni del secondo grado. All'articolo Algebra abbiamo già avuto occasione di parlare di questa parte dei lavori matematici di Paccioli. Nel 1508 comparve a Venezia un'altra opera di questo religioso che è divenuta rara al pari degli altri suoi scritti: è intitolata: *Libellus in tres partiales tractatus divisus, quorumcumque corporum regularium et dependentium activae perscrutationis*, in-fol., e si compone di tre trattati sui poligoni e sui corpi regolari, sull'iscrizione mutua di tali corpi gli uni negli altri, e sopra una moltitudine di altri proble-

mi analoghi, i più dei quali sono risoluti per mezzo dell'algebra. Finalmente si deve citare ancora di Paccioli il suo libro *De Divina proportione, opera a tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi necessaria*; ei dà questo titolo di *proporzione divina* alla divisione della linea retta in media ed estrema ragione, della quale espone tredici *effetti* o utilità: una buona parte del libro comprende numerose applicazioni della proporzione divina all'architettura; ed il resto è consacrato alla rappresentazione in prospettiva di diverse figure geometriche. Quest'opera, che sembra la seconda composta da Paccioli, fu egualmente stampata a Venezia nel 1509, in-fol., dall'editore della *Summa*.

Poche particolarità biografiche si conoscono su questo antico geometra; s'ignora l'epoca precisa della sua nascita e della sua morte, ma la riconoscenza della posterità deve tener sempre viva la sua memoria a motivo dell'influenza che i suoi lavori hanno esercitato sul risorgimento delle scienze matematiche, in quell'epoca specialmente in cui si operò nello spirito umano una sì felice reazione. Se la scienza deve inscrivere ne' suoi fasti alcuni di quei nomi gloriosi che eccitano l'ammirazione del mondo, non deve però obliare quegli uomini modesti e laboriosi le cui ricerche hanno aperto la carriera a ingegni più brillanti. Montucla è presso a poco il solo scrittore moderno che abbia parlato con qualche estensione di Paccioli, o come comunemente si dice di Luca da Borgo; noi dobbiamo perciò rimandare alla sua opera i lettori che desiderassero conoscere tali interessanti particolarità, dalle quali abbiamo estratta questa breve notizia.

PAGAN (Biagio Francesco, conte di), astronomo, matematico e ingegnere distinto, nacque ad Avignone nel 1604, e morì a Parigi nel 1665. Le sue opere principali sono: I *Traité des fortifications*, Parigi, 1645, in-fol.; ed ivi, 1689, in-12; II *Théorèmes géométriques*, ivi, 1651, in-8; ed ivi, 1654, in-8, con aggiunte; III *Théorie des planètes*, ivi, 1657, in-4; IV *Tables astronomiques*, ivi, 1658, 1681, in-4: l'autore vi aggiunse dei metodi per trovare le longitudini in terra e sul mare.

PALILICIO (*Astron.*). Nome di una stella di prima grandezza, più conosciuta sotto quello di *Aldebaran*. *Vedi* Aldebaran.

PALLADE (*Astron.*). Nome del nuovo pianeta scoperto da Olbers nel Marzo 1802, e che è situato tra Marte e Giove. *Vedi* Cerere *e* Giunone.

Questo pianeta è presso a poco della stessa grandezza di Cerere, presente un aspetto nebuloso, il che indica l'esistenza di una vasta atmosfera, e si distingue da tutti gli altri per la grande inclinazione della sua orbita, perchè mentre tutti questi corpi descrivono orbite le cui inclinazioni sul piano dell'eclittica non sono che di pochi gradi, quella di Pallade si avvicina a 35.°

Ecco i suoi elementi riferiti al 1° Gennajo 1820.

Semiasse maggiore, preso per unità quello della terra. .	2,7728860
Eccentricità in parti del semiasse maggiore	0,2416580
Periodo siderale medio in giorni medj	1686g,5388000
Inclinazione sull'eclittica	34° 34′ 55″,0
Longitudine del nodo ascendente	172 39 26 ,8
Longitudine del perielio	121 7 4 ,3
Longitudine media dell'epoca	108 24 57 ,9

PALI. (*Idraul.*). Nome generico dei pezzi di legno che si conficcano in un terreno per consolidarlo e dare ad esso la forza necessaria per sostenere un fondamento. S'impiegano principalmente per reggere gli edifizj di fabbriche, come ponti, muri delle strade e altre opere, quando si vogliono gettare i fondamenti sotto acque basse.

Si conficeano i pali con una macchioa, chiamata *Castello*, fino a tanto che essi non entrano più, o al meno fioo a tanto che essi non entrann che due o tre millimetri per colpo, il che si chiama il rifiuto. Spesso questo rifiuto è illusorio, e l'attrito che essi provano nei terreni sabbiosi è il solo motivo che gl'impedisce di discendere. In generale, l'uso dei pali non è utile che quando dopo avere attraversato gli strati molli del terreoo essi trovano un fondo di una miglior qualità, ove essi possono mettersi in ordine per essere sufficientemente affondati. Il metodo più sicuro per i fondamenti, nei terreni poco consistenti, è d'iocassare questi terreoi alla più gran profondità possibile e quiodi a caricargli, avanti di elevare le costruzioni, di uo peso almeno uguale a quello che deve avere l'edifizio. Lasciando agire qoesto peso per luogo tempo, il fondo si riserra quanto può esserlo, e non deve restare alcuoa inquietudine per l'avvenire, nel mentre che lo stabilimeoto di pali, in circostanze simili, può far temere che gli strati ove i pali sono arrestati siano situati sopra altri strati capaci di comprimersi, come ciò pur troppo spesso succede per strati di argille le quali, naturalmente sode, finiscono per penetrarsi, ammollarsi, con l'acqua che s'insinua sempre lungo i pali, e prendono un ammassameoto, il quale oon avrebbe avuto luogo se non si fossero adoprati i pali, e che niente poteva far prevedere. *Vedi* Ponti.

PANIERE (ansa di). *Vedi* Ansa.

PANTOGONIA. (*Geom.*). Nome dato da Giovanni Bernoulli ad una specie di trajettoria, la quale, in ogni differente posizione del suo asse, si taglia sempre essa stessa sotto un angolo costante. (*Vedi Oeuvres de J. Bernoulli*, *Tom.* II, *pagina* 600).

PAPPO, geometra di Alessandria, ed uno degli ultimi maestri dell'illustre scuola di quella città, viveva nel quarto secolo dell'era volgare. Ai lavori di questo dotto e celebre commentatore sono dovute le notizie che ci rimangono sui principali matematici dell'antichità e sui loro scritti, divenuti già rari all'epoca in cui ne fece egli l'oggetto delle sue ricerche e de' suoi studj. In qoel tempo l'antica civiltà era prossima a spirare; gli uomini del settentrione irrompevano da ogni parte sul mondo romano e cominciavaoo il caos in cui deveva lentamente elaborarsi il mondo cristiano e la moderna civiltà. La scuola d'Alessandria abbandonata alle dispute letterarie e teologiche, non mandava più che deboli ed incerti raggi come la fiamma che sta per estinguersi, e i matematici, in piccol numero, che prima della fondazione della scuola di Proclo in Ateoe vi riunivano ancora intorno a sè qualche discepolo, erano lungi dall'imitare i loro illustri predecessori, e dall'avanzare i loro passi nel campo delle scoperte. I secoli di decadenza, come coo molta sagacità osserva lo storico delle matematiche, sono annunziati dai commentatori e dagli anuotatori. La scuola d'Alessandria ne contava molti in quel tempo; ma Pappo al merito che esigeva la formazione delle grandi collezioni di cui è autore, accoppiava evidentemente cognizioni superiori e l'iogegno necessario per metterle io opera. Le sue *Collezioni matematiche* portaoo l'impronta di queste diverse qualità, e formano il libro il più curioso, e senza contrasto il piu utile per la storia della scieoza, che il tempo abbia potuto risparmiare. Lo scopo di Pappo sembra essere stato quello di raccogliere io un sol corpo una moltitudine di scoperte sparse, di supplire e di schiarire in molti luoghi gli scritti principali dei matematici più celebri, il che ha egli fatto specialmente per Archimede, Apollonio, Euclide e Teodosio, dei quali riporta una qoantità considerabile di teoremi e di proposizioni, aggiungendoreoe non poche delle proprie: egli vi sviluppa ancora applicandolo a problemi curiosi il metodo aoalitico degli antichi, e vi ha riportato la maggior parte dei tentativi da essi fatti sui problemi i più celebri, come quelli della duplica-

zione del cubo, e della trisezione e multisezione dell'angolo. Come abbiamo già detto, Pappo non si limitò a raccogliere questi materiali preziosi per la storia della scienza, egli è spesso originale e profondo nelle ricerche che gli sono proprie. Tale, tra le altre, è la soluzione elegante quantunque indiretta che egli dà del problema della trisezione dell'angolo; tale pure è l'idea chiara e precisa che egli espone dell'uso del centro di gravità per la misura delle figure, idea che poscia è stata presentata da Guldin come una scoperta sua propria, e di cui Pappo ha somministrato evidentemente i primi germi.

Le sue *Collezioni matematiche*, che i geometri moderni consultano ancora con interesse, sono dovute alle ricerche e alle fatiche di Commandino, che ha pure tradotto quest'opera alla quale ha aggiunto un numero grande di note. Esse però non comparvero che dopo la morte di questo matematico, e in grazia della generosa protezione di Francesco Maria, duca d'Urbino, sotto il titolo di *Pappi Alexandrini Collectiones mathematicae a Federico Commandino in latinum versae et commentariis illustratae*, Pesaro, 1588, in-fol. Nel 1589 fu pubblicata a Venezia una seconda edizione di questa opera, ed un'altra ne fu data in luce a Bologna nel 1660 per Manolessi. Halley, che nell'edizione del libro *De sectione rationis* di Apollonio da lui pubblicata, ha pure dato il testo greco della prefazione del settimo libro di Pappo, dichiara che l'edizione di Pesaro è preferibile a tutte le altre. Degli otto libri che componevano tutta l'opera non abbiamo interi che gli ultimi cinque: il terzo manca del principio. Wallis pubblicò in greco e in latino un frammento del secondo libro. I primi due contenevano l'aritmetica greca cui Archimede ed in seguito Apollonio cercato avevano di estendere con idee che sviluppate avrebbero dovuto condurli all'aritmetica indiana, divenuta oggigiorno quella del mondo incivilito. Pappo commentò ancora alcuni libri di Tolomeo, e questo suo lavoro fu messo a contribuzione per empiere alcune lacune che si trovano nel comento più esteso e più interessante di Teone. Sopra tale geometra e sopra altri suoi scritti di cui non ci rimangono che dei frammenti, si consulti l'esame giudizioso che ne ha fatto Montucla nella sua *Storia delle matematiche*, tom. 1, pag. 329-339.

PARABOLA (*Geom.*). Una delle sezioni coniche. Essa è generata da un piano che taglia un cono retto parallelamente ad uno dei suoi lati. Tale è la curva KGAIL (*Tav.* XXVIII, *fig.* 6.) formata dall'intersezione della superficie del cono retto COD e dal piano parallelo al lato OC. Supponendo il cono prolungato all'infinito, siccome il piano non può mai incontrare il lato, si vede che la *parabola* ha due rami infiniti.

1. Per trovare l'equazione di questa curva nel piano generatore, prendiamo per asse delle x la retta AB, intersezione di questo piano e del piano principale COD; e per un punto qualunque H, dell'asse, concepiamo un piano parallelo alla base del cono; la sua sezione EGFI sarà un circolo (*Vedi* Cono). Supponiamo di più il piano generatore perpendicolare al piano principale, affinchè le intersezioni EF e GI siano perpendicolari l'una sull'altra, e conduciamo nel piano principale, AM parallela ad EF.

Indichiamo AH con x, GH con y, MO con a e AM=EH con b. Premesso ciò, i triangoli simili MOA, AHF, danno

$$AM : MO :: FH : AH$$
$$b : a :: FH : x$$

donde si deduce

$$FH = \frac{b}{a}x;$$

ma considerando FH nel circolo EGFI, abbiamo (*Vedi* CIRCOLO)

$$FH : GH :: GH : EH,$$

$$FH : y :: y : b;$$

il che dà

$$FH = \frac{y^2}{b}.$$

Così uguagliando i due valori di FH, otterremo

$$\frac{y^2}{b} = \frac{b}{a} x$$

e da questa

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x.$$

Tale è l' equazione della parabola.

2. Le quantità a e b essendo costanti, indichiamo con p la loro terza proporzionale, ovvero facciamo $p = \frac{b^2}{a}$, l' equazione precedente diventerà

$$y^2 = px \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a);$$

forma ordinaria dell' equazione della parabola.

3. Consideriamo ora questa curva come tracciata sopra un piano e cerchiamone le sue principali proprietà.

Esaminando la sua equazione, si vede subito che per ciascun valore di x si hanno due valori di y uguali e di segni contrari,

$$y = +\sqrt{px} \text{ e } y = -\sqrt{px},$$

il che indica che i due rami della curva sono esattamente simili o simmetrici.

Si vede ancora facilmente che facendo $x = \frac{1}{4} p$, si ha

$$y = \sqrt{\frac{p^2}{4}} = \frac{p}{2}.$$

Vale a dire che l' ordinata che passa pel punto ove $x = \frac{1}{4} p$, è uguale alla metà del fattore costante p; così la doppia ordinata è uguale a p.

Questa retta costante p che entra nell' equazione della curva, si chiama il *parametro* e il punto dell' asse ove $x = \frac{1}{4} p$, prende il nome di *fuoco*.

4. Il *fuoco* della parabola gode di proprietà analoghe a quelle dei fuochi dell' ellisse e dell' iperbola. La principale è che se da questo fuoco si conduce una retta ad un punto qualunque della curva, questa retta, che si chiama *raggio vettore*, avrà una differenza costante con l' ascissa corrispondente. Infatti, sia F (*Tav.* IX, *fig.* 1), il fuoco della parabola MAN, conduciamo il raggio vettore

Fy a l'ordinata xy, il triangolo rettangolo Fxy ci darà

$$\overline{Fy}^2 = \overline{Fx}^2 + \overline{xy}^2,$$

ma indicando Fy con z, abbiamo ancora

$$Fx = Ax - AF = x - \frac{1}{4}p, \quad e \quad \overline{xy}^2 = y^2 = px,$$

donde si ricava

$$z^2 = \left(x - \frac{1}{4}p\right)^2 + px$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 + px$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$$

$$= \left(x + \frac{1}{4}p\right)^2.$$

e per conseguenza,

$$z = x + \frac{1}{4}p, \quad e \quad z - x = \frac{1}{4}p.$$

Così la differenza tra il raggio vettore e l'ascissa è sempre uguale al quarto del parametro.

5. Resulta da questa proprietà che se si prolunga l'asse di una quantità $Af = AF = \frac{1}{4}p$ e che si conduca la retta PQ perpendicolare all'asse, tutti i punti della parabola saranno ugualmente allontanati da questa retta e dal fuoco, poichè abbassando da un punto y della curva una perpendicolare yZ sopra PQ, questa perpendicolare è uguale xf; ma

$$xf = Ax + Af$$

$$= Ax + AF$$

$$= x + \frac{1}{4}p = z,$$

dunque $xf = Zy = z$. Quando si considera la parabola in una maniera indipendente dal cono, si parte da questa costruzione per trovare la sua equazione. Si definisce allora, *una curva di cui tutti i punti sono a distanze uguali da una retta data di posizione e da un punto fisso ugualmente dato*. La retta PQ prende il nome di *direttrice*.

6. La direttrice e il fuoco di una parabola essendo dati possiamo facilmente costruire questa curva per punti nella seguente maniera.

Sia PQ la direttrice ed F il fuoco (*Tav.* IX, *fig.* 1). Dal punto F si condurrà sopra PQ una perpendicolare indefinita Bf; si dividerà Ff in due parti uguali e il punto del mezzo A sarà il vertice della parabola. Per ottenere altri punti, si eleverà in un punto qualunque x di Bf la perpendicolare $y'y$, quindi da F come centro con un raggio uguale ad fx si descriverà un arco di circolo

che tagli la perpendicolare in due punti y' e y. Si avranno così due punti della curva; e ripetendo quest' operazione se ne potranno ottenere tanti quanti si vorrà.

7. Possiamo ugualmente descrivere la parabola mediante un moto continuo in un modo semplicissimo. Avendo fissato una riga BD (*Tav.* CXXXIII, *fig.* 1) sopra la direttrice, si attaccherà al fuoco F l'estremità di un filo uguale in lunghezza al lato EC di una squadra, all' estremità C della quale si attaccherà l'altra estremità del filo. Si tenderà il filo contro la squadra con una punta o un lapis, e facendo strisciare la squadra lungo la riga, la punta descriverà un ramo della parabola. Per tracciare l'altro ramo, si rovescerà la posizione della squadra. Questa costruzione è quella che ha fatto dare il nome di *direttrice* alla retta DB; essa è abbastanza evidente per tralasciare di svilupparla ulteriormente.

8. Paragonando la generazione della parabola nel cono con quella dell' ellisse, facilmente si riconosce che quest' ultima curva si ravvicina alla prima a misura che il suo grand' asse aumenta, e che essa finisce per confondersi con essa quando questo grand' asse diventa infinitamente grande. Questa circostanza è espressa nell' equazione dell' ellisse riportata al vertice e al parametro,

$$y^2 = \frac{p}{a}\left(2ax - x^2\right)$$

(*Vedi* Ellisse), poi dandogli la forma

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

essa si riduce a

$$y^2 = 2px,$$

quando a è *infinitamente grande*, poichè allora $\frac{px^2}{a}$ diventa *infinitamente piccolo*. In questo caso $2p$ esprime la medesima quantità che abbiamo indicata con p nell' equazione della parabola, vale a dire, la doppia ordinata che passa pel fuoco, o il *parametro*.

9. Segue lo stesso dell' Iperbola: la sua equazione riportata al vertice e al parametro essendo

$$y^2 = \frac{p}{a}\left(2ax + x^2\right)$$

(*Vedi* Iperbola), ovvero

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a},$$

essa si riduce a quella della parabola

$$y^2 = 2px$$

quando a diventa *infinitamente grande*; e in questo caso, il centro, il secondo vertice e la seconda iperbola spariscono, ovvero, sono situati all' infinito.

11. Quantunque il problema delle tangenti debba essere trattato in altra parte in tutta la sua generalità, faremo in questo punto conoscere un processo semplicissimo, simile a quelli che abbiamo dati per l' ellisse e l' iperbola. Sia Q il punto ove si vuole condurre una tangente (*Tav.* III, *fig.* 3). Dopo avere abbas-

sato la perpendicolare QP sopra la direttrice e condotto il raggio vettore FQ, si uniranno i punti F e P con una retta FP che si dividerà in due parti uguali al punto g; per i punti g e Q si condurrà una retta gQ; questa sarà la tangente domandata. Infatti, questa retta non può avere che il solo punto Q comune con la curva, poichè se da qualunque altro punto O si conduce OP, e la perpendicolare OS alla direttrice, si ha

$$PO > OS$$

ma FO = PO, dunque ancora

$$FO > OS,$$

e per conseguenza, il punto O è fuori della curve.

12. Resulta da questa costruzione, che se si prolunga PQ, gli angoli FQg ed RQO sono uguali. Proprietà che trova la sua applicazione nella catottrica, e che c' insegna, che *tutti i raggi luminosi che partono dal fuoco di uno specchio parabolico sono reflessi parallelamente all' asse*. Questo è quello che rende l' uso di questi specchj tanto utile per projettare la luce a grandi distanze.

13. Si chiama *diametro*, nella parabola, qualunque retta parallela all' asse; gli vien dato questo nome poichè essa divide in due parti uguali tutte le corde parallele alla tangente del punto ove essa incontra la curva. Prendendo per assi delle coordinate una tal retta e la tangente corrispondente, si hanno delle coordinate oblique, ma l' equazione non cangia di forma. (*Vedi* Trasformazione delle coordinate. *Vedi* ancora Polare per l'*equazione polare* della parabola.)

Parabola *degli ordini superiori*. Si dà ancora il nome di *parabole* a diverse curve le quali differiscono essenzialmente dalla parabola ordinaria, *conica*, o *apolloniana* che abbiamo esaminato. Ecco quelle più osservabili.

Parabola *biquadratica*. Questa è una curva del terz'ordine, che ha due rami infiniti, e che generalmente è espressa da una delle tre equazioni:

$$a^3x = y^4 \dots\dots\dots\dots\dots (1),$$
$$a^3x = y^4 - b^2y^2 \dots\dots\dots\dots (2),$$
$$a^3x = y^4 - (b+c)y^3 + bcy^2 \dots (3),$$

l' equazione (1) rappresenta la curva della fig. 2, Tav. XXVIII; l' equazione (2), quella della fig. 9; e l' equazione (3) quelle della fig. 10. In tutte queste figure si ha AP = x, QP = y, AB = b, AC = c, a è una certa quantità data.

Parabola *cartesiana*. Curva del second' ordine espressa dall' equazione

$$xy = ax^3 + by^2 + cx + d:$$

essa ha qattro rami infiniti, cioè: due iperbolici e due paraboiici. (*Vedi* Tav. CLXXVIII, fig. 1.)

Parabola *cubica*. Questa ancora è una curva del second' ordine che ha due rami infiniti diretti in senso inverso (Tav. CLXXVIII, fig. 3), la sua equazione generale è

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ma quando b, c, e d sono ciascuno zero, quest' equazione si riduce a

$$y = ax^3$$

e questa è quella della figura citata. Si chiama *prima parabola cubica*.

Se l' equazione è

$$y^3 = ux^8,$$

la curva si chiama *seconda parabola cubica*. In generale, $y^m = ax^3$ è l'equazione dell' m^{sima} *parabola cubica*.

Parabola *divergenti*. Nome dato dal Newton ad una specie di cinque differenti linee del terz'ordine o curve del second' ordine espresse dall'equazione

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

la prima è una curva in forma di campana che ha un ovale alla sua testa (*Tav.* XXIII, *fig.* 4). Essa corrisponde al caso in cui l'equazione

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ha tre radici reali e ineguali.

La seconda (fig. 1), ha un punto coniugato; essa corrisponde al caso in cui la due più piccole radici di questa medesima equazione sono eguali.

La terza (fig. 3) è quella che si riferisce all' ugnaglianza delle due più grandi radici.

La quarta (fig. 2) ha luogo quando non vi è che una sola radice reale.

Finalmente la quinta corrisponde al caso delle tre radici uguali. L'equazione può ridursi allora a $y^2 = ax^3$. Ed è la *seconda parabola cubica*.

Archi parabolici. Questi sono gli archi o le porzioni della curva. (*Vedi* Rettificazione.)

PARABOLOIDE ovvero CONOIDE PARABOLICA. (*Geom.*). Solido formato dalla rivoluzione di una parabola intorno del suo asse. Per il volume di questo solido, *Vedi* Cubatura.

Alcune volte si dà ancora il nome di *parabolaidi* alle parabola dei gradi superiori.

PARACENTRICO. (*παρα vicina*, e da *κεντρον*, *centro*). Il moto *paracentrico* è quello che si effettua avvicinandosi ad un centro.

La curva *isocrona paracentrica* è quella che un corpo pesante percorre per avvicinarsi o allontanarsi ugualmente in tempi uguali, ad un centro o ad un punto dato. Il problema di trovare questa curva fu proposto dal Leibnizio agli antagonisti del calcolo differenziala, i quali non poterono risolverlo.

PARALLASSE (*Astron.*). Questa parola, che deriva dal greco, *παραλλαξις*, *diversità di aspetto*, serve ad indicare in astronomia la differenza tra la posizione di un astro veduto dalla superficie della terra e la posizione che avrebbe, veduto dal suo centro.

Sia C il centro della terra (*Tav.* III, *fig.* 4), A un punto della sua superficie e P un astro. L'angolo APC formato dai raggi visuali AP e CP è la *parallasse*. Se l'astro fosse situato ad una distanza infinita rapporto alla grandezza del raggio AC della terra, come lo sono le stelle fisse, questi raggi diverrebbero paralleli, e l'angolo APC svanirebbe; ma se la distanza è comparabile col raggio AC, l'angolo APC conserva una grandezza sensibile, e la sua determinazione conduce, come in breve vedremo, alla determinazione della distanza dell' astro.

Il *luogo* di un astro sulla sfera celeste essendo il punto di questa sfera in cui lo projettiamo col raggio visuale condotto dall' occhio al suo centro, è evidente che l'effetto della parallasse è quello in generale di farci comparire gli astri, che hanno questa parallasse, meno elevati sull' orizzonte di quello che lo siano in realtà, vale a dire meno elevati di quel che ci sembrerebbero veduti dal centro della terra. Infatti, da questo centro l'astro P comparirebbe in *m* sulla sfera celeste, mentre dal punto A della superficie della terra l'astro ci comparisce in *n*.

A misura che un astro si alza al di sopra dell' orizzonte, l'angolo APC diviene sempre più piccolo, e finalmente svanisce se l'astro giunge allo zenit, perchè allora i due raggi visuali si confondono nella retta Cm''. Quest'angolo e

massimo quando l' astro è sull' orizzonte o in P'; e allora gli si dà il nome di *parallasse orizzontale*. In tutti gli altri casi prende il nome di *parallasse d'altezza*.

La parallasse orizzontale e la distanza dell' astro dal centro della terra sono due quantità talmente collegate tra loro, che basta conoscerne una per aver subito l' altra. Infatti, quando l' astro è sull' orizzonte in P', il triangolo P'AC, rettangolo in A, dà

$$1 : \text{sen}\, AP'C :: CP' : AC;$$

ma CP' è la distanza dell' astro, AC il raggio della terra e AP'C la parallasse orizzontale, perciò indicando respettivamente con d, r e p queste tre quantità, si ottiene

$$\text{sen}\, p = \frac{r}{d} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$d = \frac{r}{\text{sen}\, p} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Si passa facilmente dalla parallasse orizzontale alla parallasse di altezza osservando primieramente che, per una posizione qualunque P dell' astro al di sopra dell' orizzonte, il triangolo PAC dà

$$\text{sen}\, PAC : \text{sen}\, APC :: CP : AC.$$

Ora $PAC = P'AC + PAP'$, ossia $PAC = 90^\circ + h$, se si esprime con h l' angolo PAP', vale a dire l' altezza orizzontale dell' astro; perciò indicando per analogia con p' la parallasse di altezza APC, questa proporzione si riduce a

$$\text{sen}(90^\circ + h) : \text{sen}\, p' :: d : r;$$

donde si ottiene

$$\text{sen}\, p' = \frac{r\, \text{sen}(90^\circ + h)}{d} = \frac{r}{d} \cos h,$$

e per conseguenza

$$\text{sen}\, p' = \cos h\, \text{sen}\, p \quad \dots\dots\dots \quad (3),$$

ponendo in luogo di $\frac{r}{d}$ il suo valore $\text{sen}\, p$ dato dalla (1).

L' angolo p essendo in generale piccolissimo, si può nelle espressioni (1), (2) e (3) sostituire p al suo seno senza errore sensibile.

Per evitare le irregolarità dalle quali sembrerebbe affetta la posizione di un astro veduto nel medesimo tempo da diversi osservatori in diversi punti della superficie della terra, e per rendere così confrontabili tra loro tutte le osservazioni, si è convenuto di riferirle al centro della terra, supposta sferica. Così, ciò che comunemente si dice *luogo vero* di un astro è il suo luogo veduto da questo centro, mentre il *luogo apparente* è quello che è veduto dalla superficie, e comprende per conseguenza l' effetto della parallasse.

La determinazione esatta della parallasse di un astro è dunque tanto più importante, in quanto che essa fa conoscere non solo la sua distanza, ma è pure necessaria per ridurre il luogo apparente al luogo vero: quindi non fa maraviglia se in ogni tempo gli astronomi hanno rivolto i loro studj a cercare dei metodi per ottenere questa determinazione.

Vi ha un metodo semplicissimo e che non differisce in nulla da quello col quale si calcola la distanza di un oggetto inaccessibile osservandolo dalle due estremità di una base nota: consiste questo nel misurare, sotto uno stesso meridiano celeste, a distanze note, e nel medesimo istante, le altezze orizzontali di un astro, o le sue distanze dallo zenit. Per far meglio comprendere questo metodo, supponiamo due osservatori posti l'uno in A e l'altro in B (*Tav.* X, *fig.* 1), i quali osservino in un medesimo istante le distanze di un astro P dai loro zenit respettivi Z e Z', ed indichiamo con z e z' queste distanze che sono i complementi delle altezze orizzontali: per ciò che precede, indicando sempre con p la parallasse orizzontale, la parallasse di altezza per l'osservatore A sarà, indicandola con p',

$$p' = p\cos(90° - z), \text{ ossia } p' = p \operatorname{sen} z,$$

e quella dell'osservatore B, che indicheremo con p'', sarà egualmente

$$p'' = p \operatorname{sen} z'.$$

Per conseguenza si avrà

$$p' + p'' = p(\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z').$$

Ma p' è l'angolo APC e p'' l'angolo CPB, così $p'+p''$ è eguale all'angolo APB che si trova dato dall'arco del meridiano terrestre compreso tra gli osservatori. Infatti, sia α quest'arco del meridiano, ossia l'angolo ACB al centro della terra: siccome i quattro angoli del quadrilatero PACB sono equivalenti a quattro angoli retti, si avrà

$$\alpha + p' + p'' + \text{PAC} + \text{PBC} = 360°.$$

Inoltre si ha

$$\text{PAC} = 180° - \text{ZAP} = 180° - z,$$
$$\text{PBC} = 180° - \text{PBZ}' = 180° - z',$$

dunque sostituendo si ottiene

$$p' + p'' = z + z' - \alpha,$$

e per conseguenza

$$z + z' - \alpha = p(\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z'),$$

donde finalmente si trova

$$p = \frac{z + z' - \alpha}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z'}.$$

Questo metodo serve di base a molti altri, pei quali la ristrettezza del nostro piano ci costringe a rinviare il lettore ai trattati speciali.

La terra non essendo esattamente sferica, la parallasse orizzontale di un astro non può esser la stessa per tutti gli osservatori posti sulla sua superficie, perchè il valore di questa parallasse dipende da quello del raggio della terra, che è variabile. Per esempio, all'equatore ove il raggio terrestre è il più grande, la parallasse orizzontale sarà la più grande, mentre al polo ove il raggio terrestre è il più piccolo, la parallasse orizzontale sarà la più piccola; e in tutti i luoghi intermedj il valore della parallasse sarà egualmente intermedio tra i suoi due estremi. Bene inteso però che questi diversi valori debbonsi tutti riferire ad una stessa distanza dell'astro dalla terra, perchè quando questa distanza cambia, ne resultano necessariamente altre variazioni di grandezza nella parallasse. Quando

la distanza è la stessa, le parallassi orizzontali stanno tra loro nel rapporto dei raggi terrestri, perchè essendo p e p' le parallassi corrispondenti ai raggi r a r' si avrà per la relazione (1)

$$p=\frac{r}{d}, \quad e \quad p'=\frac{r'}{d},$$

donde

$$p : p' :: r : r',$$

e quindi

$$p'=p\frac{r'}{r}.$$

Ora, indicando con λ la latitudine di un punto della superficie della terra, e prendendo r' pel raggio di questo punto ed r pel raggio dell'equatore, si ha presso a poco (*Vedi* Terra)

$$\frac{r'}{r}=1-a\,\text{sen}^2\lambda,$$

ove a esprime lo schiacciamento della terra. Così la parallassa orizzontale p' per un luogo la cui latitudine è λ, è data dalla parallasse equatoriale orizzontale dalla espressione

$$p'=p(1-a\,\text{sen}^2\lambda)=p-ap\,\text{sen}^2\lambda.$$

Eccettuato il caso che si tratti della luna, la cui parallasse è molto grande, la differenza $ap\,\text{sen}^2\lambda$ è una quantità troppo piccola, perchè sia necessario il farne conto nei calcoli.

La parallasse orizzontale del sole è quella che più di ogni altra interessava il trovare, perchè essa ci fa conoscere quale è la distanza del sole dalla terra, e per conseguenza quali sono la distanze di tutti gli altri pianeti dal sole e dalla terra. Nulladimeno la sua determinazione non potendo ottenersi con nessuno dei metodi applicabili agli altri corpi celesti, essa non è ancora conosciuta con una esattezza perfetta. La *Connaissance des temps* la suppone eguale a 8″,8 nel suo valore medio; può peraltro dubitarsi che questa quantità sia un poco troppo grande, perchè dalle osservazioni dei passaggi del sole calcolate da Encke sembra resultare che questa parallasse media non oltrepassi 8″,5776. Per mezzo delle parallassi dei pianeti più vicini alla terra, come Marte e Venere, quando sono in congiunzione col sole, può calcolarsi la parallasse del sole: le parallassi stando sempre tra loro nel rapporto delle distanze, e questo rapporto dipendendo per la legge di Kepplero dalla durata conosciuta delle rivoluzioni periodiche, esporremo più minutamente questo metodo all'articolo Passaggio.

La parallasse di un astro non fa conoscere soltanto la sua distanza dalla terra, ma serve ancora a determinare il suo volume confrontandola col suo diametro apparente. Infatti, il diametro apparente di un astro è un arco di circolo descritto prendendo per raggio la sua distanza dalla terra; e questo diametro apparente fa conoscere il diametro reale quando la distanza è nota, perchè le grandezze degli archi simili di due archi differenti stanno tra loro come i raggi. Così, indicando con μ il diametro apparente di un astro in parti della circonferenza che ha per raggio l'unità, il diametro reale o il diametro espresso in parti della distanza dalla terra sarà μd; ma, per la relazione (1) $d=\frac{r}{p}$, dunque in-

dicendo con 2R il diemetro reale di un astro, si ha

$$R = \frac{\mu d}{2} = \frac{\mu r}{2p},$$

espressione che posta sotto la forma

$$\frac{R}{r} = \frac{\mu}{2p}$$

ci insegne che *il rapporto del raggio di un astro a quello della terra è eguale al diametro apparente di quest' astro diviso pel doppio della sua parallasse orizzontale.* Quando si conosce il diametro reale di un astro si conosce pure il suo volume supponendolo sferico (*Vedi* SFERA), e siccome d' altronde i volumi di due sfere stauno tra loro come i cubi dei raggi, così bastano i valori dei raggi per poter confrontare i volumi degli astri con quello della terra considerata come sferica.

Le parallassi orizzontali degli astri, i loro diametri reali e le loro distanze dalla terra, ossiano i loro *raggi vettori*, sono dunque quantità talmente tra loro legate che basta una sola di esse per trovare le altre.

La parallasse abbassando in generale il luogo vero degli astri non altera soltanto la loro altezza orizzontale, ma altera ancora il loro angolo orario e la loro distanza dal polo. I cangiamenti che ne resultano per questi due elementi formano ciò che dicesi comunemente le *parallasse di ascensione retta*, e la *parallasse di declinazione.* Queste due parallassi deduconsi facilmente dalla parallasse orizzontale.

La più grande di tutte le parallassi è quella della luna: il suo valore varie da $61' \frac{1}{2}$ fino a $54'$: la parallasse orizzontale media o quella che corrisponde alla distanza media della luna dalla terra è di $57'$. Ponendo questo valore nell' espressione (2), si trova per la distanza media

$$d = \frac{r}{\operatorname{sen} 57'} = (60{,}314)\, r.$$

Così queste distanza è un poco più di 60 volte il raggio terrestre. Pure dobbiamo fare osservare che le dimensioni dell' orbita lunare non essendo costanti, la distanza media egualmente che la parallasse medie variano anch' esse. Così, per esempio, negli elementi della luna riferiti al 1° Gennajo 1801 (*Vedi* LUNA) le distanza media è soltanto di 59,982 raggi terrestri

Le più grandi parallassi orizzontali dei diversi corpi celesti sono state determinate come appresso:

Sole.	8″,75
Mercurio.	14 ,58
Venere	29 ,16
Marte.	17 ,50
Giove	2 ,08
Saturno.	1 ,027
Urano.	0 ,415

Indicheremo ora come gli astronomi nel calcolo delle parallassi passino dalle coordinate del luogo di un astro riferito all' equatore e veduto dal centro della terra a quelle del suo luogo apparente. In altri termini, cerchiamo l' ascensione

retta e la declinazione *apparente* in funzione dell'ascensione retta e della declinazione *vera*.

Sia C il centro della terra preso per origine delle coordinate rettangolari, e supponiamo che l'asse delle x passi pel punto equinoziale di primavera, che l'asse delle y sia nel piano dell'equatore, e che quello delle z passi pel polo boreale di questo circolo. La posizione dell'astro E, soggetto alla parallasse, sarà conosciuta per mezzo delle sue distanze da questi tre assi: se dunque r indica il raggio CE della sfera celeste, A l'ascensione retta dell'astro, D la sua declinazione, si avrà

$$x = r \cos A \cos D,\quad y = r \,\mathrm{sen}\, A \cos D,\quad z = r \,\mathrm{sen}\, D.$$

Siano parimente X, Y, Z le coordinate del punto A nel quale si trova l'osservatore sulla superficie della terra, g l'ascensione retta dello zenit, ossia il tempo siderale del passaggio dell'astro pel meridiano, ed h la sua declinazione o la latitudine geocentrica; si avrà, indicando con ρ il raggio della terra,

$$X = \rho \cos g \cos h,\quad Y = \rho \,\mathrm{sen}\, g \cos h,\quad Z = \rho \,\mathrm{sen}\, h.$$

Finalmente, prendendo il luogo dell'osservazione per l'origine comune dei tre assi rettangolari respettivamente paralleli ai primi, e chiamando quindi r' la distanza dell'osservatore dall'astro, A', D' l'ascensione retta e la declinazione apparente di quest'astro, si avrà

$$x' = r' \cos A' \cos D',\quad y' = r' \,\mathrm{sen}\, A' \cos D',\quad z' = r' \,\mathrm{sen}\, D'$$

Ora, tra le coordinate del luogo vero e del luogo apparente esistono evidentemente le seguenti relazioni

$$x' = x - X,\quad y' = y - Y,\quad z' = z - Z,$$

le quali a motivo dei valori precedenti si cangiano in queste

$$r' \cos A' \cos D' = r \cos A \cos D - \rho \cos g \cos h,$$
$$r' \,\mathrm{sen}\, A' \cos D' = r \,\mathrm{sen}\, A \cos D - \rho \,\mathrm{sen}\, g \cos h,$$
$$r' \,\mathrm{sen}\, D' = r \,\mathrm{sen}\, D - \rho \,\mathrm{sen}\, h.$$

Ora, se si divide successivamente la seconda e la terza equazione per la prima, e se si fa $\frac{\rho}{r} = \mathrm{sen}\,\Pi$, essendo allora Π la massima parallasse di altezza, si avrà

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tang}\, A' &= \frac{\mathrm{sen}\, A \cos D - \mathrm{sen}\,\Pi \,\mathrm{sen}\, g \cos h}{\cos A \cos D - \mathrm{sen}\,\Pi \cos g \cos h} \\ \mathrm{tang}\, D' &= \frac{\cos A' (\mathrm{sen}\, D - \mathrm{sen}\,\Pi \,\mathrm{sen}\, h)}{\cos A \cos D - \mathrm{sen}\,\Pi \cos g \cos h} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a).$$

Queste due formule, attribuite ad Olbers, e che discendono naturalmente dal metodo analitico di Lagrange del quale abbiam fatto uso, danno il luogo apparente conoscendo il luogo vero e la parallasse di altezza: così il problema è risoluto. Ma in pratica riesce più semplice il calcolare le parallassi A'—A e D'—D di ascensione retta e di declinazione. Ora la prima delle equazioni (a) avendo luogo qualunque sia l'origine delle ascensioni rette, perciò si può togliere da tali ascensioni rette la stessa quantità, per esempio l'arco A, il che evidentemente equivale a cangiare la direzione degli assi delle x e delle y, lasciandogli però nel loro

piano primitivo. Così si ha subito

$$\operatorname{tang}(A'-A)=\frac{\operatorname{sen}\Pi\cos h\operatorname{sen}(A-g)}{\cos D-\operatorname{sen}\Pi\cos h\cos(A-g)};$$

ma la parallasse $A'-A$ essendo sempre piccolissima anco per la luna, potrà ridursi questa espressione in serie e non prenderne che i primi termini: allora si avrà in secondi di grado

$$A'-A=\frac{\operatorname{sen}\Pi\cos h}{\cos D}\cdot\frac{\operatorname{sen}(A-g)}{\operatorname{sen}1''}+\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\Pi\cos h}{\cos D}\right)^2\cdot\frac{\operatorname{sen}2(A-g)}{\operatorname{sen}1''}+\ldots.$$

Quanto alla parallasse di declinazione o di distanza polare, si ottiene essa meno facilmente dalle formule precedenti. Ci basterà il dire che se si fa $\Delta=90°-D$ e $\Delta'=90°-D'$, essendo Δ la distanza polare vera e Δ' la distanza polare apparente, si trova per la parallasse della distanza polare la seguente formula data da Delambre

$$\Delta'-\Delta=\frac{\operatorname{sen}\Pi\operatorname{sen}h}{\cos\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\Delta-\theta)}{\operatorname{sen}1''}+\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\Pi\operatorname{sen}h}{\cos\theta}\right)^2\cdot\frac{\operatorname{sen}2(\Delta-\theta)}{\operatorname{sen}1''}+\ldots.$$

facendo

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{\cot h\cos(A'+A-g)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}.$$

Nella determinazione delle longitudini terrestri per mezzo degli ecclissi del sole o delle occultazioni delle stelle, i calcoli si rendono più esatti e più spediti prendendo per coordinate circolari degli astri quelle riferite all'ecclittica, e allora diviene indispensabile il passare dalle ascensioni rette e dalle declinazioni alle longitudini e alle latitudini (*Vedi* Trasformazione della Coordinata). Ma deve osservarsi che le formule di parallasse sono, nel caso attuale, assolutamente della stessa forma delle precedenti. Infatti, le ascensioni rette si cangiano in longitudini e le declinazioni in latitudini; così all'ascensione retta dello zenit deve sostituirsi la sua longitudine, che prende pure il nome di longitudine del *nonagesimo*, come alla sua declinazione deve sostituirsi la sua latitudine, che è il complemento dell'altezza del nonagesimo.

Parallassa annua *dell' orbita della terra*. S' indica con questo nome la differenza tra il luogo di un astro veduto dalla terra e il suo luogo veduto dal sole. Serve essa a calcolare la longitudine geocentrica di un pianeta per mezzo della sua longitudine eliocentrica.

La parallasse annua si ottiene supponendo l' osservatore in un punto dell' ecclittica, ed allora la latitudine dello zenit è nulla, la longitudine di questo punto rappresenta la longitudine terrestre, e Π indica la parallasse annua o della grand' orbita. Chiamando dunque ♁ la longitudine eliocentrica della terra, ☉ il luogo del sole, p la parallasse annua in longitudine ed π quella in latitudine, si avrà

♁ = ☉ + 180°,

ed è facile il dimostrare che queste due parallassi sono

$$p=\frac{\Pi\operatorname{sen}(L-♁)}{\cos\lambda},\quad \pi=\Pi\operatorname{sen}\lambda\cos(L-♁),$$

ove L e λ sono la longitudine e la latitudine eliocentrica della stella.

Parallasse mensuale. Piccola ineguaglianza prodotta nel luogo vero del sole dall'attrazione della luna sulla terra.

Parallasse *delle stelle fisse*. Siccome la distanza dei pianeti dalla terra si determina per mezzo della loro parallasse, così erasi cercato di trovare nello stesso modo quella delle stelle fisse: ma fin qui tutti i mezzi posti in opera dagli astronomi erano riusciti vani. Attesa la distanza immensa di tali astri non si era potuto scorgere in essi parallasse veruna non solo rispetto al raggio terrestre ma nemmeno rapporto al diametro intero dell'orbita della terra: le osservazioni le più accurate non erano riuscite a dare valore nessuno all'angolo dei due raggi visuali diretti dalle due estremità dell'asse maggiore di quest'orbita alla stella apparentemente la più vicina: quindi, riflettendo che se quest'angolo fosse stato di un solo secondo i moderni strumenti l'avrebber fatto conoscere, ed in questo caso la distanza delle stelle fisse sarebbe stata di circa *otto milioni di milioni* di leghe, si era concluso che la stella la più vicina doveva trovarsi ad una distanza maggiore di questa, comunque enorme possa essa sembrare. L'onore di avere scoperta una parallasse nelle stelle fisse appartiene all'astronomo Bessel che mediante una lunga serie di delicate ed esattissime osservazioni è giunto a scoprire una parallasse di $0'',31$ nella 61ª del Cigno, come abbiamo già accennato all'articolo Distanza: donde si è dedotto che questa stella è lontana da noi più di *venti milioni di milioni* di leghe.

PARALLATTICO (*Astron.*). Si applica in astronomia questo epiteto a tutto ciò che ha relazione alla *parallasse* degli astri.

L'*angolo parallattico* è l'angolo formato al centro di un astro dal suo verticale e dal suo circolo di declinazione. Questo nome gli è stato dato perchè serve a calcolare la parallasse.

Il *triangolo parallattico* è il triangolo formato dal raggio della terra e dalle due rette condotte dalle sue estremità al centro di un astro. L'angolo di queste due rette è l'angolo della parallasse o la parallasse stessa.

Righe parallattiche. È uno strumento di cui si servì Tolomeo per osservare la parallasse della luna.

PARALLELA. (*Geom.*). Due linee rette si dicono *parallele*, quando essendo situate nel medesimo piano esse non possano incontrarsi, ancora supponendole prolungate indefinitamente.

Due rette le quali, in uno stesso piano, convergono l'una verso l'altra, ovvero hanno direzioni differenti essendo sufficientemente prolungate, si tagliano sempre in un punto, e la differenza dalle loro direzioni costituisce ciò che si chiama un *angolo* (*Vedi* questa parola); ma se queste rette non convergono, cioè, se esse hanno una stessa direzione, diviene evidente che prolungandole indefinitamente esse non possano mai incontrarsi, poichè la differenza delle loro direzioni essendo nulla, esse non potrebbero formare un angolo. Possiamo dunque definire le rette parallele *delle rette che hanno uno stessa direzione*.

I *piani paralleli* sono ugualmente piani, i quali non possono mai incontrarsi essendo prolongati anche all'infinito.

Quando due rette parallele son tagliate da una retta trasversale, esse formano con quest'ultima più angoli i cui rapporti sono stati determinati alla parola Angolo.

Nell'*ottico*, si chiamano *raggi paralleli* quelli che partono da un punto luminoso situato ad una distanza infinita dall'occhio. Dall'osservare che due rette, il cui punto di concorso è lontanissimo, diventano sensibilmente parallele, alcuni geometri hanno definito le parallele *delle rette le quali concorrono all'infinito*. Questa definizione è viziosa, per la loro natura, le parallele non concorrono nè all'infinito, nè al finito, e se possiamo in realtà considerare come pa-

rallele le rette il cui angolo è infinitamente piccolo, ciò succede perchè quest' angolo, o la differenza infinitamente piccola delle direzioni delle rette, non ha alcun valore paragonabile con le quantità realizzabili nel campo dell' esperienze, vale a dire, con le grandezze capaci di essere l' oggetto di un' intuizione sensibile.

Nell' *astronomia* si dà il nome di *circoli paralleli* a tutti i circoli formati dall' intersezioni della sfera celeste con più piani paralleli tra loro, così:

I Paralleli *di declinazione* sono piccoli circoli della sfera paralleli all' equatore.

I Paralleli *di latitudine* sono i piccoli circoli paralleli all' ecclittica.

I Paralleli *di altezza* o *almicantari*, sono circoli paralleli all' orizzonte.

In *geografia*, i Paralleli *di latitudine* sono i piccoli circoli della sfera terrestre paralleli all' equatore terrestre.

PARALLELISMO. (*Geom.*) Stato di due oggetti paralleli. In *astronomia*, si chiama *parallelismo dell' asse della terra* la proprietà che ha quest' asse di non cangiare direzione in tutta la durata della rivoluzione annuale della terra intorno del sole. Ed è questa situazione costante dell' asse della terra rapporto al piano dell' ecclittica che produce il cangiamento delle stagioni. (*Vedi* Terra).

PARALLELEPIPEDO (*Geom.*). Prisma la cui base è un parallelogrammo, o poliedro terminato da sei parallelogrammi di cui gli opposti sono paralleli ed ugnali.

Quando i parallelogrammi sono dei rettangoli, il *parallelepipedo* dicesi *rettangolo*. Se questi rettangoli sono dei quadrati uguali, il parallelepipedo prende il nome di *cubo* ovvero di *esaedro regolare*. (*Vedi* Solido.)

PARALLELOGRAMMO (*Geom.*). Figura piana terminata da quattro rette, e i cui lati opposti sono paralleli.

Questa figura prende il nome di *rettangolo* (*Vedi* questa parola), quando i suoi quattro angoli sono retti.

Gli vien dato ancora il nome di *losanga* o *rombo*, quando i suoi quattro lati sono ugnali, senza che i suoi angoli siano retti.

Essa prende finalmente il nome di *quadrato*, quando i suoi quattro lati sono uguali, e i suoi quattro angoli retti. (*Vedi* Quadrato.)

Le proprietà principali dei parallelogrammi sono le seguenti.

Sia ABCD (*Tav.* X, *fig.* 5) una tal figura. Dalla definizione, i lati opposti AB, CD e AD, BC sono paralleli tra loro; così unendo i vertici degli angoli opposti A e C, B e D con delle rette AC, BD, queste rette, che si chiamano *diagonali*, divideranno, ciascuna in particolare, il parallelogrammo in due triangoli uguali. Infatti se consideriamo i due triangoli ABD, BCD, formati dalla diagonale BD, vediamo che questi triangoli hanno un lato comune BD e i loro angoli sono respettivamente uguali ciascuno a ciascuno; poichè gli angoli ADB e DBC sono *alterni-interni*, e segue il medesimo degli angoli ABD e BDC. (*Vedi* Angolo). Questi triangoli hanno dunque un lato ugnale adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno, e sono conseguentemente uguali (*Vedi* Triangolo); si ha dunque ancora AB = CD, AD = BC e l' *angolo* DAB = all' *angolo* DCB. Segue il medesimo dei due triangoli ACB, ADC formati dalla diagonale AC.

Possiamo dunque concludere immediatamente che:

1.° I lati opposti e gli angoli opposti di un parallelogrammo sono respettivamente ugnali.

2.° I due angoli adiacenti ad uno stesso lato sono supplemento l' uno dell' altro, ovvero, la loro somma è equivalente a quella di due angoli retti.

3.° Le due diagonali di un parallelogrammo si tagliano respettivamente in due parti uguali.

A queste proprietà aggiungeremo la seguente, dimostrata alla parola Area.

4.° L'area di un parallelogrammo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, ovvero, più generalmente, al prodotto di uno qualunque dei suoi lati per la perpendicolare che misura la distanza di questo lato al suo opposto.

Le conseguenze di quest'ultima, sono:

5.° Due parallelogrammi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

6.° Due parallelogrammi della medesima altezza stanno tra essi come le loro basi.

7.° Due parallelogrammi qualunque stanno tra essi nel rapporto composto delle loro basi e delle loro altezze.

I parallelogrammi offrono ancora una proprietà assai osservabile che ci contenteremo di enunciare, perchè essa non è che un corollario di una proprietà appartenente a tutti i triangoli, e la di cui dimostrazione sarà data alla parola *triangolo*.

8.° La somma dei quadrati delle due diagonali di un parallelogrammo è equivalente alla somma dei quadrati dei quattro lati.

Parallelogrammo delle forze. (*Vedi* Forza.)

Parallelogrammo della velocita'. (*Vedi* Velocita'.)

Parallelogrammo del Newton. Regola immaginata dal Newton per trovare i primi termini delle serie in x, la quale dà il valore di y quando queste due variabili entrano in un'equazione algebrica data. *Vedi* il Newton, *Metodo delle Serie infinite*. Il Maclaurin, *Algebra*; ed il Cramer, *Analisi delle linee curve*. (*Vedi* in questo Dizionario la parola Serie.)

PARALLELOGRAMMO ARTICOLATO (*Mecc.*). Quest'organo meccanico, inventato dal celebre Watt per conservare la verticalità dell'asta dello stantuffo nella macchine a vapore, è divenuto oggi uno dei apparecchi i più usitati. I limiti del nostro Dizionario non ci permettono altre particolarità oltre quelle che abbiamo date all'articolo Composizione delle macchine § IV.

PARAMETRO. (*Geom.*). Linea retta costante che entra nell'equazioni delle sezioni coniche. Essa è la doppia ordinata che passa per un fuoco. (*Vedi* Ellisse, Iperbola e Parabola).

Si chiama ancora generalmente *parametro*, la costante che si trova nell'equazione di una curva qualunque. Per esempio, nella curva la cui equazione è $y^2 = axy + 4x^2$, a è il *parametro* e rappresenta una linea data.

Questa parola, derivata da παρα *uguale* e da μετρον *misura* indica che la linea che porta questo nome determina le dimensioni dalla curva.

PARDIES (Ignazio Gastone), valente geometra dell'ordine dei gesuiti, nacque nel 1636 a Pau e morì nel 1673 a Parigi, ove professava con grido le matematiche nel collegio di Luigi il Grande. Le opere sue principali sono: I *Horologium thaumanticum duplex*, Parigi, 1662, in-4: quest'opuscolo contiene la descrizione dello *Sciatere*, strumento ingegnoso per delineare ogni specie di orologi a sole anche sulle superficie irregolari; II *Dissertatio de motu et natura cometarum*, Bordeaux, 1665, in-12; III *Élémens de géométrie*, Parigi, 1671, in-12; IV *Statique ou science des forces mouvantes*, ivi, 1673, in-12.

PARI (*Aritm.*). Un numero *pari* è quello del quale possiamo prendere esattamente la metà o che è un multiplo di 2.

Se si rappresenta con m uno qualunque dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, ec. la forma generale di tutti i *numeri pari* sarà $2m$. Zero si considera sempre come un numero pari, perchè esso diventa numero *impari* aggiungendoli l'unità.

Si chiama ancora *parimente pari* un numero pari la cui metà è pure un numero pari, mentre quello la cui metà è un numero impari si chiama *pari-*

mente impari. Per esempio, 12 è un numero *parimente pari*, e 14, un numero *parimente impari*.

PARZIALE. Differenza parziali. (*Calcolo integrale*). L'integrazione dell'equazioni alle differenze parziali è un ramo importante del calcolo integrale, poichè i problemi fisico-matematici i più utili conducono a tali equazioni. La sua scoperta si attribuisce generalmente al D'Alembert che vi giunse mediante le sue ricerche sopra le cordi vibranti; ma avanti di lui, l'Eulero ancora aveva integrato completamente un'equazione alle differenze parziali (*Memorie di Pietroburgo*, *tomo* 7), e quantunque le prime applicazioni di questo calcolo siano dovute al D'Alembert e formino uno dei suoi titoli più belli di gloria, e incontestabile che la prima idea appartiene all'Eulero. Questo gran geometra, condotto dai lavori del D'Alembert a questo ramo della scienza dei numeri che sembrava aver dimenticato, ha ancora avuto il vantaggio di presentarne i resultamenti sotto una forma molto più semplice, e la quale è stata adottata da tutti i matematici.

Abbiamo già detto (Diff. e Integrala) che la *differenza parziale* di una funzione di due o di più quantità variabili è la differenza di questa funzione presa facendo variare solamente una delle variabili. Per esempio, $\varphi(x,y)$ essendo una funzione di due variabili x ed y, la differenza

$$\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y),$$

presa considerando y come una quantità costante è la *differenza parziale* di $\varphi(x,y)$ rapporto ad x. Ugualmente

$$\varphi(x,y+\Delta y)-\varphi(x,y)$$

è la *differenza parziale* di $\varphi(x,y)$ rapporto ad y.

Queste differenze parziali si esprimono generalmente con la notazione

$$\left(\frac{\Delta\varphi(x,y)}{\Delta x}\right)\Delta x,\quad \left(\frac{\Delta\varphi(x,y)}{\Delta y}\right)\Delta y.$$

Quando si tratta delle differenziali si ha ugualmente

$$\left(\frac{d\,\varphi(x,y)}{dx}\right)dx,\quad \left(\frac{d\,\varphi(x,y)}{dy}\right)dy,$$

per le *differenziali parziali* della funzione $\varphi(x,y)$ prese respettivamente rapporto ad x a rapporto ad y.

1. Si chiama *equazione alle differenze parziali* qualunque equazione nella quale si trovano le quantità

$$\Delta(x,y),\ x,\ y,\ \frac{\Delta\varphi(x,y)}{\Delta x},\ \frac{\Delta\varphi(x,y)}{\Delta y},$$

combinate in un modo qualunque con delle quantità costanti; ovvero, più generalmente, u essendo una funzione delle variabili x, y, z, ec., qualunque equazione che contiene

$$u,\ x,\ y,\ z,\ \text{ec.},\ \frac{\Delta u}{dx},\ \frac{\Delta u}{dy},\ \frac{\Delta u}{dz},\ \text{ec.}$$

Se le differenze sono infinitamente piccole, l'equazioni si dicono alle *differenziali parziali*. Il caso delle differenze infinitamente piccole, è il solo pel quale si siano trovati resultamenti generali, che i nostri limiti permetteranno solamente d'indicare.

2. u essendo sempre una funzione di più variabili, e $\frac{du}{dx}$, la sua derivata differenziale presa non facendo variare che x, se indichiamo con P una funzione qualunque di queste medesime variabili, ma che non contenga u, l'equazione

$$\frac{du}{dx} - P = 0,$$

sarà un'equazione differenziale parziale del prim'ordine. Questa è la più semplice di tutte.

L'integrazione di quest'equazione non presenta alcuna difficoltà, poichè moltiplicandole per dx possiamo dargli la forma

$$\frac{du}{dx} dx = P dx,$$

donde integrando rapporto ad x solamente

$$u = \int P dx + C.$$

In questo caso, C non indica una semplice costante arbitraria, ma una funzione interamente arbitraria di tutte le variabili, esclusa la variabile x, che contiene la funzione u. Se per esempio, questa funzione u non contiene che due variabili x ed y, l'integrale dell'equazione

$$\frac{du}{dx} - P = 0,$$

sarà

$$u = \int P dx + fy,$$

fy essendo una funzione arbitraria di y e di quantità costanti.

3. Quando P contiene u, l'equazione proposta rientra nel caso dell'equazioni differenziali a due variabili; ma occupiamoci subito del caso il più generale dell'equazioni differenziali parziali del prim'ordine e del primo grado. Siano P, Q, R delle funzioni le quali contengono le variabili u, x ed y, la forma

$$P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} = R \ldots\ldots (1)$$

corrisponde evidentemente a questo caso generale. Facciamo per abbreviare

$$\frac{du}{dx} = p, \quad \frac{du}{dy} = q,$$

l'equazione (1) diventerà

$$Pp + Qq = R \ldots\ldots\ldots (2),$$

e se ne dedurrà

$$p = \frac{R - Qq}{P}.$$

Ora la differenziale totale di u è (*Vedi* DIFFERENZA)

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$$
$$= p dx + q dy.$$

Sostituendo il valore di p in questa differenziale totale, viene

$$\mathrm{P}du-\mathrm{R}dx=q(\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx) \ldots\ldots (3).$$

Ora si presentano due casi: 1° il primo membro $\mathrm{P}du-\mathrm{R}dx$ non contiene che le variabili u ed x, nel mentre che la funzione $\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx$ non contiene che le variabili y ed x; 2° Queste due quantità contengono l'una o l'altra, o tutte due nello stesso tempo le tre variabili u, x, y. Nel primo caso, se indichiamo con μ il fattore che rende $\mathrm{P}du-\mathrm{R}dx$ una differenziale esatta, e con μ' quello che produce lo stesso effetto sopra $\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}\mathrm{D}x$ (*Vedi* INTEGRALE), avremo indicando con M ed N queste differenziali esatte

$$\mathrm{P}du-\mathrm{R}dx=\frac{1}{\mu}\,d\mathrm{M},$$

$$\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx=\frac{1}{\mu'}\,d\mathrm{N};$$

e l'equazione (3) diventerà

$$\frac{1}{\mu}\,.\,d\mathrm{M}=\frac{q}{\mu'}\,.\,d\mathrm{N},$$

donde, moltiplicando per μ e integrando

$$\mathrm{M}=\int\frac{q\,\mu}{\mu'}\,d\mathrm{N};$$

ma perchè il secondo membro sia integrabile bisogna che $\frac{q\,\mu}{\mu'}$ sia una funzione qualunque di N; poniamo perciò $\frac{q\,\mu}{\mu'}=\varphi'(\mathrm{N})$ ed avremo

$$\mathrm{M}=\int\varphi'\left(\mathrm{N}\right)d\mathrm{N}=\varphi\left(\mathrm{N}\right),$$

φ indicando una funzione arbitraria.

Così per integrare l'equazione differenziale parziale

$$\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q=\mathrm{R},$$

basta d'integrare le due equazioni ausiliari

$$\mathrm{P}du-\mathrm{R}dx=0,$$
$$\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx=0,$$

e indicando con M l'integrale della prima e con N quello della seconda, si ha

$$\mathrm{M}=\varphi(\mathrm{N}),$$

$\varphi(\mathrm{N})$ essendo una funzione arbitraria di N.

4. Proponiamoci, per esempio, l'equazione

$$\frac{du}{dx}\,y-\frac{du}{dy}\,x=0 \ldots\ldots (3),$$

qui $\mathrm{P}=y$, $\mathrm{Q}=x$, $\mathrm{R}=0$; e l'equazioni ausiliari sono

$$y\,du=0,$$
$$y\,dy+x\,dx=0,$$

i di cui integrali sono

$$M = u,$$

$$N = \frac{y^2+x^2}{2},$$

donde

$$u = \varphi\left(\frac{y^2+x^2}{2}\right),$$

ovvero semplicemente

$$u = \varphi(x^2+y^2).$$

La natura della funzione arbitraria indicata dalla caratteristica φ non dipende che dalle condizioni particolari del problema che conduce all' equazione (3). Presa in tutta la sua generalità, l' integrale di quest' equazione abbraccia tutte le funzioni possibili di y^2+x^2.

5. Quando le funzioni

$$Pdu - Rdx,$$
$$Pdy - Qdx,$$

contengono le tre variabili u, x ed y, non possiamo integrare isolatamente, ma è ancora possibile di riportare l' equazione (2) in un' altra

$$dM = \varphi'(N)dN \;\ldots\ldots\; (4),$$

la quale sia una differenziale esatta, poichè considerando M ed N come contenenti nello stesso tempo u, x ed y, si ha per le differenziali totali di queste quantità

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dx}dy + \frac{dM}{du}du,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{du}du,$$

il che rende l' equazione (4),

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{du}du =$$

$$\varphi'(N)\left[\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{du}du\right],$$

ma quest' ultima deve accordarsi con l' equazione (3): così tirando dall' una e dall' altra il valore di du, siccome si ha

$$du = qdy - \frac{qQ}{P}dx + \frac{R}{P}dx,$$

$$du = \frac{\varphi'(N)\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dy}}{\varphi'(N)\frac{dN}{du} - \frac{dM}{du}}dy + \frac{\varphi'(N)\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dx}}{\varphi'(N)\frac{dN}{du} - \frac{dM}{du}}dx,$$

si trova, uguagliando i coefficienti di dx e di dy,

$$q=\frac{\varphi'(N)\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dy}}{\varphi'(N)\frac{dN}{du}-\frac{dM}{du}},$$

$$\frac{R-qQ}{P}=\frac{\varphi'(N)\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{du}}{\varphi'(N)\frac{dN}{du}-\frac{dM}{dx}}.$$

Donde si ottiene, eliminando q, l'equazione finale

$$\varphi'(N)\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dx}=$$

$$-\frac{Q}{P}\left[\varphi'(N)\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dy}\right]-\frac{R}{P}\left[\varphi'(N)\frac{dN}{du}-\frac{dM}{du}\right].$$

Possiamo a motivo delle due funzioni iocognite M ed N, dividere quest'equazione in due altre, uguagliando separatamente a zero la parte indipendente dal fattore $\varphi'(N)$, e quella che è moltiplicata de questo fattore. Si ha così

$$\frac{dM}{dx}+\frac{Q}{P}\frac{dM}{dy}+\frac{R}{P}\frac{dM}{du}=o,$$

$$\frac{dN}{dx}+\frac{Q}{P}\frac{dN}{dy}+\frac{R}{P}\frac{dN}{du}=o,$$

sistema d'equazioni, l'integegrazioni delle quali darà le funzioni M ed N.

6. In un gran numero di casi possiamo dispensarci di ricorrere a queste equazioni, sia con l'eliminare una delle quentità differenziali, sia con l'introdurre una nuova quantità indeterminata, o finalmente, sia col far concorrere questi due metodi. Noi non possiamo entrare in queste particolarità per le quali come pure per l'equazioni degli ordini superiori al primo, bisogna consultare il gran *Trattato del calcolo differenziale* del Lacroix. *Vedi* ancora le *Memorie di Berlino* Anni 1747, 1748, 1750, 1763 e 1774; e quelli dell'*Accademia delle Scienze* di Parigi, Anno 1787.

PASCAL (Biagio). L'ammirazione profonda che gli scritti polemici di quest'uomo celebre eccitano tuttora in Francia e dovunque si hanno in pregio i grandi talenti resi anco più nobili da grandi virtù, si è estesa a tutte le produzioni di quest'ingegno originale e profoodo. L'alta opinione che si è concepita di Pascal non meno come filosofo e geometra che come letterato ed apologista della religione cristiana è talmente radicata che può forse sembrar temerario l'esaminare su quali fondamenti essa riposi. La maggior parte de'suoi biografi, di quelli ancora che per alcuni rapporti si sono mostrati avversarj implacabili delle sue opinioni, non esitano ad assegnarli nella storia della scienza uno dei seggi i più eminenti cui possa aspirare l'ingegno umano. In questo giudizio havvi però più passione che ragione. Senza dubbio quel nobile ed acuto intelletto in quel corpo debole e malato, quella rara fermezza unita a tanta mansuetudine e dolcezza,

quel talento fiero ed elevato che pareva quasi intento a guadagnarsi gli applausi della moltitudine col vestirsi di tanta modestia e semplicità, quella maravigliosa fanciullezza, quell'adolescenza sì attiva e laboriosa, quella tristezza contemplativa che domina costantemente nel corso sì breve di quella vita consacrata interamente al lavoro e al patimento, tuttociò in fine che di bello vi ha, di straordinario, di commovente nel carattere, nell'organizzazione e nell'ingegno di Pascal sarà sempre degno del più vivo interesse, della più profonda ammirazione. Ma quando non si dubita di paragonare Pascal col gran Cartesio, di assomigliarlo agli uomini che come lui hanno aperto allo spirito umano il campo illimitato delle cognizioni nel quale oggi signoreggia, si esagera evidentemente l'importanza reale dei lavori di questo illustre scrittore. Noi non cerchiamo certamente di menomare questa fama sì bella e sì nazionale, ma gl'interessi della verità ci sembrano superiori a tutte le considerazioni che avrebbero potuto farci accettare senza esame i giudizj di cui sono state l'oggetto le produzioni di Pascal.

Biagio Pascal nacque a Clermont, capitale della provincia d'Alvernia il 19 Giugno 1623. Suo padre, Stefano Pascal, presidente della corte de' sussidj di quella città, era un uomo di un merito distinto. Fu il solo maestro del giovine Biagio, suo unico figlio. Questo fanciullo manifestò dall'età più tenera una intelligenza prodigiosa, che forse accrebbe l'interesse e la premura di cui era l'oggetto. Nel 1631, Stefano Pascal vendè la sua carica e si recò a Parigi per attendere con maggior successo all'educazione de' suoi figli, giacchè il giovine Biagio aveva due sorelle, e la morte della loro madre imponeva al padre dei doveri che adempiè in tutta l'estensione con religioso affetto. Egli era in stretta relazione con alcuni dotti di quell'epoca come Mersenne, Roberval, Mydorge, che sovente riunivansi nella di lui casa, e il giovine Pascal non tardò ad essere ammesso tra questi personaggi distinti per il loro sapere e per le loro virtù, meno come uno scolare di cui si volessero coltivare con interesse le felici disposizioni, che come un maestro da cui ricever si potevano utili consigli. È noto come quella società intima, che aveva relazioni e corrispondenze con tutti i dotti dell'Europa, fu la cuna dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

Il padre di Pascal, che si occupava molto di matematiche, non aveva creduto di dovere iniziare suo figlio nello studio di queste scienze sublimi prima che avesse acquistato altre cognizioni generali ch'ei giudicava di un'utilità più indispensabile per l'età sua. Si assicura però che il giovine Pascal in età di dodici anni, senz'altra guida che la sola sua penetrazione e l'inclinazione che lo traeva allo studio che momentaneamente gli aveva interdetto la prudenza forse esagerata di suo padre, giunse a crearsi da se stesso una geometria dando alle figure che disegnava delle definizioni particolari che esprimevano le idee che se n'era formato. Così, le linee erano per lui *righi* (*barres*), e i circoli, *tondi*, e tale è il legame logico e necessario delle prime verità geometriche, che il giovine Pascal giunse a scoprire, procedendo di deduzione in deduzione, la trentaduesima proposizione di Euclide, che cioè la somma dei tre angoli di un triangolo è eguale a due angoli retti. Le testimonianze le più ineccezionabili hanno attestato la realtà di questo fatto che sembrerebbe meno inconcepibile se si riflettesse all'influenza che le conversazioni degli amici di suo padre aveano dovuto esercitare sulla mente, d'altronde sì superiore, di Pascal. Questa particolarità storica, di cui difficilmente potrebbesi verificare l'esattezza, perchè Pascal non si è in seguito curato di rivelarci il metodo da lui tenuto, c'inspira almeno una riflessione che quì non sembrerà fuor di luogo: ed è questa, che qualunque sistema assoluto di educazione è vizioso. Non si possono dirigere che le menti ordinarie, ma si deve lasciare la loro libera spontaneità agl'ingegni che di buon'ora rivelano le loro simpatie e le loro tendenze. Non vi ha ragione nessuna per applicare la mente

di un fanciullo ad un ramo di cognizioni piuttosto che ad un altro, mentre può esservi molto danno a contrariare delle disposizioni dominanti ed esclusive in un giovine spirito. La premura del padre e del maestro deve rivolgersi meno a seguire un piano sistematico d' istruzione che a scoprire quelle disposizioni energiche nelle quali è riposto l' avvenire di un fanciullo.

Comunque sia, il padre di Pascal, dice la signora Périer sua sorella, alla quale dobbiamo una storia della sua vita, rimase *atterrito* della penetrazione di suo figlio, ma ebbe almeno l'accortezza di renunziare tosto al piano di educazione che si era formato per lui. Da quel momento il giovine Pascal potè dedicarsi non più nella solitudine del suo ingegno allo studio delle matematiche, ed in breve fu ammesso nella società di cui abbiamo di sopra parlato, e fu consultato su tutti gli argomenti che vi si trattavano. In età di sedici anni, dice Montucla, compose un trattato delle sezioni coniche, ove tuttociò che era stato dimostrato da Apollonio trovavasi elegantemente dedotto da una proposizione generale. Mersenne parla con elogio di questo trattato nella sua *Harmonia universalis*, e Cartesio non potendo credere che fosse l' opera di un fanciullo di sedici anni l'attribuì a Pascal padre o a Désargues. L' opinione di quest' uomo sommo non era forse priva affatto di fondamento. Nulladimeno è presso a poco da quest' epoca che prendono data i lavori scientifici di Pascal, dei quali dobbiamo occuparci esclusivamente trascurando le particolarità biografiche della sua vita che non vi si riferiscono in un modo intimo.

La *macchina aritmetica* è, nell' ordine cronologico, la prima produzione importante dell' ingegno di Pascal. Suo padre, che era stato nominato intendente di Rouen, gli faceva fare tutti i calcoli che esigevano le operazioni delle quali era incaricato. Questi calcoli non potevano esser molto complicati, ma suggerirono a Pascal l'idea di aiutare i calcolatori che sarebbero venuti dopo di lui, e si applicò alla costruzione della sua macchina con una perseveranza ed una tenacità che furono causa dello stato infelice di salute nel quale visse in seguito. È probabile infatti che le ricerche faticose alle quali dovè darsi nell' età in cui il corpo prende il suo sviluppo, alterassero profondamente la sua costituzione. Sotto il doppio rapporto di questa trista conseguenza e della poca utilità ed importanza della *macchina aritmetica*, duole estremamente che Pascal abbia impiegato in questa invenzione un tempo sì prezioso della sua vita.

Il *triangolo aritmetico* che Pascal fece conoscere nel 1654 merita una più seria attenzione. Pascal vi fu condotto dal desiderio di dare la soluzione di alcuni problemi sui giuochi di azzardo che gli erano stati proposti. Le numerose applicazioni alle quali si prestava questa combinazione aritmetica inspirarono a Pascal nuove ricerche sulla teoria dei giuochi, che può riguardarsi come il primo fondamento del *calcolo delle probabilità*, divenuto poscia un ramo importantissimo della scienza dei numeri nelle mani dei grandi geometri che l'hanno esteso e perfezionato dopo Pascal. *Vedi* Probabilità.

Pascal aveva promesso nel 1654 alla società della quale faceva parte, e ch' ei chiamava *Accademia delle matematiche*, una numerosa serie di opere matematiche, sulle quali lavorava, e delle quali sarebbe ora inutile il riportare i titoli, tanto più che dolorosi avvenimenti non gli permisero di realizzare le speranze che dava allora a' suoi amici. Questa nomenclatura che si trova riportata da tutti i biografi di Pascal prova soltanto che quasi tutti i rami della scienza erano stati l' oggetto delle sue meditazioni. Ma è noto come in quell' epoca trasportato da focosi cavalli corse il più grave pericolo di perder la vita nella Senna, e come questo accidente terminò di rovinare la salute sua già delicata e vacillante. Cessò lungo tempo di occuparsi delle matematiche, e le sue relazioni con Porto Reale egualmente che la disposizione di spirito nella quale lo ponevano le sue abitudini

di devozione, lo fecero mescolare nelle questioni del giansenismo e del molinismo delle quali è stato enco troppo parlato. Sebbene tutti gli scritti pubblicati da Pascal sulle materie teologiche che gli avvenne allora di trattare gli abbiano acquistato la più brillante reputazione, non esiteremo a dire che la verità non si trovava punto interessata in quella discussione puerile ad onta del suo carattere religioso, e che deve deplorarsi la risoluzione che tolse Pascal alla scienza per gettarlo in quella polemica, che sarebbe da lungo tempo dimenticata se non fosse egli sopraggiunto a prestarle l'appoggio della sua eloquenza.

Nulladimeno fu verso la fine della sua vita e quando era già in preda a tutti i patimenti che ne abbreviarono il corso, ch' ei si occupò del problema della *cicloide*, che ebbe troppa celebrità e la cui storia è troppo nota perchè dobbiamo qui trattenerci a riferirla di nuovo (*Vedi* Cicloide). Dopo avere, sotto il nome di Dettonville, proposto ai geometri la soluzione di diversi problemi relativi a questa curva, che Mersenne aveva conosciuta ed indicata col nome di *girella* (*roulette*) senza accennare nessuna delle sue proprietà, Pascal pubblicò la sua *Storia della girella chiamata altrimenti trocoide o cicloide*. Quest' opera assai notabile produsse una gran sensazione nei geometri di quel tempo, ma gli ammiratori entusiasti di Pascal vi cercherebbero invano gli elementi del *calcolo differenziale* che non si trovano in questa produzione celebre come non esistono nemmeno nella teoria *dei massimi e dei minimi* di Fermat.

È noto che la fisica deve a Pascal la famosa esperienza del Puy-de-Dôme, che comprovò la teoria emessa da Torricelli sulla gravità dell'aria. Deve però aggiungersi che Cartesio reclamò in una lettera l' anteriorità dell' idea di questa esperienza, che è stata decisiva rovinando l' antico principio della filosofia scolastica sul preteso orrore della natura pel vuoto, e che ha avuto una moltitudine di conseguenze felici pei progressi della scienza.

La filosofia di Pascal, che non ha nessun carattere sistematico, è sviluppata interamente nel celebre libro dei *Pensieri*, nel quale però trovansi sventuratamente alcune idee sulla *vanità delle scienze* poco conformi alla ragione e poco degne oggigiorno di un serio esame.

Come abbiamo praticato pei grandi uomini dei quali abbiamo avuto occasione di rammentare i titoli all' ammirazione del mondo, non abbiamo potuto enunciare in questa succinta notizia biografica che i principali lavori di Pascal. Si può ora vedere che se l' ingegno di quest' uomo celebre fu grande, è lungi però dall' essersi elevato al possesso completo di alcuna di quelle grandi scoperte che fanno epoca nell' umanità e nella storia della scienza. Pascal cessò di vivere e di penare il 19 Agosto 1662. Ecco i titoli delle opere scientifiche da lui pubblicate, omettendo quelle che tutta la loro importanza riconoscono dalle circostanze nelle quali comparvero. I *Essai pour les coniques*, 1640; II *Traité du triangle arithmétique*; III *Traité des ordres numériques*; IV *De numericis ordinibus tractatus*; i tre precedenti trattati furono riuniti insieme e pubblicati a Parigi, 1665, in-4; V *Problemata de cycloide proposita mense Junii* 1658; VI *Histoire de la roulette appelée autrement trochoide ou cycloide*; in seguito Pascal pubblicò una continuazione di questa storia col titolo di *Suite de l'histoire de la roulette*. Tali due scritti esistono pure in latino e sono intitolati: *Historia trochoidis, sive cycloidis, gallice* la Roulette, e *Historiae trochoidis, sive cycloidis, continuatio*. VII I lavori di Pascal riguardanti la soluzione dei problemi proposti sulla cicloide, e comprendono gli scritti seguenti: 1° *Lettre de M. Dettonville à M. de Curcavi*; tale lettera, che è una specie d' introduzione, contiene, dopo alcune proposizioni preliminari, il metodo generale pei centri di gravità di ogni specie di linee, di superficie e di solidi; 2° *Des propriétés des sommes simples, triangulaires et pyramidales, des trilignes rectangles, et de leurs on-*

glets, *des sinus du quart de cercle*, *des arcs de cercle et des solides circulaires:* sono questi cinque trattati preparatorj alla risoluzione dei problemi della cicloide; 3° *Traité général de la roulette*, *ou Problèmes proposés publiquement et résolus par A. Dettonville*. Pascal dà qui le soluzioni di tutti i problemi, i quali, in virtù del suo metodo, si deducono dai trattati che precedono; VIII *Dimension des lignes courbes de toutes les roulettes*; IX *De l'escalier circulaire*, *des triangles cylindriques et de la spirale autour du cône*. L'autore determina la dimensione e il centro di gravità della scala circolare, di un triangolo cilindrico qualunque, e di un solido spirale cilindrico generato dal movimento spirale di una retta la quale cresca uniformemente movendosi perpendicolarmente al piano di un circolo dalla circonferenza al centro; X *Propriétés du cercle*, *de la spirale et de la parabole:* in tale breve scritto, trattato al modo degli antichi, si dimostra che la linea parabolica e la spirale d'Archimede corrispondente sono eguali; il che era stato già annunziato da Roberval ma senza dimostrazione; XI *Nouvelles expériences touchant le vuide*, 1647; XII *Traité de l'équilibre des liqueurs*, cui tien dietro il *Traité de la pesanteur de la masse de l'air*. Per gli altri lavori di Pascal, che sono in gran numero, si veda la Raccolta compiuta delle sue opere pubblicata da Bossut a Parigi, 1779, 5 vol., in-8, non meno che il *Discorso sulla vita e sulle opere di Pascal* che lo stesso Bossut vi ha unito, e che è stato pure ristampato a parte con grandi aggiunte, Parigi, 1781, in-8 di 146 pag. Potranno consultarsi ancora le molte biografie ed elogi storici di cui questo illustre scrittore è stato l'oggetto.

PASSAGGI *sul Sole* (*Astron.*). I pianeti detti inferiori (*Vedi* PIANETA), Mercurio e Venere, le orbite dei quali sono contenute dentro quella della terra, debbono in alcune circostanze presentarci un fenomeno analogo a quello degli ecclissi del sole prodotti dalla luna, vale a dire debbono per qualche momento nasconderci una parte del disco del sole. A tal fenomeno si è dato il nome di *passaggio sul sole*, perchè allora il pianeta ci sembra come una piccola macchia che attraversa il disco solare.

I passaggi di Mercurio e di Venere si calcolano presso a poco come gli ecclissi: è chiaro che non possono aver luogo che quando questi pianeti sono in congiunzione col sole, e quando inoltre trovansi molto vicini ai loro nodi o sull'ecclittica, perchè se la loro latitudine superasse il semidiametro del sole, passerebbero accanto a quest'astro, e non potrebbe esservi *ecclisse* o *passaggio sul sole*.

Kepplero è il primo che abbia annunziato l'epoche dei *passaggi*, ma le sue tavole non avevano ancora un grado sufficiente di esattezza per render certe le sue predizioni, varie delle quali non si sono verificate. Ad Halley è dovuta la teoria completa di questi fenomeni: questo gran geometra, indicando i passaggi di Venere che dovevano aver luogo nel 1761 e nel 1769, ebbe pure la gloria di additare agli astronomi le conseguenze che se ne sarebbero potute trarre per la determinazione della parallasse del sole. Sebbene un uomo come Halley appartenga all'intera umanità, dobbiamo qui rammentare che in tale occasione egli pregò la posterità di non dimenticare che era stato un inglese che aveva avuto questa idea. Passeremo ora a far comprendere l'alta importanza del metodo ingegnoso da lui trovato.

Quando Venere passa tra la terra e il sole, e si projetta sul disco di quest'astro sotto l'apparenza di una macchia nera, il suo moto proprio combinato col moto apparente del sole le fa descrivere sul disco solare una linea retta che sembra una corda della circonferenza di questo disco. Questa corda non è la stessa osservata da differenti punti della terra, perchè, a motivo della parallasse di Venere, i diversi osservatori non riferiscono il pianeta agli stessi punti del disco del sole, e per conseguenza la corda percorsa apparisce tanto più grande quanto è più vicina al centro.

Sia infatti la terra in T (*Tav.* X, *fig.* 3), il sole in S, e Venere in V; dal centro della terra si vedrebbe Venere in v, sul prolungamento del raggio vettore TV, e questo pianeta nelle sue posizioni successive sembrerebbe descrivere la linea avb; ma dai punti o ed o' della superficie terrestre si vedrebbe Venere in v' e in v'' e sembrerebbe descrivere le corde $a'v'b'$, $a''v''b''$. Queste corde essendo diseguali saranno descritte in differenti spazj di tempo, e per conseguenza la durata di un passaggio osservato da un luogo terrestre o non sarà eguale alla durata dello stesso passaggio osservato da un altro luogo o'. Ma questa differenza dipende dalla differenza che esiste tra la parallasse del sole e quella di Venere, dunque si potrà concludere quest' ultima differenza dalla prima.

Per un' altra parte, in forza della teoria dei moti ellittici, si conoscono, per l' epoca delle osservazioni, i rapporti delle distanze di Venere e del sole dalla terra, e siccome questi rapporti danno, rovesciandoli, quelli delle parallassi (*Vedi* Parallassa), così diviene facile il determinare le due parallassi; infatti, indicando con m la distanza della terra dal sole, con n quella della terra da Venere, con p la parallasse del sole e con π quella di Venere, si avrà

$$m : n :: \pi : p,$$

donde si trae

$$m-n : n :: \pi-p : p;$$

ma la differenza $\pi-p$ delle parallassi è data dal resultato delle osservazioni, perciò, indicando questa quantità nota con q, si otterrà in fine

$$p=\frac{nq}{m-n},$$

e per conseguenza

$$\pi=\frac{mq}{m-n}.$$

Le distanze m ed n sono note in parti della distanza media della terra dal sole presa per unità. Ma soltanto dopo che è stata determinata la parallasse, si possono misurare queste distanze col raggio della terra, ed allora soltanto si possono esse per conseguenza confrontare colle nostre misure ordinarie.

Il passaggio di Venere sul sole, nel 1769, fu atteso colla più viva impazienza dagli astronomi che intrapresero lunghi viaggi per andare ad osservare questo fenomeno in differenti punti e nelle circostanze più favorevoli. Tutte le nazioni europee concorsero alla scoperta della verità con una unanimità di sforzi che sventuratamente non si è riprodotta in seguito. Il resultato fece vedere che la parallasse del sole dedotta da quella di Marte era troppo grande, e che il suo valore non oltrepassa 8″,6.

Combinando a due a due tutte le osservazioni, si trova che la differenza delle parallassi era allora di 21″,25; in quel momento il raggio vettore della terra era 1,01515, e quello di Venere 0,72619; si aveva dunque

$$m=1{,}01515,\quad n=0{,}28896,\quad q=21'',25;$$

e per conseguenza

$$p=(21'',25)\,\frac{0{,}28896}{0{,}72619}=8'',4556;$$

ma questo valore della parallasse si riferisce alla distanza alla quale si trovava il sole nel momento delle osservazioni; per ridurlo alla distanza media presa per

unità, si ha la proporzione

$$1 : 1{,}01515 :: 8'',4556 : (8{,}4556)\times(1{,}01515),$$

perchè le parallassi stanno in ragione inversa delle distanze, ed in fine si trova

$$p = 8'',58.$$

Abbiamo detto (*Vedi* Parallassa) che dai calcoli di Encke resulta che il valore di p è eguale a $8'',5776$, che poco differisce da questo.

Venere ritorna in congiunzione circa ogni 584 giorni, vale a dire presso a poco dopo un anno e 219 giorni; ora, in questo intervallo, la terra ha fatto una rivoluzione intera e più 216° circa. Così, ad ogni rivoluzione, la longitudine eliocentrica della terra e quella di Venere sono aumentate di 7 segni e 6°. Dopo cinque congiunzioni, le longitudini saranno aumentate di $1080° = 3 \times 360°$, vale a dire saranno ritornate quelle medesime del primo anno. Ma cinque congiunzioni avvengono nell'intervallo di 2920 giorni che fanno 8 anni comuni di 365 giorni; così dopo otto anni le congiunzioni ritornano presso a poco nel medesimo giorno e nel medesimo luogo del cielo, e quando un passaggio ha avuto luogo, potrebbe attendersene un altro otto anni dopo, se da una congiunzione all'altra la latitudine non crescesse di 20' in 24'; in 16 anni cresce di 40' in 48', quantità che supera di molto il diametro del sole, e rende per conseguenza impossibili tre passaggi successivi per tre congiunzioni successive: allora scorre un intervallo di 105, 113, 121, 235 o 243 anni. Di tutti questi periodi, quello di 243 anni è il migliore. Delambre ha indicato un periodo di 1952 anni, ch'ei sospettava poter ricondurre tutti i passaggi nello stesso ordine: secondo i suoi calcoli, i passaggi futuri di Venere sul sole avverranno negli anni seguenti:

1874,	l'	8	Dicembre.
1880,	il	6	Dicembre.
2004,	il	7	Giugno.
2012,	il	5	Giugno.
2117,	il	10	Dicembre.
2125,	l'	8	Dicembre.
2247,	l'	11	Giugno.
2255,	l'	8	Giugno.
2360,	il	12	Dicembre.
2368,	il	10	Dicembre.
2490,	il	12	Giugno.
2498,	il	9	Giugno.
2603,	il	15	Dicembre.
2611,	il	13	Dicembre.
2733,	il	15	Giugno.
2741,	il	12	Giugno.
2846,	il	16	Dicembre.
2854,	il	14	Dicembre.
2984,	il	14	Giugno.

I passaggi di Mercurio sono molto più frequenti di quelli di Venere, ma sono lungi dal presentare lo stesso interesse, perchè non possono servire alla determinazione della parallasse del sole, essendo questo pianeta troppo vicino al sole onde la differenza delle parallassi sia abbastanza sensibile. I periodi che ricon-

ducono questi passaggi sono di 6, di 7, di 13, di 46 e di 263 anni. I più vicini avranno luogo nelle seguenti epoche:

il	9	Novembre	1848.
l'	11	Novembre	1861.
il	4	Novembre	1868.
il	6	Maggio	1878.
il	7	Novembre	1881.
il	9	Maggio	1891.
il	10	Novembre	1894.

PASSAGGIO *al meridiano*, *Culminazione*. È il momento in cui un astro è alla sua massima elevazione sull'orizzonte ed a distanza eguale dall'oriente e dall'occidente. L'osservazione di questi passaggi è l'operazione fondamentale dell'astronomia. *Vedi* Ascensione retta.

Per osservare il passaggio degli astri al meridiano si fa uso di un quarto di circolo murale o di un canocchiale posto nel piano del meridiano che dicesi *strumento dei passaggi*.

PAVONE (*Astron.*). Costellazione meridionale ignota agli antichi e che non è visibile nei nostri climi settentrionali. La stella sua principale è di seconda grandezza.

PAUCTON (Alessio Giovanni Pietro), matematico francese, nato nel 1736 e morto nel 1798, oltre alcune memorie su diversi argomenti di meccanica, ha pubblicato un'opera intitolata: *Métrologie, ou traité des mesures, poids et monnaies des anciens peuples et des modernes*, Parigi, 1780, in-4, di 972 pag.: opera capitale, in cui tutti hanno attinto quelli che dipoi trattarono lo stesso soggetto, e che è utile anco oggigiorno a consultarsi.

PEDOMETRO o Conta-passi. È la stessa cosa che l'*Odometro*. *Vedi* Odometro.

PEGASO (*Astron.*). Costellazione boreale che contiene 89 stelle nel Catalogo Britannico. Trovasi negli antichi autori rammentata coi nomi di *Pegasus*, *Equus ales*, *Equus gorgonius*, *Bellorophon*, *Sagmarius caballus*. Si attribuisce ordinariamente la sua origine a Bellorofonte, che i poeti narrano che domasse la chimera montato sopra un cavallo alato che è il simbolo della fama. Ovidio nel terzo libro dei Fasti disse:

Nunc fruitur coelo, quod pennis ante petebat,
Et nitidis stellis quinque decemque micat.

Questa costellazione è situata in vicinanza dei Pesci (*Tav.* LIX).

PELECOIDE (*Geom.*) (da πέλεκυς *asce*, e da εἶδος *forma*). Figura curvilinea in forma di asce racchiusa tra due quarti di circolo rovesciati e un semi-circolo. Tale è la figura ABCDA (*Tav.* X, *fig.* 4).

L'area della *Pelecoide* è equivalente al quadrato ABCD, e al rettangolo AEFC: proprietà analoga a quelle della *lunule*, ma la quale è evidente dalla sola costruzione della figura.

PELETIER (Giacomo), letterato e matematico distinto del suo tempo, nacque nel 1517 a Mans e morì a Parigi nel 1582. Le sue opere scientifiche sono: I *L'arithmétique en quatre livres*, Poitiers, 1551; Lione, 1554, in-8; II *L'algèbre en deux livres*, Lione, 1554, in-8; III *De l'usage de la géométrie*, Parigi, 1573, in-4; IV *Demonstrationum in Euclidis elementa geometrica libri sex*, Lione, 1557, in-8; ivi, 1620, in-8. Tali opere, per quanto oggi obliate, furono utilissime nel loro tempo, e per le molte particolarità che vi si rinvengono sono indispensabili a consultarsi per chi voglia conoscere a fondo la storia della scienza.

PELL (Giovanni), geometra inglese del XVII secolo. Compose in età di 19 anni un trattato sulla costruzione degli orologi solari, ed ebbe un carteggio sui logaritmi col dotto Enrico Briggs. Molte altre opere dello stesso genere, che pubblicò successivamente, gli acquistarono tal celebrità che nel 1631 fu chiamato a coprire una cattedra di matematiche ad Amsterdam. Nel 1646, accettò quella del collegio di Breda fondato di recente dal principe d'Orange. Oliviero Cromwell l'inviò nel 1654 come agente diplomatico presso i cantoni protestanti della Svizzera. Sotto la restaurazione di Carlo II entrò negli ordini, e fu provvisto della cura di Fobbing nella contea di Essex; nel 1663 passò alla pieve di Laingdon nella stessa contea, e divenne poscia cappellano dell'arcivescovo di Canterbury, Sheldon. Malgrado questi titoli che non aveva ricercato, Giovanni Pell, cui i suoi lavori matematici distraevano continuamente dai suoi doveri pubblici, si lasciava rubare tutte le sue rendite, talchè mancò spesso delle cose più necessarie alla vita, e passò alcun tempo in carcere come debitore insolvibile. Nato nel 1610 a Southwark nella contea di Sussex, Pell, cui debbonsi numerosi scritti, morì nel 1685. Ecco i titoli delle opere sue principali: I *Modus supputandi ephemerides astronomicas* (*quantum ad motum solis attinet*) *paradigmate ad annum* 1630 *accommodato*, 1630; II *Chiave della steganografia di Giovanni Tritemio*, 1630; III *Lettera ad Edunrdo Wingate sui logaritmi*, 1631; IV *Storia astronomica di osservazioni dei moti e delle apparenze celesti*, 1634; V *Eclipticus prognostica* (Arte di predire gli ecclissi per mezzo del calcolo), 1634; VI *Confutazione del discorso di Longomontano*, De vera circuli mensura, Amsterdam, 1644; VII *Idea delle matematiche*, Londra, 1651, in-12: opera curiosa che fruttò all'autore una gran reputazione e che gli aprì la strada ai molti impieghi cui fu successivamente chiamato. Il libro fu ristampato nelle *Philosophical Collections* di Hooke, e Chaufepiè ne ha inserito un sunto pregevolissimo nel suo *Dizionario* all'articolo Pell. Fra molti progetti singolari, vi si trova quello di un Manuale di matematica improvvisata, per imparare a risolvere senza strumenti tutti i problemi d'aritmetica e di geometria. VIII *Tavola dei quadrati di tutti i numeri da* 1 *fino a* 10000, 1672, in-fol. Nella edizione dell'*Algebra* di Rhonio da lui pubblicata, si trova una sua *Tavola dei divisori dei numeri impari*, ed una *Lista dei numeri primi al di sotto di* 100000, 1668, in-4.

PEMBERTON (Enrico), dotto inglese, nato nel 1694 e morto nel 1771. Fra le molte opere da lui pubblicate notansi: I *View of sir Isaac Newton's philosophy*, Londra, 1728, in-4; II *Epistola ad amicum de Cotesii inventis curvarum ratione quae cum circulo et hyperbola comparationem admittunt*, *cum appendice*, Londra, 1722, in-4: opuscolo relativo al celebre teorema di Cotes, e che tende, secondo Montucla (III, 153), a stabilire che le stesse scoperte di Newton si trovano in Barrow e in Fermat; e quelle di questi ultimi in Archimede.

PENDOLO. (*Mecc.*). Apparecchio composto di un corpo solido sospeso all'estremità di un filo inflessibile, attaccato per l'altra sua estremità ad un punto fisso, intorno del quale può girare liberamente. Tale è il corpo A (*Tav.* X, *fig.* 10), sospeso pel filo AB al punto fisso B in modo da potere oscillare, quando si mette in moto.

Il punto B prende il nome di centro di *moto* o di *sospensione*, e la linea MN parallela all'orizzonte quello di *asse di oscillazione*.

Quando il centro di gravità del corpo, compreso il filo, è nella verticale AB, il pendolo è in equilibrio; se si scosta da questa posizione per portare, per esempio, il corpo A al punto C e che quindi si abbandoni all'effetto della gravità, esso discende da C in A mediante un moto accelerato e la velocità acquistata al punto A lo fa risalire in D fino a tanto che esso abbia successivamente perduto tutti i gradi di questa velocità; giunto in D, dopo avere descritto $AD = AC$,

esso non prova più che l' effetto della gravità, e scende nuovamente in A per risalire quindi in C, in virtù della nuova velocità acquistata nella caduta; esso continuerebbe così indefinitamente ad oscillare da C in D, e da D in C, senza la resistenza dell' aria e l' attrito del punto d' appoggio, i quali concorrono per rendere a ciascuna oscillazione l' arco di salita più piccolo di quello di discesa, il che finisce per riportare all' equilibrio.

Quantunque la grandezza degli archi di oscillazione diminuisca così successivamente, il tempo nel quale essi sono percorsi, rimane sensibilmente lo stesso e non dipende che dalla lunghezza del pendolo, donde segue che un *pendolo* la cui lunghezza è costante è l' istrumento più proprio a misurare dei tempi uguali. Il Galileo, che pel primo ha fatto delle ricerche sul moto del pendolo, se ne è servito con gran successo per le sue osservazioni e le sue esperienze. Ma il modo col quale ne fece uso esigeva delle cure moltiplicate, poichè bisognava rianimare il moto rallentato a ciascun istante dalla resistenza dell' aria, e contare le vibrazioni l' una dopo l' altra per averne la somma.

L' applicazione che l' Huygens ha fatto del pendolo agli orologi è una di quelle idee ingegnose, le quali sono equivalenti alle grandi scoperte. Gli orologi sono animati da una molla elastica o da un peso che mette in moto più ruote, per mezzo dei quali le lancette percorrono le divisioni del quadrante. Per impedire a questo moto di accelerarsi esso era di già ritenuto da un moderatore, la cui azione era ben lungi dall' essere uniforme. Ed è a questo moderatore imperfetto che l' Huygens ha sostituito il *pendolo*, adattandolo al pezzo di scappamento che è quello che regola il moto di tutte le ruote, affinchè le sue vibrazioni, la cui durata è sempre uguale, fintanto che la sua lunghezza rimane la stessa, possano rettificare le piccole irregolarità della macchina.

L' oscillazioni di uno stesso pendolo in archi più o meno grandi non essendo rigorosamente uguali, l' Huygens cercò una curva di oscillazione nella quale fosse assolutamente indifferente, che il pendolo misurasse dei grandi o dei piccoli archi, e, siccome la cicloide ha precisamente questa proprietà, per sostituirla al circolo rese flessibile la parte superiore AB della verga del pendolo AC e situò da ciascuna parte del centro A (*Tav.* X *fig.* 2) una porzione di cicloide AM ed AN, il cui circolo generatore G avesse per diametro la metà della lunghezza del pendolo AC. Mediante questa costruzione, quando il pendolo è in moto, la parte flessibile AB della sua verga è forzata d' inviluppersi sopra le porzioni di cicloide AM ed AN, il che obbliga il corpo C a descrivere l' arco MCN e non l' arco di circolo ECF; ma l' arco MCN è un arco di cicloide, poichè l' evoluta di una cicloide è essa stessa una cicloide. (*Vedi* Evoluta). Ora dalla natura di questa curva il pendolo che ci si muove giunge sempre in tempi uguali al punto più basso C, qualunque sia l' altezza donde comincia a cadere: dimodochè tutte le sue vibrazioni, grandi o piccole, sono perfettamente isocrone o di ugual durata. L' Huygens ha dato tutta la teoria dei *pendoli* che oscillano tra due semi-cicloidi, nel suo *Horologium oscillatorium*, opera la quale inoltre contiene l' indicazione di tutte le applicazioni pratiche.

L' apparecchio dell' Huygens, difficilissimo a costruire, non fu lungo tempo in uso perchè ben presto si osservò che il circolo e la cicloide si confondono nella parte inferiore *pq*, dimodochè non facendo descrivere al pendolo che archi di una piccolissima grandezza, è perfettamente uguale il fargli fare le sue oscillazioni nel circolo o nella cicloide, ed è infatti il partito che si è preso dopo nell' orologeria.

La gravità essendo la causa delle vibrazioni del pendolo, si comprende facilmente che supponendo la sua lunghezza costante, la velocità di queste vibrazioni dovrà variare se la forza della gravità varia; ora, questa forza non è la stessa

su tutti i punti della superficie della terra, ed il pendolo ci offre ancora un mezzo prezioso per misurare la sua intensità. Al Richer dobbiamo questa cognizione. Essendo andato nel 1672 a Cayenne, per ordine del re di Francia, per farvi dell' osservazioni, osservò che un pendolo di una lunghezza conveniente per battere i secondi a Parigi, misurava a Cayenne tempi più lunghi. Per fargli battere i secondi a Cayenne, bisogna accorcirlo di 1 linea e $\frac{1}{4}$, lunghezza molto più considerabile di quella che esso poteva avere acquistata dilatandosi mediante il calore del clima. Diviene dunque incontestabile che i corpi cadono più lentamente verso l' equatore che verso i poli, ovvero che la forza delle gravità diminuisce andando dai poli all' equatore, il che è una conseguenza necessaria della rotazione della terra sul suo asse, e in difetto di altre, diventerebbe, una prova fisica di questa rotazione. (*Vedi* Gravità).

Premesso ciò tenteremo di far conoscere i punti principali del pendolo partendo, come l' Huygens, dalle leggi del moto dei corpi pesanti nella cicloide.

1. Un pendolo fisico o pratico si chiama generalmente *pendolo composto*. Per paragonare più facilmente tra loro le durate dell' oscillazioni di diversi pendoli composti, si è immaginato un pendolo ideale, che si chiama *pendolo semplice*, e al quale possiamo sempre riportare tutti gli altri. Questo consiste in un punto pesante, sospeso all' estremità di un filo spogliato della gravità, inflessibile, inestensibile ed attaccato per l' altra sua estremità ad un punto fisso il quale non oppone alcun ostacolo al moto. Cominceremo dal cercare le proprietà del *pendolo semplice*.

2. Determiniamo precedentemente il tempo della discesa di un punto materiale pesante, messo in moto dall' azione della gravità, lungo di un arco QD di cicloide. (*Tav.* X, *fig.* 6). Per quest' effetto, si tiri la linea QP perpendicolare al diametro BD del circolo generatore, e descriviamo sopra PD come diametro, la semi-circonferenza POD. Si conducano di più tutte le rette che si vedono nella figura, e si faccia

$$BD=2a,\quad PD=2r\quad e\quad PN=x.$$

Avremo così, supponendo l' arco Mm infinitamente piccolo, $Nn=dx$, e di più $ND=2r-x$. Il punto P è preso in questo caso per l' origine dell' ascisse.

Se indichiamo con t il tempo che il mobile impiega a percorrere l' arco QM, dt esprimerà il tempo del piccolo arco Mm; e siccome la velocità acquistata percorrendo l arco QM è la stessa di quella che il mobile acquisterebbe cadendo dall' altezza $PN=x$, questa velocità sarà come la radice quadrata di quest' altezza, ovvero uguale a $\sqrt{x}$. (*Vedi* Accelerato). Ora, la tangente MT al punto M è parallela alla corda HD, dunque i triangoli Mfm e HDN sono simili e danno

$$Mm : mf :: HD : DN,$$

ma dalla natura del circolo $\overline{HD}^2=BD\times DN$, donde

$$HD : DN :: \sqrt{BD} : \sqrt{DN}.$$

Si ha dunque ancora

$$Mm : mf :: \sqrt{BD} : \sqrt{DN},$$

ovvero

$$Mm : dx :: \sqrt{2a} : \sqrt{(2r-x)},$$

il che dà

$$Mm = \frac{dx \cdot \sqrt{2a}}{\sqrt{(2r-x)}}.$$

Il tempo lungo di Mm essendo dt e la velocità $\sqrt{x}$, si ha ancora

$$Mm = dt\sqrt{x};$$

così

$$dt \cdot \sqrt{x} = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(2r-x)}},$$

$$dt = \frac{dx \cdot \sqrt{2a}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(2r-x)}}$$

$$= \frac{r \cdot dx \cdot \sqrt{2a}}{r \cdot \sqrt{2rx-x^2)}}.$$

La differenziale Oo dell' arco di circolo PO essendo (*Vedi* RETTIFICAZIONE)

$$dPO = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}},$$

se si sostituisce questo valore nell' ultimo di dt, otterremo

$$dt = \frac{dPO \cdot \sqrt{2a}}{r},$$

e, integrando,

$$t = \frac{PO \cdot \sqrt{2a}}{r}$$

tale è l' espressione del tempo cercato lungo dell' arco QM.

Se ora indichiamo con T il tempo della discesa lungo dell' arco QD, l' arco PO diventerà la semi-circonferenza POD, che esprimeremo con c ed avremo allora

$$T = \frac{c \cdot \sqrt{2a}}{r}.$$

Così, siccome $\sqrt{2a}$ è una quantità costante, il tempo T è proporzionale a $\frac{c}{r}$; dunque il tempo lungo differenti archi cicloidali è sempre come il rapporto delle semi-circonferenza di un circolo al suo raggio, vale a dire che questi tempi sono uguali, e che un punto materiale che si muove lungo di una cicloide mediante l' azione della gravità, in un mezzo senza resistenza, giunge al punto il più basso D nello stesso tempo, tanto che esso parta da A da Q o da M.

Esprimendo con π la semi-circonferenza il cui raggio è l' unità, abbiamo $\frac{c}{r} = \pi$, e l' espressione precedente prende la forma

$$T = \pi \cdot \sqrt{2a},$$

ma $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ rappresenta la metà della velocità che il mobile acquisterebbe cadendo lungo del diametro BD$=2a$, se indichiamo dunque con T' il tempo lungo di questo diametro, avremo

$$2a=\frac{1}{2}T'\times\sqrt{2a},$$

e

$$T'=\frac{2\,.\,2a}{\sqrt{2a}}=2\sqrt{2a},$$

donde

$$\frac{T}{T'}=\frac{1}{2}\pi,$$

vale a dire che il tempo, lungo di un arco qualunque di cicloide, sta al tempo della caduta libera di un mobile, lungo del diametro del circolo generatore, in un rapporto costante uguale $\frac{1}{2}\pi$.

3. Consideriamo attualmente un *pendolo semplice* AB (*Tav.* X, *fig.* 10) che descriva un piccolo arco EA, il quale si confonde con un arco della cicloide di cui AB sarebbe il doppio del diametro del circolo generatore; per quello che precede il tempo della caduta da E in A sta a quella della caduta libera di un mobile lungo di $\frac{1}{2}$AB in un rapporto costante uguale $\frac{1}{2}\pi$. Ora, se indichiamo con g, lo spazio che la gravità può far percorrere liberamente ad un mobile in un secondo di tempo, sappiamo che il tempo t' nel quale questo corpo percorrebbe uno spazio $\frac{1}{2}\text{AB}=\frac{1}{2}h$ è espresso da

$$t'=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}h}}{\sqrt{g}}=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2g}},$$

(*Vedi* Accelerato), così il tempo, nel quale sarà descritto il piccolo arco EA, sarà

$$t=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2g}},$$

e il tempo di un'oscillazione intera da E in F sarà, indicandolo con T,

$$T=\pi\cdot\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\;\ldots\ldots\;(a).$$

4. Per uno stesso luogo terrestre ove la forza della gravità, rappresentata dal doppio dello spazio che essa fa percorrere ai corpi nel primo secondo della loro caduta, vale a dire, da $2g$, è costante, la durata T' delle oscillazioni di un secondo pendolo di una lunghezza h' sarebbe ancora

$$T'=\pi\cdot\frac{\sqrt{h'}}{\sqrt{2g}},$$

si avrebbe dunque, a motivo dei fattori costanti,

$$T : T' :: \sqrt{h} : \sqrt{h'},$$

il che c'insegna che *le durate delle oscillazioni di due pendoli semplici di lunghezze differenti, stanno tra loro nel rapporto delle radici quadrate di queste lunghezze.*

5. La forza della gravità essendo conosciuta in un luogo dato, è facile trovare per questo medesimo luogo la lunghezza del pendolo semplice, le cui oscillazioni si effettuano in un secondo di tempo e che si chiama *pendolo a secondi*. Infatti, il tempo T dovendo essere 1'' si ha, dalla formula (*a*)

$$1 = \pi \cdot \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2g}},$$

donde

$$h = \frac{2g}{\pi^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (b).$$

6. Reciprocamente, quando la lunghezza del pendolo a secondi è conosciuta, si ricava dalla formula (*b*) il valore della forza della gravità

$$2g = h \cdot \pi^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (c),$$

ed è con l'aiuto di quest'espressione, che avendo trovato all'osservatorio di Parigi, con esperienze delicatissime, $0^m,99384$ per la lunghezza del pendolo semplice a secondi, se ne è concluso $2g = 9^m,8088$. Così, a Parigi, i corpi i quali cadono liberamente nel vuoto descrivono $4^m,9044$ nel primo secondo della loro caduta.

7. Quando si conosce la durata delle oscillazioni di un pendolo semplice di una lunghezza qualunque, è facile di determinare quella del pendolo a secondi, poichè indicando con h quest'ultima si ha, pel n.° 4,

$$1 : T' :: \sqrt{h} : \sqrt{h'},$$

donde

$$h = \frac{h'}{T'^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (d).$$

8. La resistenza dell'aria non ha alcuna influenza sensibile sopra la durata delle piccole oscillazioni del pendolo, poichè i differenti archi cicloidali sono esattamente percorsi nello stesso tempo, essa non può che diminuire la grandezza dell'oscillazione. E non è che quando gli archi di oscillazione diventano assai grandi, che non possiamo più confondergli senza errore con archi di cicloide, che la resistenza del mezzo può avere un'influenza sulla durata, ma noi non possiamo entrare in queste considerazioni.

9. Un pendolo semplice tale come la teoria lo suppone non può realmente esistere, ma una piccola massa compatta sospesa ad un filo sottilissimo può tenerne luogo, osservando che ciò che allora si chiama la lunghezza di un tal pendolo, è la distanza tra il punto di sospensione e il centro di gravità della piccola massa. Tutti i pendoli composti possono essere riportati al pendolo semplice, determinando il loro *centro di oscillazione* (*Vedi* Questa parola); poichè le loro vibrazioni hanno la durata di quelle del pendolo semplice, la cui lunghezza sarebbe uguale alla distanza del punto di sospensione al centro d'oscillazione del pendolo composto.

10. Dobbiamo far osservare che l'espressione (a) della durata dell'oscillazioni di un pendolo semplice non è rigorosa che per un arco cicloidale, se l'arco circolare non è piccolissimo, non possiamo più confonderlo con l'arco cicloidale, e il valore di T diventa

$$T=\pi\sqrt{\frac{h}{g}}\cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a}{2}+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^2\right.$$

$$+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^4$$

$$\left.+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^5 \text{ ec.}\right\}\ \ldots\ldots(e),$$

a essendo il seno-verso della metà dell'arco d'oscillazione.

Prendendo per unità il tempo di un'oscillazione infinitamente piccola, la quale è sempre la medesima; gli accrescimenti di durata saranno:

Per un arco di	60°, di	0,01675
	30°,	0,00426
	20°,	0,00190
	10°,	0,00012
	5°,	0,00003

si vede che per un arco di 5° la differenza è appena sensibile. Al di sotto di 5°, l'arco circolare è il medesimo dell'arco di cicloide, e la formula (e) si riduce ad (a).

Premesso quanto abbiamo detto fin qui relativamente ai pendoli, passiamo a parlare più particolarmente prima del pendolo composto, quindi del pendolo conico e finalmente di nuovo del pendolo semplice.

PENDOLO COMPOSTO. Qualunque corpo sospeso che si fa oscillare intorno di un asse fisso, si trova in circostanze fisiche di cui la teoria del *pendolo semplice* (*Vedi* QUESTA PAROLA) fa astrazione. Daremo in questo punto la spiegazione soccinta dell'esperienze di questo genere e dei processi di calcolo, con i quali si giunge a determinare esattamente la lunghezza del pendolo a secondi.

11. Il pendolo composto, messo in esperienza, deve avere una forma regolare e geometrica, perchè sarebbe impossibile senza ciò di assegnare rigorosamente col calcolo la distanza del punto di sospensione al centro di oscillazione. Quello di cui il Bonguer fece uso nell'America, verso il 1740, era un piccolo peso di rame formato di due coni troncati opposti base a base, a sospeso all'estremità di un filo di lino sottilissimo, di un metro circa. Questo filo era attaccato ad una punta alla sua estremità superiore, ma in modo da conservare tutta la sua mobilità. Il Maupertuis, uno degli accademici francesi che i primi misurarono, all'istessa epoca del 1740, un arco del meridiano al circolo polare, si servì di piccoli globi di differenti metalli, attraversati ciascuno da una verga di rame che esso adattava al suo orologio. Finalmente, dallo stabilimento del nuovo sistema metrico in Francia, il Borda fece uso di un apparecchio di sua invenzione, altrettanto ingegnoso quanto semplice, il quale consiste in una palla di platino del peso di circa 500 grammi, che si fa oscillare all'estremità di un filo metallico di 4 metri di lunghezza, attaccato ad una sospensione a coltello, che posa sopra uno dei piani di una materia durissima (Vedi *Base del sistema metrico*, tomo III, del Delambre). Ma malgrado la semplicità di questo apparecchio, il

pendolo *invariabile* del quale si sono serviti, nei loro viaggi di navigazione, i capitani Fressinet, Duperrey e altri sapienti navigatori, è di un uso più comodo. Questo si compone di un fusto cilindrico di ottone colato con la lente, ed all'estremità del quale è fissato un coltello di acciajo. Questo coltello, nel tempo dell'esperienze, riposa sopra due agate le quali sono incrostate in un pezzo di accajo sostenuto da un treppiede di ferro solidissimo, e le quali si situano orizzontalmente per mezzo di un livello a bolla d'aria. A questo strumento è unita una scala delle grandezze e un orologio le cui oscillazioni del bilanciere, le quali possono non essere a compensazione, debbono essere ridotte sincrone a quelle del pendolo. Quanto alla durata delle oscillazioni di quest'ultimo in un tempo dato, essa si misura per mezzo di un cronometro il cui cammino diurno è esattamente conosciuto rapporto al tempo medio o al tempo siderale. Si concepisce che il pendolo dev'essere messo in una cassa di vetro, per essere sottratto all'influenza delle correnti d'aria, e di più è indispensabile di tener conto dello stato del barometro e del termometro, nel tempo che durano l'esperienze.

Da lungo tempo il fu signor de Prony, colpito da questa proprietà del pendolo scoperta dall'Huygens, cioè: che i centri di sospensione e di oscillazione sono inversi l'uno dell'altro, aveva proposto d'impiegare un apparecchio che fosse tale, che prendendo per punto di sospensione il centro d'oscillazione, le nuove oscillazioni avessero una medesima durata delle prime; perchè allora la distanza dei due punti di sospensione avrebbe rappresentato la lunghezza del pendolo semplice corrispondente a questa durata. Quest'apparecchio fu infatti costruito in Inghilterra mediante le cure del capitano Kater, il quale ne fece l'applicazione alla misura del pendolo a Londra (*Transac. philos*, 1818).

12. Per contenerci nel quadro che ci siamo tracciati, passiamo rapidamente in rivista le differenti formule di correzione e di riduzione, applicabili all'esperienze fatte col pendolo invariabile.

Correzione di grandezza.

Il Borda appoggiandosi sopra questo fatto, osservato che le grandezze dell'incursioni del pendolo, a destra e a sinistra della verticale, decrescono in progressione geometrica, quando il numero delle oscillazioni cresce in progressione aritmetica, trovò questa formula

$$N=n\left[1+\frac{1}{32}\,\frac{\operatorname{sen}(\theta+\theta_n)\operatorname{sen}(\theta-\theta_n)}{\mu(\operatorname{Log.}\operatorname{sen}\theta-\operatorname{Log.}\operatorname{sen}\theta_n)}\right],$$

nella quale 2θ è l'arco di oscillazione all'origine del moto, $2\theta_n$ l'arco di oscillazione alla fine dell'esperienza, misurati tutti due alla scala delle grandezze; μ il modolo tabulare 2,30258....; N il numero delle oscillazioni infinitamente piccole, corrispondenti ad n oscillazioni finite del pendolo osservato. (Vedi *Supplemento al Trattato di Geodesia* del Puissant, p. 99).

L'esperienze fatte il 25 Aprile 1822 all'osservatorio di Parigi hanno dato nel principio $\theta=3°\,0'\,31''$, alla fine $\theta_n=1°\,36'\,30''$; e nell'intervallo di questi due paragoni, il pendulo ha fatto un numero di oscillazioni $n=3763^{osc.}, 890$; si avrà dunque

$$\theta+\theta_n=4°\,37'\,1''$$
$$\theta-\theta_n=1\;\;24\;\;1,$$

e, con i logaritmi,

$$\begin{array}{ll} \text{Log}\, n = 3.5756369 & \text{Log. sen}\, \theta = 8.7200438 \\ \text{Log sen}(\theta + \theta_n) = 8.9057619 & c.\text{Log. sen}\, \theta_n = 1.5518036 \\ \text{Log sen}(\theta - \theta_n) = 8.3880483 & \text{Somma K} = 0,2718474 \\ \text{Log. numer.} = 0,8694471 & \text{Log K} = 9,4343251 \\ c\,\text{Log. denomin.} = 8,6983102 & \text{Log } 32\,\mu = 1.8673647 \\ \text{Log. correz} = 9.5677573 & \text{Log. denom.} = 1,3016898 \end{array}$$

dunque, correzione di grandezza = 0,36962.

Correzione di dilatazione.

Se indichiamo con N_0 le oscillazioni che il pendolo avrebbe fatte alla temperatura zero, durante il medesimo tempo che alla temperatura x, alla quale le oscillazioni N infinitamente piccole sono state ottenute, si avrà, come è facile dimostrarlo

$$N_0 = N + \frac{1}{2}\delta x N,$$

δ essendo la dilatazione lineare del pendolo per 1° centigrado dell'accrescimento di temperatura.

Per esempio, sia $\delta = 0,0000178$, temperatura media $x = 15°,03$ durante l'esperienza, $N = 90330,47$ le oscillazioni infinitamente piccole in un giorno solare medio, e $t = 15$ la temperatura *normale*; si avrà

$$\begin{array}{r} \text{Log } \tfrac{1}{2}\delta = 4.9493900 \\ \text{Log}(x - t) = 8.4771212 \\ \text{Log N} = 4.9558342 \\ \hline 8.3823454 = 0,0241, \end{array}$$

vale a dire che la correzione di dilatazione calcolata per 15° centigradi di temperatura è $+0^{osc.},024$.

Riduzione al vuoto.

Si tratta ora di sapere quanto il pendolo invariabile, che fa un numero conosciuto N'' di oscillazioni infinitamente piccole nell'aria, in tempo dato, ne farebbe nello stesso tempo se esso si trovasse nel vuoto; ora, in questo caso, si ha

$$\text{Riduzione al vuoto} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta_0 h_0 N''}{0^m,76\,(D - \Delta_0)(1 + mx)(1 + m'x)},$$

chiamando h l'altezza del barometro osservato, x la temperatura, D la gravità specifica del pendolo d'esperienza, e Δ_0 quella dell'aria alla temperatura zero.

Osserviamo che quando $\Delta = 1$ si aveva $D = 6381$ pel pendolo impiegato all'isole Maluine dal signor Duperrey, e che $m = \frac{1}{250}$ è la dilatazione di un volume di aria, nel mentre che $m' = \frac{1}{5550}$ è quella del mercurio per 1° centigrado di accrescimento di calore.

All' epoca dell' esperienze citate, l'altezza media del barometro era di

$$751^{mm},40 = \frac{h}{1 + m'.x} = h_0,$$

e quella del termometro centigrado $+15°,03 = x$. Di più, il numero delle oscillazioni del pendolo in 24^{or} di tempo medio nell'aria, era $N'' = 90330^{osc.},470$; si ha dunque

$$\text{Log } \tfrac{1}{2}|= 9,6989700 \qquad \text{Log } 751^{mm},40 = 2,8758712$$
$$\text{Log } N'' = 4,9558342 \qquad c.\text{ Log } .760,00 = 7,1191864$$

$$\text{Log } \frac{h_o}{0,76} = 9,9950576 \qquad 9,9950576$$

$$c.\text{Log }(6381) = 6,1951113 \qquad 1 + mx = 1,0563625$$
$$c.\text{ Log }(1 + mx) = 9,9761871$$

Log riduzione $= 0,8211602$, riduz. al vuoto $= +6^{osc.},625$.

Ed è così che ordinariamente si opera; ciò non ostante le considerazioni fisiche sopra le quali questa riduzione è fondata, non sono perfettamente conformi a ciò che realmente ha luogo. Infatti, il signor Bessel ha osservato (*Accademia di Berlino*, 1826) che uno strato d'aria rimane aderente al pendolo fino dal suo movimento oscillatorio, e che per conseguenza esso accresce il volume della massa, diminuisce la densità media, ed aumenta il momento d'inerzia. Il signor Poisson, che d'altra parte ha sottoposto questo fatto all'analisi, pensa che se la riduzione precedente fosse moltiplicata per $\frac{3}{2}$, essa adempirebbe assai bene, in mancanza di esperienze dirette, le condizioni richieste (*Memorie dell' Accademia delle Scienze di* Parigi, Tomo XI), almeno riguardo al pendolo del Borda.

Riduzione a livello del mare.

Poichè l' intensità della gravità varia nel senso della verticale, essa necessariamente influisce sopra la durata delle oscillazioni del pendolo in un tempo dato. Quest' istrumento, per battere i secondi, deve dunque essere più longo al livello del mare che al vertice di una montagna. Così, chiamando N'', N''' i numeri delle oscillazioni infinitamente piccole fatte respettivamente nello stesso tempo in questi due luoghi, e chiamando z l'altezza della stazione elevata, si ha abbastanza esattemente

$$N''' = N''\left(1 + \frac{z}{R}\right),$$

$R = 6366198^m$ essendo d'altra parte il raggio della terra.

A Parigi, l'altezza del luogo dell'esperienze era $z = 72^m$, e si è avuto, mediante sette paragoni

$$N'' = 90330,47;$$

pertanto

$$\begin{aligned} \text{Log}\,N'' &= 4.9558342 \\ \text{Log}.\,z &= 1.8573325 \\ c.\,\text{Log}.\,R &= 3,1961197 \\ \text{Log}.\,\text{Riduzione} &= 0,0092864 = 1,0216. \end{aligned}$$

La riduzione al livello del mare è dunque di $1^{osc.},022$.

13. Tra il gran numero di esperienze del pendolo invariabile fatte nel 1822 all'osservatorio di Parigi, di cui la latitudine la più recente è di $48^{o}\,50'\,13''$ e all'altezza di 72^{m} al di sopra del livello dell'oceano (mare medio), quelle del 24 Aprile, che abbiamo citate, hanno dato per sette paragoni il numero seguente di oscillazioni in 24^{or} di tempo medio, contate nell'aria,

		$90330^{osc.}$,470
Inseguito si è avuto, riduzione alla temperatura di 15° centigradi	+	0 ,024
Riduzione al vuoto	+	6 ,625
Riduzione al livello del mare	+	1 ,022
Resultamento parziale. . . .		90338 ,141

Resultamento medio di tre resultamenti parziali $n' = 90336,845$.

Per l'isole Maloine, il signor Mathieu ha ottenuto con lo stesso processo $n = 90349,198$; così la lunghezza del pendolo a secondi a Parigi essendo presa per unità, quelle all' isole Maluine indicata con l' sarà

$$l' = \frac{n^2}{n'^2} = 1,00027350.$$

Quanto alla sua lunghezza metrica, che indicheremo con a, essa è a Parigi, secondo il Borda, di $0^{m},993855$; concludiamo da ciò e da quello, che la teoria dà tra la gravità g e la lunghezza a del pendolo semplice, la relazione

$$1'' = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

π essendo il rapporto della circonferenza al diametro; concludiamo finalmente, che

$$g = 9^{m},80896.$$

Tale è il doppio dello spazio che percorre nel primo secondo un corpo, il quale cade liberamente nel vuoto.

14. La lunghezza l del pendolo a secondi crescendo come il quadrato della latitudine λ, si ha generalmente

$$l = A + B\,\text{sen}^2\lambda \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (p),$$

A e B essendo due costanti che possono ottenersi con l'aiuto di esperienze fatte come qui sopra in differenti luoghi, e donde si può inseguito dedurre il valore dello schiacciamento della terra. Infatti, il Clairaut ha pel primo dimostrato, mediante la teoria dell'attrazione, che questo schiacciamento è uguale ai $\frac{5}{2}$ del rapporto della forza centrifuga sotto l'equatore alla gravità, meno l'eccesso B della lunghezza del pendolo al polo sopra quella A del pendolo equatoriale, di-

viso per quest'ultima lunghezza; vale a dire che

$$\text{Schiacciamento} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{289} - \frac{B}{A} = 0{,}00865 - \frac{B}{A}.$$

Ma la determinazione esatta delle costanti A, B, esige che si siano raccolte un numero assai grande di osservazioni a differenti latitudini, e allora si applica al complesso di tutte l'equazioni di condizione (*p*) il metodo dei *minimi quadrati*. (*Vedi* QUESTA PAROLA.)

Si deve riconoscere ora di quale importanza sono le esperienze del pendolo nella ricerca della variazione della gravità e della figura della terra.

25. PENDOLO CONICO (*Mec.*). Apparecchio destinato a regolare l'azione variabile di un motore. Esso si compone di un asse che gira intorno *i* (*Tav.* CCI, *fig.* 4), il quale porta due tronchi *kl* mobili in *k*; questi tronchi sono terminati da palla pesanti *l*, e sono riunite, a articolazioni, a due altri tronchi *mn* i quali tengono un anello *ni* mobile lungo l'asse *i*. Che s'immagini questo regolatore adattato ad una macchina, la quale faccia girare l'asse *i* con une velocità variabile, si vede subito che in virtù della forza centrifuga acquistata dalle palle *l*, *l*, esse tenderanno ad allontanarsi tanto più quanto la loro velocità di rotazione intorno dell'asse *i* sarà maggiore; a misure che esse si allontanano, i tronchi *mn* fanno salire l'anello *ni*; se la velocità diminuisce, la forza centrifuga diminuisce ugualmente, le palle si ravvicinano per l'effetto della gravità, e l'anello *ni* discende. Ed è questo moto di elevazione e di abbassamento che acquista l'anello *ni*, in virtù dell'aumentazione e della diminuzione della forza centrifuga, che si mette a profitto per regolare l'azione variabile del vapore nelle macchine a fuoco. L'anello *ni* tiene allora tra due guide la testa o di una leva, il cui punto di appoggio *p* è a cerniera mobile; salendo, solleva col braccio *po* un tronco *qr* il quale comunica con una valvula, la quale serve a regolare l'introduzione del vapore; questa valvula diminuisce la quantità del vapore introdotto sotto lo stantuffo quando il tronco *qr* sale, e l'aumenta quando esso scende. Il pendolo è messo in moto da una corda continua, la quale si arrotola da una parte intorno di una ruota orizzontale fissata al suo piede, o dall'altra intorno dell'asse principale della macchina a vapore. Mediante questa disposizione, quando l'asse principale viene a prendere un moto rapidissimo, la corda continua lo comunica all'asse verticale *i* del pendolo, le palle *l*, *l* si allontanano, il tronco *qr* sale, la valvula si ferma, e la forza motrice si trove diminuita in proporzione del suo eccesso. Quando l'equilibrio è ristabilito, e che la resistenza comincia a prevalere sopra il motore, la velocità del pendolo diminuisce, le palle *l*, *l* scendono di nuovo, come pure il tronco *qr*, la valvula si riapre, e una nuova affluenza di vapore supera l'eccesso della resistenza. L'invenzione di quest'apparecchio tanto ingegnoso quanto importante è attribuito all'Watt.

Possiamo determinare a priori la relazione tra le velocità di rotazione dell'asse verticale, e l'altezza alla quale si tengono le palle nella seguente maniera. Riduciamo l'apparecchio a due punti pesanti Q, Q (*Tav.* CCI, *fig.* 5) ritenuti da due fili inflessibili e inestensibili AQ, AQ, senza gravità, e si chiami

r la distanza orizzontale QB dei punti Q all'asse AB.
h la distanza verticale AB dagli stessi punti al punto di sospensione A.
t il tempo impiegato dall'asse AB per fare una rivoluzione;

il circolo descritto dai punti Q, Q sarà $2\pi r$, e, per conseguenza, l'espressione della loro velocità v sarà

$$v = \frac{2\pi r}{t},$$

la forza centrifuga dovuta alla velocità v essendo (*Vedi* Moto)

$$\frac{v^2}{r}.$$

Avremo per l'espressione di questa forza

$$\frac{4\pi^2 r}{t^2}.$$

Osserviamo che i punti materiali Q, Q sottoposti simultaneamente alle azioni della forza centrifuga e della forza di gravità, si poogono necessariamente in una posizione tale che la resultante di queste due forze sia nella direzione della retta AQ, la quale sostieue ciascuna di esse, dimodochè il rapporto delle rette AB e BQ è lo stesso di quello della gravità g alla forza centrifuga $\frac{4\pi^2 r}{t^2}$; abbiamo dunque

$$h : r = g : \frac{4\pi^2 r}{t^2},$$

donde si deduce

$$h = \frac{gt^2}{4\pi^2},$$

e

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}},$$

questa relazione tre l'altezza verticale alla quale si tengono le palle e la durata di una rivoluzione dell'asse, dà il mezzo di regolare il meccaoismo delle valvula. Si vede che l'altezza verticale h è la luoghezza del pendolo semplice, il quale farebbe due oscillazioni nel tempo che l'asse fa un giro.

Il pendolo conico può applicarsi assai vantaggiosamente alle ruote idrauliche; ecco, secondo il Flachat (*Meccanica industriale*), le migliori disposizioni da dere all'apparecchio per fargli sollevare e abbassare una cateratta, il che esige più forza che per sollevare e abbassare una valvule o animella della macchine a vapore.

Il pendolo cooico è disposto come si vede (*Tav.* CCI, *fig.* 6); l'anello mobile a è al di sopra del punto di attacco c dei tronchi, e i tronchi ci sono tre a quattro volte più grandi dei tronchi cb. Le forza centrifuga, allontanando le palle, fa scendere l'anello, il che eleva il braccio della leva al, la cui estremità o manicotto l, armato di un doppio artiglio, (*fig.* 7) striscie con attrito nel senso verticale sopre un albero f, il quale riceve ancora il suo moto dalle macchina. Secondo che il manicotto l sale o scende, egli abbraccia per l'artiglio o ovvero con l'artiglio p la ruota m ovvero la ruota n, le quali sono *reti* sull'asse f. Quando il manicotto si avvicina dall'una all'altra, e viene, mediante uno dei suoi artigli, sotto l'artiglio che porta ciascuna di queste ruote, siccome il manicotto non è mobile intorno dell'asse che nel senso verticale, ma non nel senso orizzontale, la ruota che esso tocca o che abbraccia si trova così trasportata nel moto dell'asse. Le due ruote m ed n d'altra parte ingranano sopra una terza ruota r, la quale porta un asse st che è capace di sollevare o di serrare la cateratta, al di là del puoto assegnato pel lavoro medio, ovvero, in altri termini, accresce o limita l'efflusso dell'acqua, secondo che bisogna produrre

uno sforzo superiore o inferiore a quello dell'apparecchio nel suo moto ordinario.

Quando l'apparecchio è in questo stato medio o ordinario, il manicotto l prende una posizione media, e nella quale esso non abbraccia nè l'una nè l'altra delle due ruote; l'albero cf gira così senza comunicare moto alle ruote m ed n, e queste, per conseguenza, non ne comunicano alla ruota r e al suo asse.

Se la velocità si accelera, il manicotto, sollevandosi, abbraccia una delle ruote, e questa ruota comunica il suo moto alla ruota r a questa alla cataratta. Questo moto, in ultima analisi, si vede che è la forza centrifuga che lo produce. Se ora si produce un rallentamento, la leva agisce nel senso inverso, la ruota che era presa è disabbracciata, e l'altra ruota alla sua volta è abbracciata; dimodochè la ruota r gira in senso inverso, e produce un effetto contrario da quello che aveva luogo.

Del rimanente, aggiunge il Flachat, bisogna osservare che questo mezzo non adempie intieramente lo scopo proposto, che quando l'accelerazione o la diminuzione della velocità media durasse per un tempo assai lungo. Allora la regolarizzazione del motore è ben completa; ma se l'accelerazione viene da una causa che non agisce che istantaneamente, ovvero se essa non giunge che poco a poco al punto, ove l'apparecchio è assai spinto dalla forza centrifuga per agire, si vede che sarà passato un dato tempo tra l'istante ove la causa dell'accelerazione avrà cominciato, e il momento in cui il regolatore l'avrà fatta cessare. Tal è dunque l'inconveniente del regolatore a forza centrifuga; esso non può aumentare o diminuire istantaneamente l'azione del motore, vale a dire al momento stesso in cui una causa viene a sconcertare il regime della velocità il più vantaggioso alla macchina. Noi indichiamo quest'inconveniente affinchè si conosca bene quest'organo meccanico; ma sarebbe un cattivo comprenderci quello di trovare in quest'indicazione un attenuazione dei vantaggi che ci sembrano appartenere a questo regolatore, una delle più utili e delle più ingegnose concezioni della meccanica.

Vedete per altri apparecchj propri a regolare il moto delle macchine, le parole Regolatore e Volante.

PENDOLO SEMPLICE. (*Mec.*) La teoria del pendolo semplice si deduce dalle leggi generali del moto sopra le curve in un modo più diretto e più completo, che dalle considerazioni impiegate al principio di questo articolo.

16. Sia O (*Tav.* CCII, *fig.* 1) il punto di sospensione del pendolo, e $AO = r$ la sua lunghezza. Immaginiamo che dopo averlo elevato al punto M, gli s'imprima una velocità perpendicolare alla sua lunghezza e diretta nel piano verticale MOA; tutte le forze che agiscono sopra esso si trovano così in questo piano verticale, esso non potrà allontanarsene, e il moto del punto materiale M si effettuerà nella stessa maniera, come se esso dovesse rotolare sopra un arco di circolo resistente MAM', a che non avesse filo di sospensione.

Conduciamo dal punto di partenza M un'orizzontale MX ed una verticale MZ; prendiamo la prima per asse delle x e la seconda per asse delle z, contando le z nel senso della gravità. Il punto mobile non essendo sottoposto ad alcun'altra forza acceleratrice che a quella della gravità, l'equazioni del suo moto saranno

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g,$$

donde si dedurrà per l'espressione della sua velocità in un punto qualunque della sua trajettoria (*Vedi* Moto)

$$v^2 = v'^2 + 2gz \quad \ldots\ldots (r),$$

v' indicando la velocità iniziale o la velocità impressa al punto materiale al suo punto di partenza M, preso per origine delle coordinate.

L'equazione (r) ci prova che la velocità del pendolo aumenta a misura che esso discende da M verso il punto A, il più basso della sua corsa; poichè l'ordinata verticale z, che è la sola variabile del secondo membro, cresce da o fino ad AP, in questa parte del moto. Al punto A, ove l'ordinata z ha raggiunto il suo maximum di grandezza, $AP=h$, la velocità del pendolo è la più grande possibile; e siccome al di sopra di questo punto, nel tempo che il mobile si eleva sopra l'arco AM' in virtù della velocità acquistata, l'ordinata z diminuisce, la velocità diminuisce ancora successivamente. Giunto in M' nell'orizzontale, il mobile non ha più che la sua velocità iniziale v', poichè, $z=o$. Al di sopra del punto M', l'ordinata z diviene negativa, l'espressione della velocità è allora

$$v^2=v'^2-2gz,$$

vale a dire che essa diminuisce a misura che z aumenta, e che essa è completamente annullata quando

$$2gz=v'^2,$$

o quando la grandezza assoluta di z è quella dell'altezza dovuta alla velocità iniziale v'.

Se prendiamo

$$z=\frac{v'^2}{2g}=M''z,$$

il punto M'' sarà dunque quello in cui la velocità del mobile è nulla, e ove, non essendo più sottoposto che all'azione della gravità, esso deve cominciare a scendere di nuovo lungo dell'arco M''A, acquistando a ciascuno istante del moto un nuovo grado di velocità; dimodochè, di ritorno in A, la sua velocità si troverà di nuovo essere uguale a

$$v^2=v'^2+2gh.$$

Infatti, la velocità acquistata per la caduta lungo dell'arco M''A è la stessa di quella che sarebbe dovuta all'altezza AQ; ora

$$AQ=PQ+AP=M''z+h;$$

dunque la velocità in A è

$$\sqrt{M''z\,.\,2g+2gh}=\sqrt{v'^2+2gh}\,.$$

Dal punto A, il mobile risalirà sul ramo AM; ma esso non oltrepasserà il punto di partenza primitivo M; poichè la velocità non ritornerà nulla che in un punto M''', l'altezza verticale del quale al di sopra di A sarà la stessa di quella di M''. Giunto in M''', esso scenderà di nuovo per risalire sopra l'altro ramo in M'', e così di seguito indefinitamente. All'eccezione del primo arco MA, ciascun arco di discesa essendo uguale all'arco di salita, il mobile oscillerà intorno del punto più basso A; la durata della prima oscillazione MA differirà sola dalla durata di tutte le altre, le quali saranno isocrone.

Se la velocità iniziale v' fosse abbastanza grande, perchè il mobile giungesse al punto A' avanti di aver perduto tutta la sua velocità, esso scenderebbe di nuovo per l'arco A'M''', e in luogo di oscillare esso percorrerebbe un numero indefinito di volte e in tempi uguali la circonferenza intera del circolo. Nel caso delle oscil-

lazioni, il quale è il solo che dobbiamo considerare, possiamo supporre la velocità iniziale $v' = 0$, il che equivale a trasportare l'origine delle coordinate al punto M''', e a non tener conto della prima oscillazione MA. Per non cangiar nulla alle precedenti denominazioni, ammetteremo che dopo avere elevato il mobile al punto M, si abbandoni semplicemente alla gravità; gli archi delle oscillazioni saranno allora MA ed AM', e l'espressione della velocità in un punto dell'arco totale **MAM'**, la di cui verticale è z, sarà

$$v^2 = 2gz \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (s).$$

Indichiamo con s l'arco Mm compreso tra il punto di partenza M e un punto qualunque m della circonferenza, e con t il tempo impiegato a descriverlo; avremo

$$v = \frac{ds}{dt},$$

donde, paragonando con l'equazione (s),

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gz}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (t).$$

Quest'equazione ci farà conoscere il tempo t in funzione dell'arco percorso s e reciprocamente; ma per maggior semplicità, bisogna esprimere l'ordinata z in funzione delle coordinate del circolo descritto da OM. Prendendo il punto A per origine e contando le x sul diametro verticale AA', l'equazione del circolo sarà

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

ed avremo per il punto qualunque m

$$Ap = x, \quad pm = y.$$

Così, l'ordinata verticale z o Pp del punto m diventerà Ap—x, ovvero

$$z = h - x.$$

Questo valore, sostituito nell'equazioni (s) e (t), le renderà

$$v^2 = 2g(h-x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

l'ultima equazione diventa

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2g(h-x)}},$$

sostituendovi invece di ds il suo valore generale $\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Ora si deduce dall'equazione del circolo, mediante la differenziazione

$$dy = \frac{(r-x)dx}{y},$$

e per conseguenza,

$$dx^2+dy^2 = dx^2 + \frac{(r-x)^2}{y^2}dx^2$$

$$= dx^2\left[\frac{y^2+(r-x)^2}{y^2}\right].$$

Sostituendo invece di y^2 il suo valore $2rx-x^2$, verrà, fatte tutte le riduzioni

$$dx^2+dy^2=dx^2\left[\frac{r^2}{2rx-x^2}\right],$$

dunque

$$dt=-\frac{rdx}{\sqrt{[2rx-x^2]}\cdot\sqrt{[2g(h-x)]}}\ \ldots\ldots (u).$$

Diamo il segno — al secondo membro, perchè x diminuisce a misura che t aumenta.

L'integrale dell'espressione (u), presa tra i limiti $x=h$, $x=0$, darà il tempo della discesa lungo dell'arco MA, vale a dire la durata di una *semi-oscillazione*; ma non possiamo ottenerla sotto una forma finita con i processi conosciuti fin qui. Per svilupparla in serie, diamo a quest'espressione la forma

$$dt=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left[hx-x^2\right]}\cdot\sqrt{\left[1-\frac{x}{2r}\right]}},$$

ed osservando che in virtù del binomio del Newton abbiamo

$$\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2r}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^2}{4r^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^3}{8r^3}+\text{ec.}\ \ldots\ldots,$$

serie il cui termine generale è

$$\frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)^{\mu},$$

verrà

$$dt=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2r}+\text{ec.}\ \ldots\ldots\right].$$

Gl'integrali dei differenti termini di quest'espressione, astrazione fatta dal fattore comune e costante

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

sono tutti compresi sotto la forma

$$\frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}\cdot(2r)^{\mu}}\cdot\int\frac{-x^{\mu}\cdot dx}{\sqrt{hx-x^2}};$$

dimodochè ponendo

$$A_0=\int\frac{-dx}{\sqrt{hx-x^2}},$$

$$A_1=\int\frac{-xdx}{\sqrt{hx-x^2}},$$

$$A_2=\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{hx-x^2}},$$

ec. = ec.

si ha

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\Big[A_0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}A_1+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{4r^2}A_2$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{8r^2}A_3+\text{ec.}\;\ldots\ldots\Big].$$

Il termine generale di questa serie è

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}\cdot\left(\frac{1}{2r}\right)^{\mu}\cdot A_{\mu}.$$

Allorquando si prendono gl' integrali da $x=h$ fino ad $x=0$, i loro valori A_0, A_1, A_2, ec., sono legati tra di essi in modo che basta conoscere il primo per ottenere tutti gli altri. Infatti, l' integrazione per parti (*Vedi* INTEGRALE) dà l' espressione generale

$$\int\frac{-x^{\mu}dx}{\sqrt{hx-x^2}}=\frac{x^{\mu-1}\sqrt{hx-x^2}}{\mu}+\frac{h(2\mu-1)}{2\mu}\int\frac{-x^{\mu-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}}.$$

Ora, ai due limiti $x=0$, $x=h$ il primo termine del secondo membro si riduce a zero, e si ha semplicemente

$$\int\frac{-x^{\mu}dx}{\sqrt{hx-x^2}}=\frac{h(2\mu-1)}{2\mu}\int\frac{-x^{\mu-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}},$$

ossia

$$A=\frac{h(2\mu-1)}{2\mu}A_{\mu-1},$$

facendo successivamente in quest' ultima espressione $\mu=1$, $\mu=2$, ec., si ottiene

$$A_1=\frac{1}{2}hA_0,$$

$$A_2=\frac{3}{4}h_1=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}h^2A_0,$$

$$A_3=\frac{5}{6}hA_2=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}h^3A_0,$$

ec. = ec.

e in generale

$$A_{\mu}=\frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}h^{\mu}\cdot A_0.$$

Per determinare il valore di A_0, abbiamo generalmente (*Vedi* INTEGRALE)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}=arc.\left[\cos=\frac{2x-h}{h}\right]+\text{costante},$$

integrale che, preso da $x=h$ fino ad $x=o$, si riduce a

$$arc.[\cos=-1]=\pi,$$

π indicando la semi-circonferenza del circolo il cui raggio $=1$. Così il valore di A_μ è

$$A_\mu=\frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}\pi h^\mu$$

e il termine generale dello sviluppo (t) diventa

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\left(\frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2r}\right)^\mu,$$

Indicando dunque con T la durata di un' oscillazione intera, che è il doppio della semi-oscillazione, avremo definitivamente

$$T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{h}{2r}+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2r}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2r}\right)^3+\text{ec.}\ldots\ldots\right]\ldots\ldots(v).$$

Questa serie è tanto più convergente quanto h è più piccola rapporto a $2r$.

Quando l'arco d'oscillazione MM' è piccolissimo, il rapporto dell'altezza verticale $AP=h$ al doppio della lunghezza r del pendolo è una frazione piccolissima, la serie si riduce al suo primo termine, e possiamo allora porre approssimativamente

$$T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\ldots\ldots(x).$$

Abbiamo veduto le conseguenza di quest' espressione al principio di quest' articolo.

17. Nel caso di un piccolissimo arco di oscillazione, la resistenza dell'aria non ha alcuna influenza sensibile sopra la durata delle oscillazioni: il suo effetto generale essendo di diminuire la grandezza dell'arco e per conseguenza l'altezza verticale h, la quale non entra nell'espressione (x), si vede che il valore di T rimane lo stesso per tutti i valori di h trascurabili davanti a $2r$, dimodochè, sebbene per verità gli archi delle oscillazioni di un pendolo diminuiscano continuamente dall'istante in cui esso è messo in moto, fino a quello ove esso si arresta per l'effetto di resistenze estranee, tutte le sue oscillazioni si eseguiscono in intervalli uguali di tempo, allorchè d'altra parte la grandezza della prima oscillazione è piccolissima. L'espressioni (v) ed (x), le quali danno i mezzi di apprezzare l'influenza della grandezza dell'arco sopra la durata delle oscillazioni, ci serviranno a legittimare quest' asserzione.

18. Supponiamo che la lunghezza r del pendolo OM sia di 1^m; la durata di una delle sue oscillazioni infinitamente piccole sarà rigorosamente

$$T=\pi\sqrt{\frac{1}{g}},$$

T esprimendo un numero di secondi. Sostituendo in luogo di π e di g i loro

valori conosciuti, si troverà, per la latitudine di Parigi,

$$T = \frac{3,1415926}{\sqrt{9,8088}} = 1'',00309.$$

Consideriamo ora un arco di oscillazione MM' la cui grandezza sia di 2 gradi; l'altezza verticale $h = AP$, sarà

$$AP = AO - OP = 1 - OP,$$

ovvero, a motivo di $OP = OM . \cos MOA = 1 . \cos 1^\circ$,

$$h = 1 - \cos 1^\circ = 1 - 0,9998407 = 0,0001593,$$

il che darà

$$\frac{h}{2r} = 0,0000796.$$

Sostituendo questo valore nella serie (v), si otterrà, con sette decimali esatti,

$$T = 1'',0031145,$$

durata che non differisce da quella determinata qui sopra che di meno $\frac{1}{10000}$ di secondo. Per archi più piccoli, la differenza sarebbe del tutto inapprezzabile, e si vede che possiamo ammettere, senza errore sensibile, che le piccole oscillazioni di un pendolo sono isocrone e indipendenti dalla quantità h. Ciò non ostante, nelle osservazioni che esigono una grandissima esattezza, si conservano i due primi termini della serie (v), il che dà pel valore di T

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{h}{r}\right].$$

Possiamo mettere quest' espressione sotto una forma più semplice, introducendovi il semi-arco d'oscillazione MOA espresso in parti del raggio $= 1$. A quest' effetto, bisogna osservare che indicando quest'arco con z, il triangolo rettangolo MPO dà

$$OP = OM . \cos z = r . \cos z,$$

donde

$$AP = h = r - r \cos z = r(1 - \cos z),$$

e, per conseguenza,

$$\frac{h}{r} = 1 - \cos z.$$

Ora, (*Vedi* SENO)

$$1 - \cos z = 2\left(\text{sen}\ \frac{z}{2}\right)^2.$$

Così, siccome un piccolo arco si confonde sensibilmente col suo seno, si ha presso a poco

$$\frac{h}{r} = 1 - \cos z = \frac{z^2}{2}.$$

Questo valore, messo nell' espressione precedente, la cangia in

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} \right].$$

Allorquando un arco è dato in gradi, si ottiene la sua espressione in parti del raggio preso per unità mediante la formula

$$\alpha = \frac{\pi x''}{648000},$$

nella quale α'' è il numero di secondi sessagesimali contenuti nell'arco α. I Logaritmi del Callet contengono una tavola che dispensa da questi calcoli.

Per alcune applicazioni relative alla teoria del *pendolo*, si vedano in questo dizionario le parole Gravità e Terra.

Pendolo Balistico. (*Vedi* Balistica).

Per completare la teoria del *pendolo* potrà consultarsi vantaggiosamente la seconda edizione del *Trattato di meccanica* del Poisson, ove questa teoria è stata trattata con molta chiarezza.

PENOMBRA (*Ott.*). Si dà questo nome a quell' ombra leggera e sfumata, che circonda l'ombra perfettamente nera projettata da un corpo, che intercetta i raggi luminosi. *Vedi* Ombra.

PENTADECAGONO. (*Geom.*) (*Vedi* Quindecagono).

PENTAGONO. (*Geom.*) Figura terminata da cinque linee rette, e per conseguenza composta di cinque angoli e di cinque lati. Quando gli angoli sono uguali tra di loro, come pure i lati, il *pentagono dicesi regolare*.

La proprietà che più meriti di essere osservata nei *pentagoni regolari*, è che il quadrato del loro lato è uguale alla somma del quadrato del raggio del circolo circoscritto, e del quadrato del lato del decagono inscritto nello stesso circolo. Infatti, sia ABCDE (*Tav.* IV, *fig.* 1), un pentagono inscritto in un circolo, se si divide l' arco AGB in due parti uguali AG, GB, e che si conducano le corde GB ed AG, queste corde saranno i lati del decagono inscritto; conduciamo di più i raggi OA, OB, OG: l'angolo al centro AOB sarà uguale ai *quattro quinti* di un angolo retto, e per conseguenza ciascuno degli angoli OAB, OBA alla base del triangolo AOB sarà uguale ai *tre quinti* di un angolo retto.

Dividiamo l' angolo GOB in due parti uguali con la retta OH e conduciamo G*m*. Avremo due triangoli isosceli simili GB*m* e AGB, i quali ci daranno

$$Bm : GB :: GB : AB,$$

donde

$$\overline{GB}^2 = Bm \times AB.$$

Da un' altra parte il triangolo AOM è isoscele, poichè l'angolo AO*m* è uguale ai *tre quinti* di un angolo retto, e conseguentemente uguale all' angolo OAB o OA*m*, dunque ancora questo triangolo è simile al triangolo isoscele AOB che ha i medesimi angoli alla base, e se ne deduce

$$Am : AO :: AO : AB,$$

donde

$$\overline{AO}^2 = Am \times AB;$$

aggiungendo quest' uguaglianza alla precedente, avremo

$$\overline{GB}^2 + \overline{AO}^2 = Bm \times AB + Am \times AB$$
$$= (Am + Bm) \times AB = \overline{AB}^2,$$

ossia il teorema enunciato.

Questa proprietà somministra un mezzo facile d' inscrivere un pentagono regolare in un circolo dato. Sul diametro AB (*Tav.* X, *fig.* 9) del circolo, avendo in principio elevato dal centro la perpendicolare DC, si determinerà il punto F mezzo del raggio DB, quindi da questo punto come centro con la distanza CF, come raggio, si descriverà l' arco CE; la corda di quest' arco sarà il lato del pentagono. Infatti, se dal punto F come centro con FD, come raggio, descriviamo l' arco DG, CG sarà la più gran parte del raggio diviso in *media* ed *estrema ragione*, vale a dire il lato del decagono inscritto; ma CG = ED, così EC, il cui quadrato, per la proprietà del triangolo rettangolo, è uguale alla somma dei quadrati di ED e di CD, ovvero alla somma dei quadrati del lato del decagono e del quadrato del raggio, è il lato cercato del pentagono.

Se si trattasse di descrivere un pentagono regolare sopra una retta data, all' estremità di questa retta AB (*Tav.* X, *fig.* 12), si eleverebbe una perpendicolare BC uguale alla sua metà, quindi si condurrebbe AC, che si prolungherebbe in D, facendo CD = BC; da A e da B come centri con la distanza BD, come raggio, si descriverebbero degli archi di circolo i quali si taglierebbero in O, e da questo punto col raggio AO o OB, si descriverebbe un circolo sopra la circonferenza, del quale non sarebbe più necessario di fare altro che di portare cinque volte il lato AB, per descrivere il pentagono domandato.

Prendendo per *unità* il raggio del circolo circoscritto, la superficie del pentagono regolare ha per espressione

$$\frac{5}{8}\sqrt{\left[10+2\sqrt{5}\right]}.$$

PERCUSSIONE (*Mec.*). Impressione che fa un corpo in moto sopra un altro che esso incontra e che urta. (*Vedi* Urto e Comunicazione di Moto).

Gli effetti meccanici della percussione sono sembrati assai sorprendenti ai primi osservatori, i quali non potevano persuadersi che con un piccolo martello e un piccolo moto si conficchi facilmente dei chiodi, i quali sostengono dei pesi immensi, e che difficilmente si conficcherebbero caricandogli di pesi enormi. » Non sarebbe ciò, disse il Camus nel suo *Trattato delle forze motrici*, una cosa » inconcepibile e incredibile, se non se ne vedesse l' esperienza, che alcuni ope» ranti conficcano in poco tempo, con la berta, dei pali i quali sostengono a ten» gono in equilibrio delle muraglie e delle torri intere, di una massa e di un' al» tezza prodigiosa, da più secoli, senza che sembrino abbassati? Bisogna senza » dubbio, per esempio, che conficcando i pali i quali sostengono le torri della » Metropolitana di Parigi da tanti secoli, gli si sia dato più forza con la berta, » o che si siano messi sopra più pesi di tutte le torri e la massa che è dentro » non pesa, poichè essi sono sempre stati in equilibrio dopo, senza avere de» viato in alcuna parte, ed è probabile che si manterranno in questo stato » per più secoli avvenire. » Si comprenderà facilmente la ragione di questi fenomeni, ha detto il D' Alembert, se si fa attenzione alla differenza essenziale che esiste tra la *pressione* di un corpo immobile, e la *percussione* di un corpo in moto. Ogni corpo che cade si accelera cadendo; ma la sua velocità al principio della sua caduta è infinitamente piccola; dimodochè, se esso realmente non cade, ma che sia sostenuto da qualche cosa, lo sforzo delle gravità non tende

che a dargli nel primo istante una velocità infinitamente piccola. Così, un peso enorme, appoggiato sopra un chiodo, non tende a scendere che con una velocità infinitamente piccola; e siccome la forza di questo corpo è il prodotto della sua massa per la velocità, con la quale esso tende a muoversi, ne segue che esso tende a spingere il chiodo con una forza piccolissima. Al contrario, un martello col quale si colpisce il chiodo ha una velocità ed una massa finite, e per conseguenza la sua forza è più grande di quella del peso. Se non si volesse ammettere che la velocità attuale, con la quale il corpo tende a muoversi sia infinitamente piccola, non si potrebbe però fare a meno di convenire che essa è assai piccola, e allora la spiegazione che abbiamo data rimarrebbe la stessa.

È certo che lo sforzo prodotto dal carico, che sostiene un chiodo ovvero un piuolo, non può essere paragonato a quello che resulta dall' urto di un corpo in moto, come il martello il quale viene a colpire la testa del chiodo o del piuolo; poichè il primo sforzo, che non è che una pressione, è rappresentato da

$$mgdt,$$

m essendo il carico, g la velocità che la gravità tende ad imprimere al corpo nell'unità di tempo, e dt l'elemento del tempo; nel mentre che il seconde sforzo è espresso da

$$MV,$$

M essendo la massa del corpo urtante e V una velocità finita. Ora le quantità $mgdt$ e MV appartengono a ordini differenti, dimodochè è teoricamente e fisicamente impossibile di stabilire l' equilibrio tra un urto e una pressione, e conseguentemente, di paragonare uno sforzo all' altro. In una parola, la forza dei corpi in moto non può essere misurata da pesi; vale a dire dalla pressione sola privata del moto locale; e se spesso si è osservato che forze di pressione possono produrre effetti uguali o superiori a quelli delle forze di percussione, è perchè la massa premente, in seguito dell' insufficienza del suo appoggio, si trova animata da una velocità finita, e per conseguenza da una quantità di moto del medesimo ordine di grandezza che la quantità di moto percotente.

Quanto alla superiorità delle forze di percussione sopra quelle di pressione pel conficcamento dei chiodi o dei piuoli, esiste ancora un'altra circostanza che forse sarà utile l' indicare. Il chiodo che si vuole introdurre in un corpo duro ha due resistenze da vincere: in principio bisogna che esso apra davanti a se uno spazio nel quale possa entrare; quindi, a misura che esso si avanza, bisogna di più che esso superi l' attrito e la pressione, che esercitano le pareti del foro in contatto con la sua superficie. Se l' introduzione si effettua mediante una pressione, è evidente che il chiodo cesserà di avanzarsi, tosto che la pressione motrice sarà in equilibrio con le due resistenze che abbiamo indicate; ma quando quest'introduzione è prodotta dalla percussione reiterata di un martello, bisogna osservare che ciascun colpo di martello produce due effetti: il primo è di spingere il chiodo nella cavità formata dalla sua punta; il secondo, di comprimere questo chiodo nel senso della sua lunghezza, vale a dire di aumentare momentaneamente la sua grossezza a spese della sua lunghezza. Questa piccola aumentazione di grossezza tende ad ingrandire il foro; e siccome dopo che la percussione ha cessato, il chiodo, in virtù della sua elasticità, riprenda, almeno presso a poco, la sua prima figura, esiste un vuoto tra le pareti del foro e la parte della superficie del chiodo di già introdotta; questo vuoto distrugge in tutto o in parte la resistenza dovuta all' attrito e alla pressione delle pareti, dimodochè il colpo di martello che segue non ha che da superare la resistenza che incontra la punta del chiodo per andare avanti. Così, la pressione deve superare

due specie di resistenze le quali bentosto si mettono in equilibrio con essa, nel mentre che la percussione non ha da vincere che una delle due. Aggiungete a ciò che la forza muscolare che fa agire il martello, può accumulare in questo strumento una quantità di moto grandissimo avuto riguardo alla piccolezza della massa.

Diversi sapienti hanno fatto dell' esperienze sopra gli effetti degli urti dei corpi pesanti che si lasciano cadere liberamente. I resultamenti ottenuti dai due Camus, da Bernoulli, dal Mariotte, dal S'Gravesande, dall'ingegnere Soyer, tendono a stabilire che questi effetti sono proporzionali alle masse dei corpi urtanti, come pure all' altezze delle cadute; ovvero, il che significa lo stesso, ai quadrati delle velocità finali, il che si accorda con le migliori teorie della percussione. Alcuni altri resultamenti, e particolarmente quelli del Rondelet, sembrerebbero indicare che gli effetti degli urti sono proporzionali alle masse, e alle radici quadrate dell' altezze delle cadute, ovvero, alle semplici velocità finali; ma, come il Navier ha molto bene fatto osservare, vi è luogo da credere che, se in queste esperienze gli effetti dei grandi urti sembrano minori di quello che dovrebbero essere, ciò dipende perchè allora è impossibile di evitare, che una parte della forza del colpo non sia comunicata all' appoggio del corpo sottoposto all' esperienza e perduta per l' effetto che si misura, circostanza che d' altra parte si ritrova ugualmente nella maggior parte dei casi nelle battiture dei piuoli. Il Camus, autore del *Trattato delle forze moventi*, che non bisogna confondere col Camus accademico, ha riconosciuto pel primo che la natura dei corpi urtati e degli appoggi, sopra i quali essi si trovano portati, esercita una grande influenza sopra gli effetti della percossione: quantunque le sue ricerche non offrano alcun resultamento esatto, esse non sono prive d' interesse, e possono ancora essere consultate con frutto.

Gli effetti utili principali che si ottengono dalla percussione impiegata come agente meccanico sono:

1.° L' affondamento o conficcamento di un corpo in un altro che si lascia penetrare, come, per esempio, il conficcamento dei piuoli nel terreno:

2.° Lo schiacciamento e l' allungamento dei corpi duttili e malleabili:

3.° La polverizzazione dei corpi non duttili, o la separazione di questi corpi in più frammenti:

4.° Una fortissima pressione prodotta dall' introduzione di zeppe tra dei corpi sottoposti a non potere allontanarsi che debolmente.

La percussione può essere impiegata in due maniere essenzialmente differenti. Seguendo la prima, si eleva un corpo ad una altezza determinata, quindi si abbandona liberamente all' azione della gravità. Ed è in questa guisa che si fanno agire le berte delle macchine da conficcare pali, e i grossi martelli o magli delle fucine. Seguendo la seconda, il motore aggionge alla forza acceleratrice della gravità un' altra forza acceleratrice, che esso imprime al corpo comprimendolo per tutta la durata del moto. Per esempio, il fabbro aumenta considerabilmente la forza di percussione del martello di cui esso si serve, e gli comunica una quantità di moto, dovuta alla sua forza muscolare, ben superiore a quella che esso acquisterebbe se esso cadesse liberamente. Per dare un potente colpo di martello, è essenziale di elevarlo e di fargli descrivere il più grand' arco possibile, affinchè la forza acceleratrice abbia il tempo di accumulare nella massa dell' instrumento una gran quantità di moto.

Percussione *dei fluidi*. (*Vedi* Resistenza).

Centro di Percussione. (*Vedi* Centro).

Vedi, per la teoria della percussione: il Prony, *Nuova architettura idraulica*; e per i suoi effetti: Il Camus, gentiluomo lorenese. *Trattato delle forze motrici*. — Il Camus, dell' Accademia delle Scienze di Parigi, *Memoria sul conficca-*

mento delle palle nella creta (Memoria dell'Accademia di Parigi, 1728). — Bernoulli, *Discorso sopra la comunicazione del moto* (Premio dell'Accademia delle Scienze di Parigi). — Il Mariotte, *Trattato del moto delle acque*. — Il Rondelet, *Trattato dell'arte di fabbricare*. — Il Perronet, *Memoria sopra i piuoli e palafitte*. — Lo Sganzin, *Programma di un corso di costruzione*.

PERFETTO (*Aritm.*). Gli antichi aritmetici indicavano sotto il nome di *numero perfetto* quello, che è uguale alla somma di tutte le sue parti aliquote. Tale è 6 le cui parti aliquote sono 1, 2 e 3; tale è ancora 28 le cui parti aliquote sono 1, 2, 4, 7 e 14.

L'Euclide ha dimostrato che se 2^n-1 è un numero primo, il prodotto

$$2^{n-1}(2^n-1)$$

è *un numero perfetto* (*Vedi* Elementi di Euclide, Libro 9). Ed è mediante questa formula che si trova

$$2\ .(2^2-1)=6$$
$$2^2.(2^3-1)=28$$
$$2^4.(2^5-1)=496$$
$$2^6.(2^7-1)=8128$$
$$2^{12}.(2^{13}-1)=33550336$$
$$2^{16}.(2^{17}-1)=8589869056$$
$$2^{18}.(2^{19}-1)=137438691328$$
$$2^{30}.(2^{31}-1)=2305843008139952128$$

i quali sono tutti numeri perfetti. Il numero $2^{31}-1$, che l'Eulero assicura esser primo, è il più gran numero primo conosciuto fin qui, e per conseguenza $2^{30}(2^{31}-1)$ è il più gran numero perfetto che sia stato ancora scoperto.

PERIELIO (*Astron.*). Punto dell'orbita di un pianeta nel quale si trova esso in maggior vicinanza al sole. *Vedi* Afelio.

PERIFERIA (*Geom.*). Contorno di una figura curvilinea. Questa è la linea curva che la termina. La *periferia* di un circolo prende il nome particolare di *circonferenza*.

PERIGEO (*Astron.*). Punto dell'orbita del sole o della luna, nel quale questi astri sono più vicini alla terra: il punto opposto dicesi *apogeo*. *Vedi* Apogeo.

PERIGIOVE (*Astron.*). Nome dato da alcuni astronomi al punto della minima distanza dei satelliti di Giove da questo pianeta, ossia all'apside superiore delle loro orbite.

PERIMETRO (*Geom.*). Si chiama così il contorno o l'estensione che termina una figura o un corpo.

I *perimetri* delle superficie sono linee; quelli dei solidi sono superficie. Quando le superficie sono circolari, il perimetro prende il nome di *periferia* o di *circonferenza*.

PERIODICO. Epiteto che si dà a qualunque moto, corso o rivoluzione che si eseguisce in un modo regolare, ricominciando sempre lo stesso *periodo*. Per esempio, il moto *periodico* della luna è quello, mediante il quale la sua rivoluzione intorno della terra si compisce nello spazio di un mese lunare.

In aritmetica, si chiamano Frazioni periodiche le frazioni decimali, le quali sono composte mediante la repetizione all'infinito di un *periodo* delle stesse cifre, come

0,555555555555 . . . . *all' infinito.*
0,34 34 34 34 34 34 . . . . *all' infinito.*
0,758 758 758 758 . . . . *all' infinito.*

Si cade in simili frazioni, quando vogliamo ridurre in frazione decimale una frazione ordinaria, il cui denominatore non contiene i fattori 2 e 5, soli numeri commensurabili con 10. Per farsi una ragione di questa circostanza, è necessario rammentarsi il processo di riduzione dato alla parola Decimale. Infatti, $\frac{N}{M}$ essendo una frazione ridotta alla sua più semplice espressione, vale a dire tale che i suoi due termini N ed M non abbiano alcun fattore comune, per trovare le cifre decimali si moltiplica N per una potenza μ di 10 capace di rendere $N \cdot 10^{\mu}$ divisibile per M; se la divisione può effettuarsi esattamente, si ha una frazione decimale sotto una forma finita eguale alla frazione proposta; ed è così, per esempio, che

$$\frac{3}{4} \text{ diventa } \frac{3 \cdot 10^2}{4} = 75,$$

donde

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Ma se, per quanto grande si prenda μ, la divisione di $N \cdot 10^{\mu}$ per M non può effettuarsi esattamente, l'operazione può prolungarsi all'infinito, e si ha una frazione decimale di un numero indefinito di cifre, la quale è sempre *periodica*, come vedremo.

Quando il denominatore M è della forma $2^m \cdot 5^n$; ovvero non contiene altri fattori fuori di 2 e 5, possiamo sempre prendere μ abbastanza grande perchè 10^{μ}, e per conseguenza $N \cdot 10^{\mu}$ sia esattamente divisibile per $2^m \cdot 5^n$, poichè $10^{\mu} = 2^{\mu} \cdot 5^{\mu}$; così facendo solamente μ uguale al più grande degli esponenti *m* ed *n*,

$$\frac{2^m \cdot 5^n}{2^{\mu} \cdot 5^{\mu}}$$

diventa un numero intero, cioè 5^{m-n} se $m > n$ è 2^{n-m}, se $n > m$, si ha dunque primo caso

$$\frac{N \cdot 10^m}{2^m \cdot 5^n} = N \cdot 5^{m-n}, \text{ donde } \frac{N}{2^m \cdot 5^n} = \frac{N \cdot 5^{m-n}}{10^m},$$

e nel secondo

$$\frac{N \cdot 10^n}{2^m \cdot 5^n} = N \cdot 2^{n-m}, \text{ donde } \frac{N}{2^m \cdot 5^n} = \frac{N \cdot 2^{n-m}}{10^m}:$$

da ciò segue che la frazione decimale ha sempre un numero finito di cifre.

Quando al contrario, il denominatore contiene altri numeri primi diversi da 2 e 5, possiamo dargli la forma

$$p \cdot 2^m \cdot 5^n,$$

p essendo un numero primo, o più generalmente p essendo il prodotto di tutti i numeri primi diversi da 2 e 5, i quali entrano in questo denominatore; e diviene evidente che $N \cdot 10^{\mu}$ non può mai diventare esattamente divisibile per

$p \cdot 2^m \cdot 5^n$, qualunque sia μ, poichè N non è divisibile per p. Ciò non ostante, quantunque la divisione di $N \cdot 10^{\mu}$ per $p \cdot 2^m \cdot 5^n$, o quella di N per M, possa allora prolungarsi all'infinito, dando a μ dei valori continuamente più grandi, o il che torna lo stesso, aggiongendo degli zeri a ciascun resto successivo, questi resti successivi non possono ammettere che N—1 valori differenti, poichè essi non possono essere che 1, 2, 3, 4, ec. . . . . . N—1. Così, nel corso di N divisioni, si ricaderà necessariamente sopra uno dei resti di già trovato, e partendo da questo resto, si riprodurranno i medesimi decimali al quoziente, fino a tanto che si trovi una seconda volta lo stesso resto, e così di seguito all'infinito. La frazione decimale formata da una tale divisione indefinita sarà dunque una *frazione periodica*.

Si chiamano *frazioni periodiche semplici* o *composte*, quelle il cui periodo comincia immediatamente dopo la virgola, ovvero, alla prima cifra decimale. Le frazioni periodiche *semplici* sono quelle il cui periodo non ha che una sola cifra, come

0,4444444444 . . . . . ec.
0,7777777777 . . . . . ec.

Le frazioni periodiche *composte* sono quelle il cui periodo ha più cifre, come

0,37 37 37 37 37 37 . . . . . ec.,
0,7954 7954 7954 . . . . . ec.

Si chiamano *frazioni periodiche miste*, le frazioni periodiche nelle quali il periodo non comincia a manifestarsi che dopo più cifre decimali, come

0,56 78 75 75 75 75 . . . . . ec.

Fra tutte le questioni che possiamo proporci sopra le frazioni periodiche, la più importante è quella di ritrovare le frazioni ordinarie, che gli hanno dato origine. Questa questione fa conoscere una proprietà assai osservabile del numero 9 e dei numeri composti di questa cifra, tali come 99, 999, 9999, ec. Ciò dipende perchè dividendo una quantità qualunque per uno qualunque di questi numeri, più grande di essa, si produce una frazione periodica, il cui periodo ha sempre lo stesso numero di cifre del divisore. Di più, questo periodo è formato della quantità divisa essa stessa, preceduta se è necessario, da un numero sufficiente di zeri per completarla. Per esempio:

$$\frac{5}{9} = 0,5555555555 \ldots\ldots \text{ ec.},$$

$$\frac{5}{99} = 0,05\ 05\ 05\ 05\ 05 \ldots\ldots \text{ ec.},$$

$$\frac{5}{999} = 0,005\ 005\ 005\ 005 \ldots\ldots \text{ ec.},$$

ec. ec.

$$\frac{75}{99} = 0,75\ 75\ 75\ 75\ 75\ 75. \ldots\ldots \text{ ec.},$$

$$\frac{75}{999} = 0,075\ 075\ 075\ 075 \ldots\ldots \text{ ec.},$$

ec. ec.

Esaminando i numeri formati dalla cifra 9, si riconosce che

$$9 = 10 - 1,$$
$$99 = 10^2 - 1,$$
$$999 = 10^3 - 1,$$
$$\text{ec.} = \text{ec.};$$

donde si vede che la forma generale di questi numeri è $10^{\mu} - 1$. Così possiamo dimostrare la proprietà di questi numeri, osservando che N essendo un numero qualunque, e $10^{\mu} - 1$ un numero più grande, si ha

$$\frac{N}{10^{\mu} - 1} = N \cdot \left(10^{\mu} - 1\right)^{-1};$$

vale a dire

$$\frac{N}{10^{\mu} - 1} = \frac{N}{10^{\mu}} + \frac{N}{10^{2\mu}} + \frac{N}{10^{3\mu}} + \frac{N}{10^{4\mu}} + \text{ec.}$$

poichè, resulta da questa decomposizione una serie infinita, composta dalla ripetizione di un stesso periodo $\frac{N}{10^{\mu}}$, il quale, scritto senza denominatore, come è l'uso per le frazioni decimali, è semplicemente N, ovvero oN, oppure ooN, secondochè N è composto di μ o di $\mu - 1$, o di $\mu - 2$, cifre, ec.

Mediante questa generazione delle frazioni periodiche, per riportarle alle frazioni ordinarie, basta di prendere il periodo per numeratore, e di dargli per denominatore un numero composto di tante cifre 9, quante cifre vi sono nel periodo. Ed è con questo metodo che si trova che la frazione periodica

$$0{,}714285\ 714285\ 714285\ \ldots\ldots \text{ec.}$$

è eguale alla frazione ordinaria

$$\frac{714285}{999999},$$

la quale si riduce a $\frac{5}{7}$.

Ciò che precede è sufficiente per trasformare qualunque *frazione periodica mista* in frazione ordinaria, poichè cominciando dall'esaminare il caso più semplice, quello in cui le cifre che precedono il periodo sono tutti zeri, e prendendo per esempio

$$0{,}0000\ 52\ 52\ 52\ 52\ 52\ \ldots\ldots \text{ec.}$$

è evidente che avanzando sufficientemente la virgola, si riporta questa frazione ad una frazione composta

$$0{,}52\ 52\ 52\ 52\ 52\ 52\ 52\ \ldots\ldots \text{ec.}$$

che è uguale a $\frac{52}{99}$; ma in questo caso avanzando la virgola di quattro posti si è reso la proposta *dieci mila* volte più grande, bisogna dunque rendere $\frac{52}{99}$,

dieci mila volte più piccola, il che si eseguisce ponendo 4 zeri alla destra del 99, e si ha $\frac{52}{990000}$ per la frazione ordinaria domandata. Così in questo caso semplice, il periodo forma ancora il numeratore della frazione ordinaria, e il denominatore si compone di tanti 9 quante cifre vi sono nel periodo, seguito da tanti zeri quanti se ne trovano avanti il periodo.

Qualunque frazione periodica mista si riporta al caso precedente, decomponendola in due altre frazioni. Per esempio se si trattasse di

$$0,35\ 23\ 23\ 23\ 23\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{ec.}$$

si potrebbe considerarla come la somma di due frazioni

$$0,35$$
$$0,00\ 23\ 23\ 23\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{ec.}$$

di cui l'ultima ridotta in frazione ordinaria è

$$\frac{23}{9900}.$$

La proposta è perciò uguale a

$$\frac{35}{100}+\frac{23}{9900},$$

il che dà, riducendo allo stesso denominatore

$$\frac{35\times99}{9900}+\frac{23}{9900}=\frac{35\times99+23}{9900}=\frac{3488}{9900}.$$

La regola generale è dunque di moltiplicare le cifre che precedono il periodo, per un numero composto di tanti 9, quante cifre ha il periodo, di aggiungere quindi il periodo al prodotto e di dare alla somma, per denominatore, il numero per il quale si è moltiplicato, seguito da tanti zeri quante cifre vi sono avanti il periodo.

Applicando questa regola alla frazione periodica mista

$$0,030\ 50\ 50\ 50\ 50\ 50\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{ec.},$$

la troveremo uguale a

$$\frac{030\times99+50}{99000}=\frac{3020}{99000}=\frac{151}{4450}.$$

Il Wallis sembra essere stato il primo ad occuparsi delle frazioni periodiche, divenute inseguito l'oggetto delle ricerche dell'Eulero, del Lambert e del Robertson. Esiste sopra tutte queste ricerche una memoria assai curiosa di Giovanni Bernoulli, inserita nel tomo II delle *Nuove Memorie dell' Accademia delle Scienze di Berlino*.

PERIODO (*Astron.*). Dicesi così quello spazio di tempo che un pianeta o un satellite impiega a fare la sua intera rivoluzione nella sua orbita. *Vedi* Pianeta.

Periodo, in cronologia, significa un intervallo di tempo che serve di norma per contare gli anni. *Vedi* Epoca.

Periodo di Dionisio o di Vittorio. Questo periodo si forma mediante il prodotto di 28 e di 19, cioè del ciclo solare e del lunare: è un intervallo di 532 anni che riconduce i novilunj e la festa di Pasqua nel medesimo giorno del-

l'anno giuliano. Le sue denominazioni derivano dall'essere stato proposto in origine da Vittorio, e dall'essersene poi servito Dionisio il Piccolo. Questo periodo non è più di alcun uso.

Periodo Giuliano. Spazio di 7980 anni durante il quale non si trovano due anni che abbiano i medesimi numeri pei tre cicli solare, lunare e d'indizione. Esso si compone del prodotto di questi cicli, ossia di quello dei tre numeri 28, 19 e 15.

Questo periodo è stato proposto, nel 1583, da Scaligero, come una misura universale in cronologia, ed è oggi molto usato. Il primo anno dell'era cristiana corrisponde all'anno 4713 del periodo giuliano: così, per trovare a quale anno di questo periodo corrisponda un anno proposto, basta aggiungerli 4713. Così l'anno presente 1846 è l'anno 6559 del periodo giuliano.

Periodo caldeo. È questo il famoso periodo di 18 anni e 10 giorni che riconduce gli ecclissi del sole e della luna nello stesso ordine. *Vedi* Ecclisse.

Periodo *luni-solare di Luigi il Grande*. Ciclo di 11600 anni che riconduce i novilunj nello stesso giorno e quasi nella stess' ora dell'anno gregoriano. Questo periodo è stato proposto da Cassini nelle sue *Regole dell' astronomia indiana*.

Esistono ancora molti altri periodi che hanno avuto qualche celebrità, ma che i progressi dell'astronomia, rendendoli inutili, hanno fatto dimenticare. Su questo soggetto può consultarsi l'*Arte di verificare le date*.

PERISCI (*Geogr.*). In quelle latitudini nelle quali il sole sta per ventiquattro ore continue sopra l'orizzonte, vale a dire nei paesi compresi dentro i circoli polari, le ombre fanno una intera rivoluzione intorno agli oggetti che le projettano, donde gli abitanti di tali regioni diconsi *Perisci*, secondo la greca etimologia.

PERMUTAZIONE (*Alg.*). Trasposizione che si fa nelle parti di uno stesso tutto, per ottenere le diverse disposizioni delle quali esse sono capaci. Per esempio, un gruppo di lettere come *abcd*, essendo dato, facendo variare le posizioni primitive di queste lettere come segue

$$abdc,\quad adbc,\quad bacd,\quad cabd,\quad ec.,$$

questi nuovi gruppi saranno le *permutazioni* del primo.

La teoria delle permutazioni trovando numerose applicazioni nella scienza dei numeri, esporremo i suoi principii generali.

Una sola lettera a non può avere che *una* sola disposizione, ma due lettere a e b ammettono due disposizioni differenti o due *permutazioni*, poichè possiamo situare a avanti o dopo b, il che dà

$$ab,\quad ba.$$

Per trovare tutti i gruppi delle permutazioni di cui tre lettere a, b, c sono capaci, si pone successivamente davanti ciascuna di esse la permutazioni delle due altre, come segue

$$a\left\{bc,\ cb\right\},$$
$$b\left\{ac,\ ca\right\},$$
$$c\left\{ab,\ ba\right\},$$

e riunendo inseguito ciascuna lettera ai gruppi corrispondenti, si hanno le sei permutazioni

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Il *numero* delle permutazioni di tre lettere è dunque uguale a 3 volte quello delle permutazioni di 2 lettere, ossia uguale a 3×2.

I gruppi delle permutazioni di quattro lettere a, b, c, d si formano nella stessa maniera, ponendo davanti ciascuna di queste lettere le permutazioni delle tre altre, nella seguente maniera

$$a\left\{bcd,\ bdc,\ cbd,\ cdb,\ dbc,\ dcb\right\},$$
$$b\left\{acd,\ adc,\ cad,\ cda,\ dac,\ dca\right\},$$
$$c\left\{abd,\ adb,\ bad,\ bda,\ dab,\ dba\right\},$$
$$d\left\{abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba\right\},$$

il che dà, riunendo ciascuna lettera ai gruppi corrispondenti, le 24 permutazioni

$$\begin{array}{l} abcd,\ abdc,\ acbd,\ acdb,\ adbc,\ adcb, \\ bacd,\ badc,\ bcad,\ bcda,\ bdac,\ bdca, \\ cabd,\ cadb,\ cbad,\ cbda,\ cdab,\ cdba, \\ dabc,\ dacb,\ dbac,\ dbca,\ dcab,\ dcba, \end{array}$$

Il *numero* delle permutazioni di 4 lettere è dunque uguale a 4 volte quello di 3 lettere, cioè a $4 \times 3 \times 2$.

Siccome, in generale, per formare tutti i gruppi delle permutazioni di m lettere, bisogna situare davanti ciascuna di esse le permutazioni delle $m-1$ altre lettere, diviene evidente che il *numero* delle permutazioni di m lettere è uguale ad m volte quello delle permutazioni di $m-1$ lettere. Così indicando generalmente con P_m il numero delle permutazioni di m lettere, abbiamo

$$\begin{aligned} P_m &= m \cdot P_{m-1}, \\ P_{m-1} &= (m-1)P_{m-2}, \\ P_{m-2} &= (m-2)P_{m-3}, \\ \text{ec.} &= \text{ec.}, \\ P_{m-n} &= (m-n)P_{m-n-1} \end{aligned}$$

e, sostituendo ciascuno di questi valori in quello che lo precede

$$P_m = m(m-1)m-2) \ldots\ldots (m-n)P_{m-n-1}$$

ovvero

$$P_m = m(m-1)(m-2) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \ldots\ldots (a);$$

facendo

$$n = m-1, \quad \text{donde} \quad P_{m-n-1} = P_{m-m+1} = P_1 = 1.$$

Se si domandasse per esempio il numero delle permutazioni di 8 lettere, si farebbe $m = 8$, e la formula (a) darebbe

$$P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$$

Ciò che precede suppone che tutte le lettere siano differenti, poichè se una di esse dovesse essere ripetuta più volte, il numero delle permutazioni diminuirebbe, poichè un gruppo aa non avendo permutazione, tre lettere a, a, b che

ne ammetterebbero *sei* se esse fossero differenti, non ne hanno più che *tre* *aab*, *aba*, *baa*.

Bisogna considerare in generale che se sopra m lettere, *una* si trova n volte, i cangiamenti di posto di queste n lettere tra loro, non apportano alcun cangiamento nei gruppi ove esse si trovano, nel mentre che supponendole tutte differenti, ciascuno di questi gruppi si troverebbe somministrare tante permutazioni differenti quante n lettere possono ammetterne. Così per avere il numero totale delle permutazioni di m lettere di cui n sia la stessa, bisogna dividere il numero totale delle permutazioni di m lettere per quello di n lettere; si ha dunque per questo numero l' espressione

$$\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{n(n-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,2\,.\,1},$$

ovvero, semplicemente

$$\frac{1^{m|1}}{1^{n|1}},$$

servendoci della notazione delle fattorielle. (*Vedi* QUESTA PAROLA).

Se le $m-n$ altre lettere fossero le medesime, bisognerebbe ancora dividere l' espressione quì sopra per il numero delle permutazioni di $m-n$ lettere, poichè tutti i gruppi che differissero tra loro, per le disposizioni di queste $m-n$ lettere diventano identici, e si riducono ad uno solo. Dunque

$$\frac{1^{m|1}}{1^{m-n|1}\,.\,1^{n|1}}$$

è l' espressione generale del numero delle permutazioni di una riunione composta di due lettere, di cui l' una si trova ripetuta n volte e l'altra $m-n$ volte. Ed è sopra quest' espressione che è fondata la dimostrazione che abbiamo data del *Binomio* del Newton (*Vedi* QUESTA PAROLA.)

Possiamo facilmente concludere che il numero della permutazioni di una riunione di m lettere, di cui una prima entra n volte nella riunione, una seconda. o volte, una terza p volte, una quarta q volte ec., è ugnale a

$$\frac{1^{m|1}}{1^{n|1}\,.\,1^{o|1}\,.\,1^{p|1}\,.\,1^{q|1}\,.\,\text{ec.}},$$

m essendo $n+o+p+q+$ ec.

L' accrescimento rapidissimo del numero delle permutazioni, quando quello degli oggetti aumenta, ha dato origine ad un problema curioso delle probabilità; è stato domandato se da che si giuoca al giuoco di carte denominato il *picchetto*, tutte le disposizioni possibili di 32 carte si erano potute presentare. Siccome le carte sono tutte differenti, il numero delle loro permutazioni, o delle loro disposizioni differenti è

$$1^{32|1} = 263\ 130\ 836\ 933\ 693\ 530\ 167\ 218\ 012\ 160\ 000\ 000.$$

Così supponendo che due *miliardi* o due *billioni* di giuocatori giocassero 400 colpi di picchetto per giorno, e ammettendo inoltre che veruna disposizione non si riproduca, bisognerebbe loro più di *diciotto mila miliardi di millioni di secoli* per esaurire tutte le permutazioni possibili delle 32 carte.

PERPENDICOLARE (*Geom.*). Linea retta che ne incontra un' altra in modo da formare con quest' ultima degli angoli retti. (*Vedi* NOZIONI PRELIMINARI.).

Due linee rette che si tagliano non hanno che due relazioni possibili: esse sono *oblique* o *perpendicolari* l' una rapporto all' altra. Queste due relazioni som-

ministrano diversi teoremi fondamentali della geometria elementare che esporremo.

1. *Di tutte le linee rette che possiamo condurre da un punto ad una retta, la perpendicolare è la più corta.*

Sia AB la retta data e C il punto. (*Tav.* X *fig.* 11). Da questo punto abbassiamo la perpendicolare CD, e conduciamo un'obliqua qualunque CE. Il triangolo ECD essendo rettangolo in D, l'angolo CED è più piccolo dell'angolo CDE, e conseguentemente il lato EC è più grande del lato CD. (*Vedi* TRIANGOLO). Siccome possiamo dire altrettanto di qualunque altra obliqua, ne resulta che la perpendicolare è la più corta di tutte le linee, che si possono condurre da un punto ad un altro, così essa serve a misurare la distanza del punto alla linea.

2. *Di due oblique che partono da uno stesso punto di una perpendicolare, quella che si allontana di più dal suo piede è la più lunga.*

Consideriamo le due oblique CE, CF (*medesima figura*); abbiamo CF $>$ CE, poichè l'angolo FEC esterno rapporto al triangolo rettangolo CED è più grande di un angolo retto, nel mentre che l'angolo CFE interno al triangolo rettangolo FDC è più piccolo di un angolo retto; dunque nel triangolo ECF il lato CF è opposto ad un maggior angolo del lato CE; dunque ec.

3. *Da un punto preso fuori di una retta non possiamo condurre che due oblique uguali a questa retta, una da una parte e l'altra dall'altra.*

Poichè una terza obliqua sarebbe più o meno lontana dal piede della perpendicolare, e conseguentemente sarebbe più o meno lunga.

4. *Due oblique uguali si allontanano ugualmente dal piede della perpendicolare.* Questa è una conseguenza di ciò che precede, poichè non possiamo supporre il contrario senza cadere in contradizioni.

5. *Se una retta è perpendicolare sul mezzo di un'altra retta, tutti i suoi punti sono a distanze uguali dalle due estremità di questa retta.*

Infatti, se da un punto qualunque della perpendicolare si conduce un'obliqua a ciascuna delle estremità della retta, queste oblique saranno ugualmente lontane dal piede della perpendicolare, e per conseguenza saranno uguali, dunque questo punto della perpendicolare, e possiamo dire altrettanto di tutti gli altri, è ugualmente distante dalle due estremità della retta.

6. Siccome due punti bastano per determinare la posizione di una retta, resulta dalla precedente proposizione, che per elevare una perpendicolare sul mezzo di una linea retta data, basta determinare due punti ugualmente distanti dalle estremità di questa linea; il che si eseguisce nella seguente maniera. Sia AB (*Tav.* IX, *fig.* 6) la retta data, dal punto A come centro, con un raggio maggiore della metà di AB, si descriveranno al di sopra e al di sotto di questa linea due archi di circolo, quindi dal punto B con lo stesso raggio si descriveranno due altri archi di circolo, che taglieranno i primi nei punti C e D. Questi punti essendo mediante questa costruzione ugualmente distanti da A e da B, la retta CD, che si farà passare per questi punti, sarà perpendicolare sul mezzo di AB. Possiamo impiegare la stessa costruzione per dividere una retta in due parti uguali.

Se la retta data fosse situata in modo tale, che non si potessero descrivere degli archi di circolo al di sopra e al di sotto, dopo aver descritto gli archi i quali si tagliano in C, si cangerebbe raggio, e da A e da B con un'altra apertura di compasso si descriverebbero gli archi che si tagliano in D'. I punti C e D' determinerebbero ugualmente la posizione della perpendicolare.

7. Se si trattasse di condurre da un punto dato D (*Tav.* X, *fig.* 7) ad una retta AB una perpendicolare, si tirerebbe in un modo qualunque l'obliqua DC, quindi dal mezzo F di questa obliqua si descriverebbe con la sua metà come raggio il semi-circolo CED. Unendo i punti E e D, si avrebbe la perpendicolare

domandata. Infatti, per una proprietà del circolo (*Vedi* Angolo) l'angolo CED è retto.

8. La costruzione precedente può servire per elevare una perpendicolare all'estremità di una retta data, poichè sopponendo che il punto E sia questa estremità, basta prendere a piacere un punto F, e con la distanza EF descrivere un circolo. Dal punto C ove il circolo taglia la retta si conduce il diametro CD, il quale determina il secondo punto D della perpendicolare.

Una retta dicesi *perpendicolare* ad un *piano*, quando essa è *perpendicolare* a tutte le rette, che si possono condurre in questo piano dal punto ove essa l'incontra.

Un piano dicesi *perpendicolare* ad un altro piano, quando una retta, condotta in uno dei piani, perpendicolare alla loro comune sezione, è perpendicolare all'altro piano.

Nella *Teoria delle curve* la *perpendicolare* alla tangente di uno dei punti di una curva, si chiama *perpendicolare* alla curva o *normale*. Quest' ultima denominazione è quella che è più in uso. (*Vedi* Sotto-Normale).

PERPENDICOLO. Nome che vien dato al filo che, in una squadra, è teso dal piombo e dà la direzione della perpendicolare all' orizzonte. (*Vedi* Livello).

PERPETUO (*Moto*). Moto che si perpetua indefinitamente senza il soccorso di alcuna causa estranea, o azione nuova, che venga a rianimarlo.

Veruna macchina, per quanto ingegnosa sia, non può produrre un tal moto a motivo dell'attrito delle parti, il quale finisce sempre per assorbire il momento di attività delle forze vive iniziali.

La ricerca del *moto perpetuo* è, come quella della *quadratura del circolo*, l' occupazione delle persone, che non hanno alcuna conoscenza delle leggi della meccanica e dei principii della geometria.

PERSEO (*Astron.*). Costellazione boreale composta di 59 stelle nel Catalogo Britannico. È situata tra Andromeda e il Cocchiere (*Tav.* LIX) e comprende una bella stella di seconda grandezza chiamata *Algenib*.

PERTURBAZIONE (*Astron.*). Ineguaglianza nel moto dei pianeti prodotta dall'attrazione scambievole di questi corpi.

Se ogni pianeta non obbedisse che all'azione del sole, il suo moto si effettuerebbe in un' ellisse, la cui forma sarebbe costante, ed ognuno dei periodi di questo moto sarebbe esattamente lo stesso di quello che lo ha preceduto come di quello che lo segue. Ma, l'attrazione essendo universale e reciproca tra tutte le parti della materia, ogni pianeta risente continuamente l' azione di tutti gli altri, e da questa azione, che varia ad ogni istante pel cangiamento delle direzioni e delle distanze, debbono necessariamente resultare delle variazioni nelle curve o nelle orbite percorse. È appunto a tali variazioni che è stato dato il nome di *perturbazioni*.

Le masse dei pianeti, confrontate con quella del sole, essendo di una piccolezza estrema, le loro attrazioni scambievoli sono debolissime rapporto al potere centrale che gli sforza a circolare intorno a quest'astro, e gli effetti di queste attrazioni, o delle forze dette *perturbatrici*, sono proporzionalmente piccolissimi. In generale, questi effetti non divengono sensibili che in un lungo intervallo di tempo, ed è stata necessaria tutta la perfezione degli strumenti moderni e dei metodi di osservazione per scoprire alcune di queste *perturbazioni*, la cui esistenza peraltro è dimostrata *a priori* dalla scienza.

La teoria delle perturbazioni forma oggi la parte la più elevata di ciò che dicesi *meccanica celeste*, e quella verso la quale si sono diretti gli sforzi dei più grandi geometri. Ad onta dei loro lavori, il problema fondamentale di questa teoria non è per ora che intavolato, e la sua soluzione completa esige delle

integrazioni di equazioni differenziali che oltrepassano i mezzi attuali della scienza dei numeri. Passeremo ad accennare i punti principali di questo problema.

A cagione dell'estrema piccolezza delle forze perturbatrici e degli effetti che esse producono, si può, senza timore di errore nei resultati, calcolare ogni effetto separatamente, e come se tutti gli altri non esistessero; perchè, per un principio di meccanica, se forze piccolissime agiscono simultaneamente sopra un sistema materiale, l'effetto totale delle forze combinate è la somma degli effetti che produrrebbe ciascuna forza in particolare, almeno finchè la loro azione non abbia alterato in un modo sensibile le relazioni primitive delle parti del sistema. Così, per calcolare le influenze perturbatrici di più corpi compresi in un medesimo sistema, quando uno di questi corpi ha una preponderanza grandissima sugli altri, possiamo contentarci di calcolare isolatamente l'influenza di ognuno di questi corpi in particolare, senza occuparci della combinazione di queste influenze tra loro, combinazione che non può alterare le relazioni originali del sistema che mediante l'accumulazione dei suoi effetti in immensi periodi di tempo. In tal guisa, qualunque sia il numero dei corpi che compongono il sistema, il problema è condotto alla considerazione di tre corpi: un corpo centrale o predominante, un corpo perturbante e un corpo perturbato: questi due ultimi si alternano secondochè si tratta di determinare il moto dell'uno o dell'altro. La determinazione delle leggi di questo moto forma l'oggetto del problema divenuto tanto celebre sotto il nome di Problema dei tre corpi.

Sia S il corpo principale (*Tav.* CXCV, *fig.* 1) e T e P i corpi respettivamente perturbato e perturbante. Rappresentando con ATBA l'orbita che il corpo T descriverebbe senza la forza perturbatrice, e supponendo che questo corpo si trovi in T in una data epoca, sia TT′ l'arco che descriverebbe nell'istante seguente se non fosse perturbato dall'azione del corpo P, del quale CPDC rappresenta l'orbita situata in un altro piano diverso da quello dell'orbita ATBA, ma che taglia il piano di quest'ultima secondo la linea dei nodi EF. Conduciamo nel punto T′ una tangente all'arco TT′: questa tangente anderebbe a tagliare la linea dei nodi in R. Ciò posto, siccome l'azione di P sopra S e sopra T si effettua nelle direzioni PS e PT, nessuna delle quali è nel piano dell'orbita ATBA, ciascuno di questi corpi sarà sollecitato ad uscire da questo piano, ma in una maniera diseguale, perchè le rette PS e PT non sono nè eguali nè parallele, e di più, in forza della legge generale di gravitazione, il corpo P attrae disegualmente i corpi S e T. Per conseguenza l'orbita primitiva di T intorno ad S si trova alterata per la differenza di queste attrazioni; e se si continua a riferire il moto di T intorno al punto S come ad un centro fisso, la porzione perturbatrice dell'azione di P sopra T obbligherà T a deviare dal piano ATBA e a descrivere non più l'arco TT′, ma un arco Tt situato al di sopra o al di sotto di TT′ secondo la preponderanza delle forze colle quali P sollecita S e T.

Ora, la forza perturbatrice che agisce secondo la direzione PT può esser considerata come decomposta in due altre nel piano del triangolo STP, cioè: in una forza che agisca nella direzione ST e che tenda ad aumentare o diminuire, secondo i diversi casi, l'attrazione di S sopra T, e in una seconda forza che agisca nella direzione TM parallela ad SP, e che secondo i diversi casi approssimi o allontani T da M. Così, siccome la componente della forza perturbatrice diretta secondo ST è compresa nel piano ATBA, così non può essa tendere a fare uscire T da questo piano, dunque soltanto l'altra componente diretta secondo TM può produrre questo effetto. Ben inteso però che adesso noi consideriamo queste componenti in un modo relativo, ritenendo il punto S come fisso, e riferendo a T tutta l'azione della forza perturbatrice.

Ora, per renderci conto dell'effetto che deve produrre la forza diretta secondo TM, osserviamo che, per la configurazione che presenta la nostra figura, questa forza attrae T verso M, e siccome TM, parallela ad SP, cade dalla parte dell'orbita di P, ossia *al di sotto* di quella di T, considerando la prima come piano fondamentale, è evidente che l'arco Tt, descritto da T col suo moto perturbato, cade al di sotto di TT', e se si prolunga quest'arco, vale a dire se gli si conduce una tangente nel punto *t*, questa tangente *t*V andrà a tagliare il piano di P in un punto V, situato dietro ad R, in modo che la retta SVF', che sarà l'intersezione del piano STV con quello dell'orbita di P, e che per conseguenza sarà la nuova linea dei nodi, verrà a cadere dietro alla linea primitiva dei nodi SF. Così, per effetto della perturbazione che fa descrivere l'arco Tt invece dell'arco TT', la linea dei nodi avrà *retrogradato* dell'angolo FSV, indicando noi adesso come *diretti* i moti di T e di P.

Ma T conservando sempre la stessa situazione, se si suppone che P sia alla sinistra della linea dei nodi invece di essere alla destra come si vede nella figura, è facile lo scorgere che la componente secondo la direzione TM tenderà a sollevare T, che Tt sarà al di sopra di TT', e che la linea dei nodi invece di *retrogradare si avanzerà*. L'azione della forza perturbatrice imprime dunque alla linea dei nodi un moto oscillatorio, e secondo che nel complesso di tutte le situazioni relative possibili di T e di P la somma di tutte le quantità di retrogradazione sarà maggiore o minore di quella di tutte le quantità di avanzamento, il nodo avrà in fine *retrogradato* o *avanzato*.

Oltre questa variazione della posizione dei nodi, resulta ancora dalle considerazioni che ci hanno condotto a scoprirla che l'orbita di T deve provare delle modificazioni nella sua forma e nella sua inclinazione sopra quella di P, perchè l'azione della forza perturbatrice talvolta avvicina o allontana T da S, talvolta l'alza al di sopra del piano della sua orbita primitiva o l'abbassa al di sotto di questo piano. Quest'orbita prova dunque dei cangiamenti continui, ma questi cangiamenti sono periodici, vale a dire che in un certo intervallo di tempo l'inclinazione e le dimensioni primitive vengono a riprodursi per tornar poscia a variare di nuovo.

L'azione generale della forza perturbatrice fa dunque descrivere al corpo T un'orbita di cui due parti o due elementi successivi non sono compresi nello stesso piano, il che rende quest'orbita una curva a doppia curvatura, ed il fenomeno della diminuzione o dell'aumento della sua inclinazione sull'orbita di P è intimamente collegato con quello della retrogradazione o dell'avanzamento della linea dei nodi. Ciò non ostante se si trattasse di dover calcolare queste perturbazioni, di cui le cose che precedono non sono destinate che a far conoscere la necessità, bisognerebbe osservare che il quesito è assai più complicato di quello che qui è stato da noi presentato, perchè l'orbita di P è anch'essa variabile per effetto dell'azione perturbatrice di T sopra P, e il moto de' suoi nodi rapporto all'orbita di T si combina con quello dei nodi dell'orbita di T rapporto all'orbita di P, talmentechè lo spostamento finale dell'intersezione dei piani primitivi resulta dalla combinazione di tutte le variazioni respettive. Di più, per ottenere il moto definitivo dell'orbita di un pianeta, non basta considerare unicamente l'azione perturbatrice di un altro pianeta, ma bisogna combinare a due a due tutti i pianeti che compongono il sistema solare ed aver riguardo alla situazione variabile dei piani di tutte le orbite.

Se si considera il piano dell'eclittica come un piano fisso, si trova che i nodi di tutte le orbite dei pianeti hanno su questo piano un moto finale *retrogrado* estremamente lento, perchè il più rapido di tutti non arriva ad un grado per secolo. Questo moto retrogrado si effettua in ogni pianeta in un periodo di

tempo più o meno lungo, allo spirare del quale il nodo si trova nella stessa situazione nella quale si trovava in origine, mentre l'inclinazione dell'orbita che ha diminuito in una parte del periodo aumenta nell'altra parte, cosicchè dopo una rivoluzione completa del nodo l'inclinazione ha ripreso il suo valore originario.

Resulta dalle ricerche di Laplace che per la sola ragione che i pianeti si muovono nello stesso senso in orbite poco eccentriche e poco inclinate le une sulle altre, le perturbazioni sono periodiche e rinchiuse in limiti assai ristretti; talmente chè il sistema planetario non fa che oscillare intorno ad uno stato medio da cui non si scosta che di una quantità piccolissima: così le orbite dei pianeti sono sempre state e saranno sempre presso a poco circolari, ed è impossibile che alcun pianeta sia stato primitivamente una cometa.

L'ecclittica stessa cangiando di posizione nello spazio, era necessario, per calcolare la variazione totale dell'inclinazione delle orbite planetarie, di riferire queste orbite ad un piano invariabile, il che ha condotto Lagrange alla scoperta del seguente bellissimo teorema:

Se si moltiplica la massa di ciascun pianeta per la radice quadrata dell'asse maggiore della sua orbita, e pel quadrato della tangente della sua inclinazione sopra un piano fisso, la somma di questi prodotti sarà costantemente la stessa sotto l'influenza delle loro attrazioni scambievoli.

Così la stabilità del sistema planetario deve oggimai esser considerata come dimostrata, almeno per ciò che concerne la inclinazione delle orbite. *Vedi* Pianeta e Precessione.

PESA LIQUORE. (*Mec.*) (*Vedi* Areometro).

PESCE AUSTRALE (*Astron.*). Costellazione meridionale che contiene 14 stelle nel Catalogo di Flamsteed, tra le quali se ne nota una di prima grandezza chiamata *Fomalhaut.*

PESCE VOLANTE (*Astron.*). Piccola costellazione meridionale introdotta da Bayer. *Vedi* Costellazione.

PESCI (*Astron.*). Nome del dodicesimo segno dello zodiaco, e di una costellazione composta di 113 stelle nel Catalogo di Flamsteed. Dei due pesci che formano questa costellazione uno si dice *settentrionale* e l'altro *meridionale*. Il segno dei Pesci vien rappresentato colla figura ♓.

PESO. (*Mec.*). Sforzo col quale un corpo tende a scendere. Questo sforzo è proporzionale alla quantità di materia che contengono i corpi, poichè esso è il prodotto per la forza della gravità, che agisce ugualmente sopra tutte le molecole della materia. Un corpo ha dunque tanto più peso, o è tanto più grave, quanto esso contiene più materia propria.

Il peso dei corpi è impiegato in meccanica, come forza propria a produrre il moto. In questo caso i corpi, i quali servono di motore, mediante il loro sforzo per scendere, si chiamano essi stessi *pesi*; tali sono i *pesi* di un orologio.

Si dà ancora, in particolare, il nome di *peso* ai corpi, i quali servono a misurare o a *pesare* il peso comparativo di tutte le sostanze. (*Vedi* Misura).

Siccome sopra abbiamo detto, che il peso di un corpo è proporzionale alla quantità assoluta di materia che esso contiene, poichè esso è il prodotto per la forza della gravità, che agisce ugualmente sopra tutte le molecole della materia (*Vedi* Forza); per formarsi un'idea esatta dell'azione della gravità, si debbono considerare tutti i punti o elementi materiali di uno stesso corpo, come essendo sollecitati da forze uguali e parallele, le quali agiscono nella direzione della verticale. La resultante di tutte queste forze forma propriamente il *peso* del corpo, ed è importante di non confondere la *gravità* col peso, perchè la gravità è la forza che

imprime delle impulsioni uguali a tutte le particelle elementari dei corpi, nel mentre che il *peso* non è che la resultante di tutte queste impressioni. Se la composizione dei corpi fosse omogenea, due corpi uguali in volume conterrebbero lo stesso numero di particelle materiali ugualmente pesanti, ed avrebbero, per conseguenza lo stesso peso; ma si sa che tutti i corpi sono porosi, e che essi contengono mediante ciò delle quantità di materia differentissima sotto volumi uguali. La quantità assoluta della materia, della quale un corpo si compone, si chiama la sua *massa*. (*Vedi* Questa parola).

Mediante la teoria delle forze parallele, se indichiamo con M il numero delle particelle elementari o la *massa* di un corpo, ciascuna di queste particelle essendo sollecitata dalla gravità, che si rappresenta con la velocità g, che questa forza può imprimere nell'unità di tempo, la resultante delle forze che agiscono sul sistema o corpo M avrà per espressione Mg (*Vedi* Resultante); e siccome questa resultante è il *peso* del corpo, chiamando P quest'ultimo, avremo la relazione fondamentale

$$P = Mg,$$

la quale permette di sostituire i pesi alle masse in tutte le questioni di meccanica ove entrano quest'ultime.

Due corpi hanno masse uguali, e per conseguenza pesi uguali, quando sospesi alle estremità di una leva del primo genere a bracci uguali, si fanno equilibrio. Infatti, se indichiamo con M ed M' le masse di due corpi, e che s'immagini che essi siano sospesi con fili senza gravità alle due estremità di una leva, i di cui bracci uguali abbiano una lunghezza $= a$, potremo fare astrazione da questi corpi e considerare solamente la leva, come se essa fosse sollecitata da due forze Mg ed $M'g$; ora, perchè vi sia equilibrio, bisogna, mediante la teoria della leva, che si abbia

$$aMg = aM'g,$$

relazione che necessariamente porta all'uguaglianza $M = M'$.

Ed è sopra questo principio che è fondata la valutazione del peso dei corpi, per mezzo della bilancia (*Vedi* Questa parola), instrumento che non è che una leva. Si prende per unità di misura un corpo di un volume determinato e di una composizione omogenea, e ciò che si chiama *il peso* di un corpo in generale è il numero, che esprime quante unità di peso sono necessarie per fargli equilibrio in una bilancia. Nel sistema metrico, l'unità di peso, sotto il nome di *grammo*, è un centimetro cubo di acqua stillata riportata al suo maximum di condensazione; così quando si dice, per esempio, che un certo corpo pesa 20 grammi, s'intende che ponendolo nel piatto di una bilancia, bisognerebbe porre nell'altro piatto 20 centimetri cubi di acqua stillata per fargli equilibrio.

In particolare si dà il nome di *peso* ai corpi, che servono a misurare o a *pesare* gli altri corpi. Così, il pezzo di rame capace di fare equilibrio ad un centimetro cubo di acqua stillata è il *peso di un grammo*, che inseguito possiamo impiegare invece di questo centimetro, tanto per pesare, quanto per formare dei multipli dell'*unità* primitiva o dei pesi più grandi, come il *decagrammo*, l'*ettogrammo*, il *chilogrammo*, ec. *Vedi* Misura, Densità e Gravità.

PESO SPECIFICO. S'intende per *peso specifico* di una sostanza solida o liquida, la densità di questa sostanza paragonata a quella dell'acqua stillata, presa per unità, vale a dire il rapporto della sua densità a quella di quest'ultima. Così la densità di quest'acqua essendo 1, il peso specifico dell'oro colato è di 19,258, perchè un piede cubo o un metro cubo di oro pesa 19,258 volte tanto, quanto un piede cubo o un metro cubo di acqua. Sapendo che la densità o il peso del

metro cubo di acqua è di 1000 chilogrammi, e avendo il peso specifico di un'altra sostanza, si calcolerà, con le regole della Geometria, il peso di un volume qualunque di questa medesima sostanza.

Esempio

Una verga di oro, fuso o colato, di 5 centimetri di larghezza, 4 centimetri di lunghezza e 2 centimetri di grossezza, ossia di 40 centimetri cubi, pesa 40 volte $19,258 \times 1$ grammo $= 770$ grammi e 32 centesimi, ossia, chilogrammi 0,7703, poichè il peso del centimetro cubo di acqua pura è di 1 grammo, ossia chilogrammi 0,001.

PESTELLO. (*Mec.*) Apparecchio destinato a polverizzare le sostanze dure. Esso si compone di un pezzo di legno squadrato DQ (*Tav.* CCII, *fig.* 2), il quale si muove verticalmente, e di cui la parte inferiore Q è armata di una massa di ferro o di altro metallo; un pezzo trasversale PR, chiamato *leva*, riceve l'azione da un *dente*, il quale dopo averlo elevato ad una certa altezza, l'abbandona, come pure il pestello al quale esso è fissato e che esso trasporta, per l'azione della gravità. Il pestello è ritenuto da due manicotti A, B, i quali si oppongono a qualunque altro moto diverso dal moto verticale. La curvatura del *dente* dev'esser quella di un'evoluta di circolo, quando si vuole che l'ascensione del pestello sia regolare.

La direzione della forza che solleva la leva non passando pel centro di gravità del peso Q, ne resulta che il pestello esercita contro i suoi manicotti A e B delle pressioni, che producono una resistenza di attrito tanto più considerabile, quanto il dente è più allontanato dall'asse del pestello. È facile vedere che indicando con Q il peso totale del pestello, con l la distanza AB dei manicotti, e con p la lunghezza PR della leva, la pressione sopra uno dei manicotti è $Q\frac{p}{l}$, e la pressione totale $2Q\frac{p}{l}$. Così indicando con f il coefficiente dell'attrito, il di cui valore dipende dalla natura delle superficie freganti (*Vedi* Attrito), si avrà per l'espressione della resistenza dovuta all'attrito,

$$2fQ\frac{p}{l}.$$

P indicando la forza motrice, l'equazione di equilibrio è perciò

$$P = Q + 2fQ\frac{p}{l}.$$

Si diminuiscono gli attriti sostituendo al manicotto una chiavarda, la quale attraversa il pestello parallelamente all'albero dei denti e nell'asse stesso del pestello. Questa chiavarda può essere situata in due maniere differenti: la prima consiste a praticare nel pestello un incavo rivestito di lamine di ferro, la chiavarda traversa quest'incavo nel quale entra un dente di ferro fuso per sollevare il pestello; la seconda, che non ha l'inconveniente d'indebolire il pestello con un incavo, consiste a far sollevare le due estremità della chiavarda, salienti sopra le facce laterali del pestello, da due denti paralleli aventi una testa comune, e che nel loro moto abbracciano il pestello.

Un altro inconveniente grave di quest'apparecchio, si è che tutte le volte che un dente si mette in contatto col manicotto o la chiavarda, ne segue un urto

impossibile ad evitare e il quale cagiona una perdita di forza viva (*Vedi* Comunicazione di moto), ma quest' inconveniente dipende dalla natura medesima della macchina, e non si potrebbe rimediarvi senza rinunziare all'uniformità del moto di ascensione. (*Vedi* Belidor, Architettura Idraulica, e il Giornale delle Mina dell' Anno 11).

PEURBACH. *Vedi* PURBACH.

PIANETA (*Astron.*). Corpo celeste che si dice pure *stella errante*, per distinguerlo dalle stelle *fisse*. Questo nome viene dal greco πλανητες, *errante*.

I pianeti si distinguono in pianeti principali e in pianeti secondarj.

I pianeti principali, o pianeti propriamente detti, sono corpi che descrivono intorno al sole delle orbite ellittiche: adesso se ne conoscono undici che sono: *Mercurio*, *Venere*, la *Terra*, *Marte*, *Giunone*, *Pallade*, *Cerere*, *Vesta*, *Giove*, *Saturno* e *Urano*. Si vedano nel Dizionario queste diverse parole.

I pianeti secondarj si dicono più particolarmente *satelliti*; sono essi corpi che girano intorno ad un pianeta principale come centro, nella stessa guisa che i pianeti principali girano intorno al sole. Fino ad ora se ne conoscono sedici, cioè: un satellite della terra, che è la luna; quattro satelliti di Giove, sette satelliti di Saturno, e quattro satelliti di Urano. *Vedi* Satellita.

Mercurio e Venere diconsi pure *pianeti inferiori*, perchè le loro orbite sono contenute in quella della terra; per la ragione opposta tutti gli altri pianeti prendono il nome di *pianeti superiori*.

I moti apparenti dei pianeti presentano particolarità notabilissime che nessun sistema astronomico aveva potuto spiegare in un modo pienamente soddisfacente prima delle scoperte di Keplero. Talvolta vedonsi avanzarsi rapidamente da occidente in oriente, perdere quindi a poco a poco la loro celerità apparente, fermarsi, poi tornare indietro con una celerità che in principio sembra aumentare e quindi diminuire, fermarsi di nuovo nel loro moto retrogrado e ricominciare a muoversi da occidente in oriente. Il moto diretto da occidente in oriente essendo sempre maggiore del moto retrogrado, i pianeti terminano in fine col percorrere tutta la sfera celeste.

Per ispiegare questi movimenti bizzarri, gli antichi facevano girare i pianeti in circoli i cui centri giravano anch' essi in altri circoli nel cui centro comune veniva posta la terra. Era questa una confusione di circoli che andava aumentandosi ad ogni nuova irregolarità che venisse palesata dalla osservazione, e la cui complicatezza può rendere sensibile il detto rimproverato come un' empietà al re Alfonso. *Vedi* Alfonso.

Oggi si sa che la terra, al pari di tutti i pianeti, gira intorno al sole, e questi movimenti inesplicabili non sono che apparenze prodotte dalla combinazione semplicissima dei moti reali.

Siccome ad ogni pianeta abbiamo consacrato un articolo particolare, riepilogheremo qui soltanto ciò che è loro comune.

1.° Tutti i pianeti descrivono intorno al sole delle orbite, che sono ellissi poco eccentriche e che tutte hanno un fuoco comune nel quale si trova il sole.

2.° I quadrati dei tempi periodici delle rivoluzioni dei pianeti stanno tra loro nello stesso rapporto dei cubi delle loro distanze medie dal sole.

3.° Le aree descritte col raggio vettore di un pianeta in tempi uguali sono eguali.

Queste tre leggi portano il nome di *leggi di Keplero*, perchè la loro scoperta si deve a questo grand' uomo. Sono esse il fondamento di tutta l'astronomia teorica, ed è col loro mezzo che Newton ha potuto elevarsi al sistema della gravitazione universale. *Vedi* Gravitazione.

I moti dei pianeti sono soggetti ad un gran numero di piccole ineguaglianze che diconsi perturbazioni (*Vedi* Perturbazione). Così i nodi delle loro orbite hanno tutti sull' ecclittica dei moti retrogradi, vale a dire in senso contrario ai moti propri, e le inclinazioni delle orbite provano, sì tra loro che rapporto all' ecclittica, delle variazioni i cui periodi sono estremamente lunghi. *Vedi* Rivoluzione, Elementi, Densità, Massa, *ec.*

PIANO (*Geom.*). Superficie sopra della quale una linea retta può applicarsi in tutti i sensi, in modo da coincidere esattamente con essa. (*Vedi* Superficie).

In geometria e in astronomia, s' impiega assai spesso questa parola per far concepire delle superficie immaginarie che supponiamo possano tagliere dei corpi solidi. Ed è sopra ciò che è fondata tutta la teoria della sfera, e la formazione delle curve chiamate *sezioni coniche.*

Nel livellamento, si chiama *piano di livello* un *piano orizzontale* o parallelo all' orizzonte.

Resulta dalla definizione del *piano* che: *In un piano, per ciascuno dei suoi punti si possano condurre un' infinità di rette.*

Resulta ancora da ciò e dalla natura della linea retta, che *qualunque retta che ha due dei suoi punti in un piano vi è contenuta tutta intera*, poichè questi due punti determinano una delle direzioni nella quale la retta può essere situata sopra la superficie.

Così, *Uno retto non potrebbe essere porte sopra un piano e parte fuori di questo piono.* Ciò non ostante, si concepisce che essa non può avere che un solo punto comune col piano, e allora si dice che la retta *incontra* o *fora* il piano, e che il piano *taglio* la retta. È evidente che, in questo caso, i due segmenti della retta sono situati respettivamente da una parte e dall' altra del piano.

Si conclude ancora da ciò che abbiamo detto, che per riconoscere se una superficie è piana, basta assicurarsi se possiamo, per ciascuno dei suoi punti, applicarvi una retta in tutte le direzioni.

Le superficie piane, come le linee rette si suppongono sempre indefinite, quando però condizioni particolari non ne ristringono l' estensione naturalmente illimitata.

Siccome una retta è determinata di posiziona da due punti, ugualmente *la posizione di un piano si trova completamente determinato da tre punti*, purchè questi tre punti *non* siano *situati sopra una stessa linea retto.*

Vale a dire 1.° che: *possiamo sempre far passare un piono per tre punti non situati in linea retta*;

E 2.° che *due piani che hanno tre punti comuni non situati in linea retto, coincidono in tutto la loro estensione.*

Siano due rette AB, AC (*Tav.* CCX, *fig.* 1), che si tagliano in A: si può concepire un piano che passi per la linea AB: se inseguito si fa girare questo piano intorno ad AB, finchè passi pel punto C, allora la linea AC, che ha due dei suoi punti A e C in questo piano, ei sarà tutta intera, laonde la posizione di questo piano è determinata dalla sola condizione di contenere le due rette AB, AC. Dunque *due rette, le quali si togliano, determinano ugualmente un piano.*

Dunque, anche due parallele AB, CD (*Tav.* CCX, *fig.* 2) determinano la posizione di un piano; perchè se si conduce la secante EF, il piano delle due rette AE, EF sarà quello delle parallele AB, CD.

Due *pioni* sono *paralleli* tra loro, quando prolungati a qualunque distanza l' uno e l' altro non possono mai incontrarsi.

Segue da ciò che precede, che: *tutte le superficie piane*, considerate nella loro estensione indefinita, sono uguali tra loro.

Angolo Piano. S' intende con ciò l' angolo formato da due piani che si tagliano. Si misura per mezzo dell' angolo rettilineo formato da due rette perpendicolari ad uno dei punti dell' intersezione dei *piani* e dirette une in un *piano* e l' altra nell' altro.

Triangolo Piano. Si dà questo nome al triangolo formato da tre linea rette, in opposizione al triangolo *sferico*, che resulta dall' intersezione di tre archi di circolo.

Si chiama, in ottica, vetro o specchio Piano quello la cui superficie è piana. (*Vedi* Lente).

Un *Luogo* Piano, in geometria, è un termine impiegato dagli antichi geometri per indicare un luogo geometrico, alla linea retta e al circolo, in opposizione al *luogo solido* che era una parabola, un' ellisse o un iperbola. (*Vedi* Luogo). Essi chiamavano ancora *problema* Piano quello che può essere risoluto geometricamente per mezzo della linea retta e del circolo. (*Vedi* Problema. *Vedi* ancora Costruzione).

PIANO (*Geom. prat.*). Rappresentazione di un oggetto in piccolo sulla carta, fatta conservando a tutte le sue parti i rapporti di grandezza che esse hanno realmente.

Nell' agrimensura, si chiama *levare un piano* l' arte di descrivere sulla carta i differenti angoli e le differenti linee di un terreno di cui si son prese le misure con un grafometro o un instrumento simile e una catena. (*Vedi* Agrimensura e Levar di pianta).

Questa costruzione si eseguisce col mezzo di due instrumenti, il *Quadrante* e la *Scala* (*Vedi* Queste parole). Con l' aiuto del quadrante si costruiscono sulla carta i diversi angoli che si sono osservati sul terreno; quindi con l' aiuto della scala si dà ai lati di questi angoli delle lunghezze proporzionali a quelle che si sono misurate. In questo modo si ha sulla carta una figura esattamente simile a quella del terreno.

Se si trattasse per esempio, di levare la pianta di una strada ABCDE (*Tav.* CLXVIII, *fig.* 1) sopra un terreno di cui vogliamo inoltre avere la posizione dei punti F, G, H, I, K, dopo aver misurato la lunghezza delle rette condotte da questi punti ai luoghi sinuosi della strada, come anche gli angoli che queste rette formano tra esse, si traccerà sopra una carta, di una dimensione conveniente, prima di tutto una retta *af* (*Tav.* CLXVIII, *fig.* 3), la quale rappresenterà la retta AF del terreno, e la cui lunghezza sarà proporzionale a quella di quest'ultima, vale a dire che essa dovrà contenere tante unità della scala che avremo scelta, quanti metri contiene AF, se la scala rappresenta dei metri. Ai punti *a* ed *f* si faranno gli angoli *fah* e *afb* uguali agli angoli osservati FAH e AFB, poi si darà alle linee *ah* ed *fb* delle lunghezze proporzionali a quelle delle linee AH ed FB. I punti *b* ed *h* trovandosi così determinati, si condurrà la retta *bh*, e misurandola sulla scala dovremo trovare una lunghezza proporzionale a BH, il che presenta un primo mezzo di verificazione per la costruzione degli angoli. Ciò fatto, ai punti *f* e *b* si costruiranno gli angoli *bfc*, *fbi*, uguali agli angoli BFC, FBI, e si daranno ai lati *fc* e *bi* le lunghezze che loro convengono, il che determinerà sulla carta i punti *c* ed *i* situati in un modo simile ai punti C ed I del terreno; si tirerà *ci* e si continuerà nella stessa maniera per determinare gli altri punti *d*, *g*, e, *k*. Facendo passare una linea curva per i punti *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, si avrà il piano della strada. In generale tutta l'arte di levar di pianta, si riduce a costruire sulla carta dei poligoni simili a quelli, che si son fatti sul terreno, il che può sempre eseguirsi col metodo che abbiamo indicato.

PIANO INCLINATO. (*Mec.*) (*Vedi* Inclinato).

PIANO TANGENTE (*Geom.*). Un piano dicesi *tangente* ad una superficie curva quando esso la tocca in un punto. Se la superficie è convessa in tutte le sue parti, il piano tangente non ha che un solo punto comune con essa: quello di *contatto*; nel caso contrario, il piano può essere nello stesso tempo tangente e secante, vale a dire che può toccare solamente la superficie in un punto e tagliarla in altri, il tutto come una linea retta può essere nello stesso tempo tangente e secante rapporto ad una medesima linea curva.

Per determinare le condizioni del contatto di un piano e di una superficie curva, si caratterizza più particolarmente il *piano tangente* nella seguente maniera.

Se per un punto dato sopra una superficie qualunque si traccia un' infinità di curve e che si conducano loro delle tangenti per i punti in questione, *tutte queste rette si troveranno* in generale *in un solo* e *medesimo* piano, che si chiama il *piano tangente* della superficie.

Sia dunque

$$F(x,y,z)=0,$$

l' equazione di una superficie qualunque. Due delle variabili dovendo ricevere valori arbitrari, prendiamo z per variabile dipendente, e risolvendo quest' equazione rapporto a z, otterremo un' altra equazione della forma

$$z=f(x,y)\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Immaginiamo che per un punto dato; x', y', z', sopra la superficie, si sia tracciato una curva qualunque le cui projezioni siano rappresentate dall' equazioni

$$\left.\begin{array}{l} y=\varphi x \\ z=\psi x \end{array}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

questa curva sarà perfettamente determinata dal complesso dell' equazioni (1) e (2), e la sua tangente al punto x', y', z', avrà per equazioni

$$y-y'=\frac{d\varphi x'}{dx}\left(x-x'\right),$$

$$z-z'=\frac{d\psi x'}{dx'}\left(x-x'\right).$$

Infatti, la tangente di una curva nello spazio si projetta sempre sopra la tangente della sua projezione (*Vedi* PROJEZIONE), dimodochè l' equazioni delle tangenti delle curve piane (2) sono nello stesso tempo l' equazioni della tangente nello spazio della curva tracciata sopra la superficie. Ora, le coordinate x' e y' sono comuni al punto dato e alla sua projezione sul piano delle xy; così la tangente della curva piana $y=\varphi x$, al punto x', y', ha per equazione

$$y-y'=\frac{d\varphi x'}{dx'}\left(x-x'\right).$$

Ugualmente le coordinate x' e z' sono comuni al punto dato e alla sua projezione sul piano delle xz, e, per conseguenza, la tangente della curva piana $z=\psi x$, a questo punto x', z', ha per equazione

$$z-z'=\frac{d\psi x'}{dx'}\left(x-x'\right);$$

dunque, ec.

Osserviamo ora che la derivata differenziale $\frac{d\psi x'}{dx'}$ non è altra cosa che la derivata totale di z', il cui valore è dato dall'equazione (1), poichè quest'equazione dev'essere soddisfatta facendoci $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$. Ora, rappresentando $f(x', y')$ con f, abbiamo

$$dz'=\frac{df}{dx'}\cdot dx'+\frac{df}{dy'}\cdot dy',$$

e, conseguentemente,

$$\frac{dz'}{dx'}=\frac{d\psi x'}{dx'}=\frac{df'}{dx'}+\frac{df'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx'}.$$

Ponendo

$$\frac{df}{dx'}=p,\quad \frac{df}{dy'}=q,$$

l'equazioni della tangente diventeranno

$$y-y'=\frac{d\varphi x'}{dx'}\left(x-x'\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

$$z-z'=\left(p+q\frac{d\varphi x'}{dx'}\right)\left(x-x'\right)\ldots\ldots(4),$$

non si tratta più, per ottenere il luogo geometrico delle tangenti a tutte le curve tracciate sopra la superficie pel punto x', y', z', che di eliminare tra queste equazioni la quantità $\frac{d\varphi x'}{dx'}$, la quale distingue sola la curva particolare che abbiamo considerata fin quì. Eseguendo quest'eliminazione, viene

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y')\ldots\ldots(5).$$

Quest'equazione essendo del primo grado rapporto alle variabili x, y, z, appartiene al piano che *tocca* la superficie al punto x', y', z', e si vede inoltre che il *luogo di tutte le tangenti è veramente un piano*, come lo supponeva la definizione generale del piano tangente. Osserveremo ciò non ostante che esistono dei *punti singolari* in alcune superficie per le quali questa proposizione non ha luogo; tale è, per esempio, il vertice di un cono, questo è quello che si riconosce dai valori $\frac{0}{0}$, che prendono allora le derivate parziali p e q.

Possiamo dare all'equazione (5) una forma più generale ricavando le derivate p e q dall'equazione

$$F(x', y', z')=0,$$

senza precedentemente risolverla rapporto a z'. Differenziando successivamente rapporto ad x' ed y', viene

$$\frac{dF}{dx'}+\frac{dF}{dz'}\cdot p=0,$$

$$\frac{dF}{dy'}+\frac{dF}{dz'}\cdot q=0.$$

Sostituendo nell' equazione (5) i valori di p e di q dati da queste equazioni, si ottiene per l' equazione del piano tangente

$$\left(x-x'\right)\frac{dF}{dx'}+\left(y-y'\right)\frac{dF}{dy'}+\left(z-z'\right)\frac{dF}{dz'}=0 \ldots\ldots (6).$$

Prendiamo come esempio di applicazione le superficie del second' ordine, che possiamo comprendere tutte sotto la forma generale (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria),

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+E=0.$$

Avremo in questo caso

$$F=Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2Cx'+2C'y'+2C''z'+E,$$

donde ne dedurremo le tre derivate parziali

$$\frac{dF}{dx'}=2Ax'+2C\;,$$

$$\frac{dF}{dy'}=2A'y'+2C'\;,$$

$$\frac{dF}{dz'}=2A''z'+2C''\,.$$

Questi valori sostituiti nell' equazione (6), danno

$$\left.\begin{array}{l}(Ax'+C)(x-x')+(A'y'+C')(y-y')\\ +(A''z'+C'')(z-z')\end{array}\right\}=0 \ldots\ldots (7).$$

Tale è l' equazione generale del piano tangente ad una superficie qualunque del second' ordine. Quest' equazione si riduce a

$$Axx'+A'yy'+A''zz'+E=0 \ldots\ldots (8),$$

per le superficie che ammettono un centro.

Se si trattasse, per esempio, di un' ellissoide a tre assi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

si farebbe

$$A=b^2c^2,\quad A'=a^2c^2,\quad A''=a^2b^2,\quad E=-a^2b^2c^2,$$

e si avrebbe, per l' equazione del suo piano tangente in un punto qualunque x', y', z',

$$b^2c^2xx'+a^2c^2yy'+a^2b^2zz'-a^2b^2c^2=0.$$

Nel caso particolare di $x'=a$, $y'=0$, $z'=0$, in cui il punto dato è il vertice, il quale si trova sull' asse delle x, l' equazione precedente diventa

$$b^2c^2ax-a^2b^2c^2=0,$$

il che dà

$$x=a,$$

equazione di un piano parallelo al piano delle yz (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria), e, per conseguenza, perpendicolare all'asse delle x. Si troverebbe nella stessa maniera che i piani tangenti agli altri vertici sono perpendicolari agli assi di questi vertici, quanto ai piani tangenti agli altri punti dell' ellissoide, e in generale ai punti qualunque di una superficie di second' ordine dotata di un centro, si può vedere che essi sono paralleli al piano diametrale coniugato col diametro che passa pel punto di contatto. Infatti abbiamo veduto (Applicazione dell' Algebra alla Geometria), che il piano diametrale coniugato con una corda qualunque, rappresentata dall' equazioni

$$x=mz+p,\quad y=nz+p\ .\ .\ .\ .\ .\ (9),$$

ha per equazione

$$\left.\begin{array}{l}(Am+B''n+B')x+(A'n+B''m+B)y\\ +(A''+Bn+B'm)z+Cm+C'n+C''\end{array}\right\}=0.$$

Tutte queste equazioni si riferiscono a tre assi rettangolari coordinati qualunque per i quali l' equazione generale delle superficie del second' ordine è della forma

$$\left.\begin{array}{l}Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz\\ \qquad +Cx+C'y+C''z+D\end{array}\right\}=0.$$

Ora, per non considerare che le superficie dotate di un centro e riportare la loro equazione ai loro tre diametri principali, basta di porre

$$B=0,\ B'=0,\ B''=0,\ C=0,\ C'=0,\ C''=0,$$

e l' equazione dal piano diametrale coniugato con la corda (9) si riduce a

$$Amx+A'ny+A''z=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (10).$$

Premesso ciò, se la corda (9) è il diametro condotto dal punto di contatto x', y', z' di un piano tangente, essa passa pel centro, e le sue equazioni diventano

$$x=mz=\frac{x'}{z'}z,$$

$$y=nz=\frac{y'}{z'}z.$$

Donde si ricava

$$m=\frac{x'}{z'},\quad n=\frac{y'}{z'}.$$

Sostituendo questi valori nell' equazione (10), otterremo, per l' equazione del piano diametrale coniugato col diametro in questione,

$$Axx'+A'yy'+A''zz'=0,$$

equazione che basta di paragonare con l' equazione (8) del piano tangente per riconoscere che quest' ultimo è parallelo al piano diametrale (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria).

In una sfera, tutti i piani diametrali essendo perpendicolari ai loro diametri coniugati, ne resulta che il piano tangente ad un punto qualunque della sua superficie è perpendicolare al raggio di questo punto.

Dedurremo ancora dalle precedenti espressioni l'equazione generale della normale ad una superficie qualunque. Questa normale essendo la perpendicolare al piano tangente, condotta pel punto di contatto x', y', z', le sue equazioni sono della forma (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria)

$$x-x'=a(z-z'),$$
$$y-y'=c(z-z'),$$

e siccome l'equazione del piano tangente, trovata di sopra, è

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y'),$$

si ha, mediante le condizioni determinate (Applicazione dell' Algebra alla Geometria),

$$a=-p, \quad c=-q.$$

Così, l'equazioni della normale sono

$$x-x'+p(z-z')=0,$$
$$y-y'+q(z-z')=0;$$

donde possiamo concludere che gli angoli α, β, γ, formati da questa retta coi semi-assi coordinati positivi hanno per espressioni (Applicazione dell' Algebra alla Geometria),

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Se si sostituiscono in queste formule i valori delle derivate p e q in funzioni delle derivate parziali dell'equazione $F(x,y,z)=0$, esse prenderanno la forma

$$\cos\alpha=V\frac{dF}{dx},$$

$$\cos\beta=V\frac{dF}{dy},$$

$$\cos\gamma=V\frac{dF}{dz},$$

facendo, per abbreviare,

$$V=\frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]}}.$$

Quest' espressioni sono impiegate nella teoria del moto di un corpo sottoposto a muoversi sopra una superficie data. (*Vedi* Moto.)

PICARD (Giovanni), celebre astronomo del XVII secolo, ed uno dei primi otto membri dell'Accademia delle Scienze, nacque a la Flèche il 21 Luglio 1620. Non si hanno che poche e incerte notizie sulla sua famiglia e sulla sua educazione; l'autore della *Storia critica della scoperta delle longitudini* (Pézénas) sembra insinuare che Picard fosse il giardiniere del duca di Créqui, allorchè un astronomo di quel tempo, Le Valois, lo prese seco e lo iniziò nella cognizione della scienza nella quale dovea tanto distinguersi. Vero o falso che sia questo aneddoto, pubblicato unicamente con un spirito di malevolenza, non è esso che onorevole per la memoria di Picard, al quale l'astronomia pratica non meno che la teoria della scienza debbono una moltitudine di scoperte utili ed ingegnose che non hanno poco contribuito ai loro progressi. Qualunque pertanto sia stata la gioventù di Picard, lo troviamo nell'età di venticinque anni sacerdote e priore di Rillé, nell'Angiò, intento ad osservare l'ecclisse del sole del 25 Agosto 1645 insieme con Gassendi, al quale successe nella cattedra d'astronomia del collegio di Francia. La misura di un grado del meridiano, per giungere ad una cognizione esatta della figura e della grandezza della terra, dovette essere uno dei primi oggetti che eccitarono la premura dell'Accademia delle Scienze. I lavori di Snellio e di Riccioli su tale importante operazione erano i soli documenti di qualche valore scientifico che allora si possedessero; ma i resultati ottenuti da questi due geometri differivano tra loro di quantità così rilevanti, che era impossibile di non congetturare che uno almeno di essi non avesse commesso qualche grave errore. Regnava dunque allora un dubbio assoluto sulla grandezza anco approssimata del grado terrestre. L'abate Picard, già celebre per parecchie osservazioni importanti e per molte utili invenzioni, fu scelto dall'Accademia per ricominciare quella misura nelle vicinanze di Parigi. Egli intraprese ed eseguì negli anni 1669 e 1670 questa grande operazione, della quale abbiamo già avuto occasione di parlare in molti articoli di questo Dizionario. Qui aggiungeremo soltanto che, adottando lo stesso metodo del quale aveva fatto uso Snellio, Picard apportò nel suo lavoro una diligenza nuova e straordinaria, nella parte specialmente che concerneva le operazioni dell'astronomia pratica. Egli aveva un settore di dieci piedi di raggio, verificato scrupolosamente in tutti i gradi che servire dovevano alla sua misura. Questo strumento era armato di un eccellente telescopio con fili che s'incrociavano nel fuoco dell'oculare. Misurò in tal guisa ad Amiens e a Malvoisine la distanza di una stella di Cassiopea che passava al meridiano ad una distanza dallo zenit minore di dieci gradi in ambedue questi luoghi, e trovò che la loro differenza di latitudine era di 1° 22′ 55″. Quanto alla sua misura trigonometrica, tutti gli angoli de' suoi triangoli furono verificati, e due misure reiterate della sua base, fatte con tutta l'accuratezza di cui Picard era capace, non gli diedero che una differenza di due piedi: la prima era stata di 5662 tese e 5 piedi e la seconda di 5663 tese e un piede: il che lo determinò a prendere una media che stabilì in 5663 tese. Da tutti i suoi calcoli infine Picard trasse la conclusione che la distanza intercetta tra i paralleli di Amiens e di Malvoisine era di 78850 tese, ossia di 57060 tese per grado. La stessa operazione, eseguita in seguito con istrumenti più perfezionati e per mezzo di metodi superiori additati dal progressi della scienza, ha certamente manifestato delle inesattezze nel lavoro di Picard; ma ad onta di questa imperfezione, forse allora inevitabile, la misura del grado terrestre, alla quale Picard ha dato il suo nome, non rimarrà meno celebre nella storia della scienza come un monumento notabile del primo tentativo fortunato che sia stato fatto per conoscere la misura esatta della terra. È noto come soltanto colla scorta della misura del grado di Picard, Newton potè riuscire nei calcoli da lui una prima volta tentati senza successo per scoprire la forza che ritiene la luna nella sua orbita. Questa opera-

zione ebbe pure per risultato importante quello di richiamare l'attenzione degli astronomi sui movimenti che oggi s'indicano coi nomi di *nutazione* e di *aberrazione*, e dei quali non si aveva la minima idea. Se Picard non potè conoscere la legge completa di tali movimenti, determinò però con esattezza singolare la quantità dell'aberrazione, la quale nel corso di uno stesso anno può far variare in apparenza l'altezza del polo di circa 40″; dichiarò che il periodo di tali variazioni era annuo, ed ebbe la costanza di tenervi dietro per dieci interi anni. L'onore di trovare le cause e di spiegare questo doppio fenomeno era riservato a Bradley, di cui formano il più bel titolo di gloria.

Fino dall'anno 1669, dice Delambre, Picard aveva letto all'accademia una memoria sostanziale, nella quale ei tracciava il sistema di un'astronomia perfezionata colle sue invenzioni e con quelle di Huygens: vi esponeva i metodi per determinare direttamente e in una volta le ascensioni rette del sole e quelle delle stelle. Questi metodi non erano in sostanza che un'applicazione particolare del metodo generale delle altezze corrispondenti, metodo però che egli aveva il primo introdotto nell'astronomia pratica, accennando inoltre la correzione di cui ha d'uopo quando la declinazione dell'astro viene a variare nell'intervallo delle due altezze eguali che si sono osservate. Con tali metodi Picard aveva annunziato che avrebbe determinato gl'istanti precisi dei solstizj colla stessa esattezza di quelli degli equinozj. Fu il primo ad osservare la lunghezza del pendulo semplice che batterebbe i secondi, e chiese che tali osservazioni fossero ripetute in differenti climi per determinare se questa lunghezza fosse dovunque la stessa, dopo avere avvertito che la sola dilatazione dei metalli bastava per farla variare colla temperatura dell'atmosfera. Picard raccomandò pure l'osservazione delle refrazioni in differenti stagioni, non meno che quella dei diametri: egli stesso ne diede frequenti esempj.

Auzout fu il collaboratore e l'amico dell'abate Picard. I loro nomi vengono con ragione associati nell'invenzione del micrometro, nell'applicazione del telescopio ai quadranti e ai settori per la misura degli angoli, e nell'invenzione del canocchiale di prova. Nella veduta di rendere più sicuramente utili le osservazioni di Ticone Brahé, Picard fece il viaggio di Uraniburg per determinare più esattamente la longitudine e la latitudine di quel celebre osservatorio; finalmente la Francia deve a Picard la fortuna di esser divenuta la patria adottiva dell'illustre Cassini, ed alla sua influenza e alle sue cure deve la costruzione dell'Osservatorio. Sventuratamente, il giovine astronomo, che Picard col suo credito presso il gran Colbert aveva fatto venire dall'Italia, non tardò a far dimenticare il merito e i servigi onorevoli del suo protettore. Ad esso infatti fu data la carica di direttore dello stabilimento del quale Picard aveva avuta la prima idea, ed in breve i piani ed i progetti di questo astronomo distinto furono abbandonati pei lavori brillanti del competitore che nel suo amore puro e disinteressato per la scienza da sè stesso erasi dato. In seguito di una caduta fatta nel tempo di una osservazione, Picard rimase pericolosamente ferito; languì ancora per qualche anno e morì a Parigi il 12 Luglio 1682, o del 1683 o 1684, come altri dicono. Picard ha pubblicato: I *La mesure de la terre*, Parigi, 1671, in-fol.; II *Voyage d'Uranibourg, ou Observations astronomiques faites en Danemarck*, Parigi, 1680, in-8; III *Observations astronomiques faites en divers endroits du royaume. — Observations faites à Bayonne, Bordeaux et Royan, pendant l'année 1680.* IV *Traité du nivellement*: quest'opera che fu pubblicata da Lahire è il trattato il più compiuto e il più importante che siasi avuto su tale materia fino verso la fine del secolo decimottavo. V *La pratique des grands cadrans par le calcul*; VI *Fragmens de dioptrique*; VII *Experimenta circa aquas effluentes*; VIII *De mensuris*; IX *De mensura liquidorum et aridorum*. Picard ha composto i primi cinque volumi della *Con-*

naissance des temps dal 1679 al 1683. Quest' illustre accademico, che aveva consacrato l'intera sua vita a sì numerosi e sì utili lavori, era caduto nel finire de' suoi anni in un oblio, dal quale i biografi moderni si sono fatti un dovere di rivendicare la sua memoria. » Picard, dice Condorcet, fu il maestro di Roemer, di cui indovinò l'ingegno, ed al quale procurò la protezione di Colbert e i benefizj di » Luigi XIV. Fu il primo ad osservare il fosforo che si vede nella parte vuota » del barometro, quando vi si agita il mercurio. Fino dal 1680 ei non era più » in grado di eseguire da sè stesso i grandi lavori dei quali aveva fatto appro- » vare il progetto da Colbert, e terminò nel 1684 una vita tutta ripiena di oc- » cupazioni utili, che gli danno maggior diritto alla riconoscenza degli uomini » che alla gloria, e di cui i frutti si estenderanno al di là della sua memo- » ria. » Noi però dobbiamo osservare che questo pericolo di oblivione non esiste; che mai si dimenticherà la misura del grado di meridiano fatta da Picard, la sua lunghezza del pendolo e il suo micrometro; e che, fino a tanto che i canocchiali rimarranno applicati agli strumenti che servono per misurare gli angoli, è impossibile che un astronomo dimentichi tali miglioramenti importanti nell'arte di osservare. Per maggiori particolarità si consulti il Tomo II della *Storia dell' astronomia moderna* di Delambre.

PIEDE. Nome di un' antica misura lineare, la sesta parte della *tesa*. (*Vedi* Misura.)

PINGRÉ (Alessandro Guido), astronomo celebre del XVIII secolo, studiò presso i Genoveffiani di Senlis, ed entrò nella loro congregaziona in età di sedici anni. Ei vi professò per lungo tempo la teologia, e si attribuisce ai disgusti che gli occasionarono le sue opinioni sulle contese del giansenismo il partito che prese in un'età già avanzata di applicarsi agli studj e alle ricerche di una scienza ben differente da quella che lo aveva occupato fino allora. Ei non tardò però ad acquistarvi una distinta reputazione. Il calcolo dell' ecclisse lunare del 1749, nel quale scoperse un errore nell' annunzio che ne aveva dato La Caille, e l' osservazione del passaggio di Mercurio nel 1753 gli valsero il titolo di corrispondente dell' Accademia delle Scienze. Poco tempo dopo fu nominato cancelliere dell'università e bibliotecario di santa Genoveffa; allora il suo titolo di *corrispondente* fu cambiato in quello di *socio libero* dell' Accademia, e a di lui riguardo e pel di lui uso fu fabbricato un piccolo osservatorio nell' alto dell' abazia di santa Genoveffa.

Legatosi in quel tempo di stretta amicizia con Lemonnier, Pingrè compose dietro le idee di tale astronomo, per gli anni dal 1754 al 1757, uno *Stato del Cielo*, almanacco nautico, fondato sul metodo degli angoli orarj della luna, e calcolato colle tavole delle *Istituzioni astronomiche*. Questo metodo non ha ottenuta la stessa fiducia di quello proposto da La Caille verso la stessa epoca, e che è stato poi adottato nel *Nautical Almanach*, nella *Connaissance des temps*, e in tutte le effemeridi senza eccezione. La Caille aveva calcolato per l' *Arte di verificare le date* il quadro compiuto di tutti gli ecclissi visibili in Europa durante i primi diciotto secoli dell' era cristiana. Pingré rifece di nuovo tale lavoro, che estese al calcolo degli ecclissi dei dieci secoli precedenti. Tale vasta impresa, di cui non è evidente la utilità immediata, ha avuto almeno il vantaggio di provare ai partigiani degli antichi periodi (per esempio quello di diciotto anni) l'assoluta insufficienza di tali periodi per annunziare gli ecclissi futuri. Pingré fece prova della stessa pazienza e dello stesso zelo scientifico nei tre viaggi che imprese per provare gli orologi marini di Ferdinando Berthoud e quelli di Le Roi. Verso la fine del 1760, partì per l' isola Rodrigo, dove l'anno susseguente osservò il primo passaggio di Venere; osservò il secondo nel 1769 con Fleurieu al Capo Francese nell' isola San Domingo. Nel 1783 pubblicò la sua *Cometografia*, la

più importante delle sue opere, e la sola forse che non cadrà nell'oblio. Nel 1786 diede in luce una traduzione del poema di Manilio, alla quale aggiunse quella di Arato, secondo la parafrasi di Cicerone, compiuta da Grozio. Pingré possedeva cognizioni estesissime: era versatissimo nelle lingue antiche, e la biblioteca di santa Genoveffa gli offriva d'altronde i mezzi di verificare tutti i testi che gli occorreva di citare. Così la sua *Cometografia* è l'opera la più completa che sia stata pubblicata su tale soggetto: vi si trova la storia del progresso delle cognizioni umane sulla natura e sul luogo delle comete; una descrizione dettagliatissima di tutte quelle di cui si fa qualche menzione negli scritti degli storici e de' filosofi; ciò che si sa del loro ritorno e della destinazione loro; l'esposizione dei fenomeni delle loro chiome, dei loro nuclei e delle loro code, e finalmente un quadro compiuto delle teorie immaginate e praticate fino al suo tempo per spiegare i movimenti di tali corpi; nè oggi altro vi mancano che i metodi pubblicati posteriormente, per esempio, quelli di Gauss, Olbers, Legendre, Burckhardt, Bessel, Pontecoulant, e tutta la teoria delle perturbazioni. Pingré aveva pure calcolato tutte le osservazioni astronomiche del secolo decimosesto risalendo fino a Ticone. Quest'opera era forse più curiosa che utile: l'assemblea costituente ne ordinò la stampa, ma gli avvenimenti politici di quell'epoca non permisero di terminarla, e le sole prime 364 pagine che furono impresse non videro mai la luce. Questo astronomo, che era nato a Parigi il 4 Settembre 1711, vi morì il 1° Maggio 1796, in età di ottantaquattro anni. Era membro dell'Istituto di Francia. Gli si debbono numerose ed importanti osservazioni, di cui Lalande ha dato un particolarizzato elenco nella sua *Bibliografia astronomica*: è pure autore di molti scritti e memorie oggi dimenticate, e noi non citeremo di lui che la sua *Cométographie, ou Traité historique et théorique des comètes*, Parigi, stamperia reale, 1783, 2 vol. in-4.

PIRAMIDALE (*Alg.*). Numeri piramidali. Questi sono numeri formati dalle somme dei numeri poligoni, come questi sono formati dalle somme dei numeri in progressione aritmetica. (*Vedi* Poligono.)

Si abbia, per esempio, la serie dei numeri triangolari,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ec.,

formando le somme successive di 1, 2, 3, 4, ec. termini, si ha la serie

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, ec.

dei *numeri piramidali*.

Si chiamano in particolare *triangolari piramidali*, *quadrati piramidali*, *pentagoni piramidali*, ec., i numeri generati dai numeri *triangolari*, *quadrati*, *pentagoni*, ec., ma generalmente si chiamano col nome semplice di *piramidali* i numeri di sopra 1, 4, 10, ec., formati dall'addizione dei numeri triangolari, 1, 3, 6, ec. Il termine generale di questa serie è

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}.$$

(*Vedi* Figurato, Poligono, e Progressione.)

PIRAMIDE (*Geom.*). Solido, che ha per base un poligono qualunque, e di cui tutte le altre facce sono triangoli, i quali concorrono in un solo punto, chiamato il vertice della *piramide*.

Tale è (*Tav.* LVIII, *fig.* 6) la piramide SABCDE, che ha per base il pentagono ABCDE, e per vertice il punto S.

La perpendicolare SF abbassata dal vertice sul piano della base è l'*altezza* della piramide.

Una piramide dicesi *triangolare* (*Tav.* LVIII, *fig.* 7), *quadrangolare* (*Tav.* CXCIV, *fig.* 3), *pentagonale* (*Tav.* LVIII, *fig.* 6. 8 e 9), *esagonale*, ec., ec., secondo il numero dei lati della sua base. Essa è *regolare*, quando avendo per base un poligono regolare, la sua altezza, o la perpendicolare abbassata dal suo vertice, cade sul centro di questo poligono.

Le principali proprietà delle piramidi sono:

1. Una piramide qualunque è il terzo di un prisma della medesima base e della medesima altezza.

2. Due piramidi della medesima base e della medesima altezza sono equivalenti.

3. La sezione di una piramide fatta da un piano parallelo alla sua base è un poligono simile a questa base. Le aree della base e della sezione stanno tra loro come i quadrati delle loro distanze al vertice.

4. Le piramidi che hanno basi equivalenti stanno tra esse come le loro altezze.

5. Le piramidi della medesima altezza stanno tra loro come le loro basi.

6. Due piramidi qualunque stanno tra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze.

7. Il *volume* di una piramide è equivalente al prodotto dell' area della sua base per la sua altezza.

8. La superficie di una piramide regolare, senza comprenderci la base, è equivalente alla metà del prodotto del perimetro della sua base per il suo apotema. Si chiama *apotema* di una piramide regolare la retta condotta perpendicolarmente dal vertice comune alla base in una faccia triangolare.

9. Qualunque piramide triangolare può essere inscritta in una sfera.

10. Si chiama *piramide troncata* la porzione di una piramide compresa tra la sua base e un piano che la taglia parallelamente a queste base.

Se s'indica con A l'area della base, con a l'area della sezione, e con h l'altezza della sezione al di sopra della base, il volume della piramide troncata è rappresentato dalla formula

$$\frac{1}{3}\left[A+\sqrt{Aa}+a\right]h.$$

(*Vedi* Solido).

PIRAMIDOIDE (*Geom.*). Solido rassomigliante ad una piramide.

PITEA, astronomo, geografo e navigatore, è il più antico scrittore che abbiano prodotto le Gallie. Era di Marsiglia, e fioriva nel principio del quarto secolo avanti Gesù Cristo, avendo il suo viaggio preceduto la conquista delle Indie fatta da Alessandro, che avvenne l' anno 327. In tale epoca Marsiglia aveva acquistato col suo commercio uno splendore cui non ha mai perduto. Pitea trovò nella sua patria i mezzi di coltivare il suo genio per le scienze: si applicò soprattutto alla fisica e all' astronomia, e vi fece progressi che gli meritarono la stima de' suoi compatriotti. Mentre Eutimene andava a scoprire nuovi paesi verso il mezzodì, Pitea fu inviato a riconoscere le regioni settentrionali: la descrizione ch' ei fece di un isola da lui chiamata Thule, descrizione di cui Plinio e Strabone ci hanno conservato dei frammenti, dimostra ch' egli aveva visitato le coste dell' Islanda. Ma tuttociò che si riferisce degli altri lavori di Pitea riducesi a congetture fondate sopra racconti inesatti e incompleti di qualche antico scrittore. Così, secondo Cleomede, astronomo contemporaneo di Possidonio, Pitea avrebbe determinata la latitudine di Marsiglia misurando con uno gnomone l'altezza del sole nel solstizio d' estate. Se le circostanze di questa osservazione fossero state esattamente conservate, avrebbero potuto servire a decidere la celebre questione della diminuzione dell' obliquità dell' ecclittica, prima che questo fenomeno fosse stato costatato e

dimostrato dalla scienza (Si veda la *Storia dell' astronomia antica* di Delambre, Tom. I, pag. 471). Secondo Ipparco, citato su tal soggetto da Strabone, fu Pitea il primo che insegnò ai Greci che la stella polare non era precisamente nel polo, ma che con tre altre stelle vicine formava un quadrilatero o quadrato di cui il polo era il centro. Può su questo proposito consultarsi la *Storia delle Matematiche* di Montucla, Tom. I, pag. 189. Finalmente, secondo Plutarco e Plinio, Pitea sarebbe stato il primo astronomo che avesse riconosciuto il legame che esiste tra il fenomeno delle maree e il moto della luna. Nell'antichità veniva attribuita a Pitea la composizione di parecchi scritti: quello fra tutti di cui è più dolorosa la perdita è senza dubbio il racconto del suo viaggio marittimo, che oggigiorno sarebbe di un interesse grande per la storia della geografia.

PITISCO (Bartolommeo), teologo e matematico, nato nel 1561 a Schlaone, presso Gromberg in Islesia, fu precettore di Federico IV, elettore palatino. Morì in Eidelberga il 2 Luglio 1613. I suoi lavori matematici sono: I *Triganometriae libri quinque, item problematum variarum nempe geodaeticarum, altimetricarum, geographicorum, gnomanicarum, astronomicorum libri decem. Editio tertia, cui recens accessit problematum architectonicarum liber unus*, 1612. Le due edizioni precedenti erano del 1599 e 1608; II *Georgii Joachimi Rhetici magnus canon doctrinae triangulorum ad decades secundorum scrupulorum, recens emendatus a Bartholomaeo Pitisco Silesio. Addita est brevis commonefactia de fabrica et usu canonis, ec.* È questa la grand'opera di Retico intitolata *Opus palatinum de triangulis*, nella quale era stato scoperto che le tangenti e le secanti degli ultimi gradi erano erronee. Pitisco fu incaricato di correggerle, il che rese necessaria la ristampa di 86 pagine: gli esemplari che contengono le pagine corrette da Pitisco portano il titolo che di sopra abbiamo esposto e sono rarissimi. III *Thesaurus mathematicus, sive canon sinuum ad radium* 1000000000000000, *et ad dena scrupula secunda quadrantis jam alim incredibili labore ac sumptu a Georgia Jaachimo Rhetica supputatus, ac nunc primum in lucem editus a Bartholamaea Pitisca*, 1613. Come si scorge dal titolo, quest'opera è di Retico: il manoscritto era smarrito e confuso tra le carte di Valentino Ottone, primo editore dell'*Opus palatinum*, e fu rinvenuto e stampato per le cure di Pitisco, che vi aggiunse parecchi metodi algebrici per trovare i seni con 25 decimali.

PITTAGORA. I lavori di questo illustre filosofo segnano un'epoca importantissima nella storia dello spirito umano. Nulladimeno nessuna delle sue opere, se pure egli ne ha giammai scritte, è giunta fino a noi; la stessa sua biografia è stata il soggetto delle più vive questioni tra gli scrittori antichi, sia che appartenessero a scuole rivali, sia che seguissero le sue dottrine, d'altronde già modificate o pervertite dallo spirito di setta. La memoria delle nazioni, la tradizione più fedele a questo bell'ingegno, ci ha fortunatamente trasmesso col racconto degli atti principali della sua vita, la ricordanza delle scoperte scientifiche che comunemente gli sono attribuite e che certamente presero origine nel seno dell'illustre scuola d'Italia di cui fu il fondatore. D'altronde gli antichi storici non erano forse in grado di comprendere la missione di Pittagora, che in tal modo devesi qualificare il passaggio sulla terra di quegli uomini privilegiati che sembrano non esser nati che per indicare al mondo nuove vie di perfezione, dando una forma razionale ai vaghi presentimenti dell'avvenire che debbono agitare le società nella loro infanzia. È da notarsi che nell'età storica della *fatalità* (Si veda l'*Introduzione* di questo Dizionario) tutti i tentativi che hanno avuto per oggetto la ricerca della verità hanno un carattere d'individualità che ne diminuisce estremamente la forza; perlochè i pregiudizj non si ritirano che lentamente avanti a tali tentativi, e il germe di progresso che questi contengono non si sviluppa che tardi nell'umanità. Lasciando da parte la pretesa civiltà del-

l' Egitto e delle Indie, la cui storia trovasi frammista a tante favole, Pittagora deve esser considerato come il primo sapiente dell' antico mondo, il quale abbia recato nella morale come nella scienza un principio superiore, che nell' una è stato confermato dal cristianesimo, nell' altra da maravigliose scoperte. Infatti, la più semplice espressione delle sue dottrine è la filosofia, lo spiritualismo e l' attrazione o l' infinito nella scienza dei numeri e in quella dell' estensione. Perchè queste sublimi dottrine non sono divenute, come la legislazione di Mosè, la base assoluta della credenza e del sapere presso quelle nazioni in mezzo alle quali furono la prima volta annunziate? La soluzione di questo problema egualmente che le considerazioni che ci hanno condotto a proporlo appartengono alla filosofia della storia: noi ci contentiamo qui di averne soltanto fatto parola. *Vedi* Geometria e Filosofia delle Matematiche.

S' ignora l' epoca precisa della nascita di Pittagora, ma da tutte le controversie alle quali ha dato luogo tale questione storica resulta che quest' uomo sommo viveva verso la fine del VI secolo avanti G. C. Le testimonianze dell' antichità differiscono pure intorno al luogo ove nacque, ma l' opinione più comunemente ricevuta è che vedesse il giorno a Samo. Quest' isola era allora in floridissimo stato; essa estendeva in lontane regioni le sue relazioni commerciali, e può credersi che nell' accompagnare Muesarco suo padre, che esercitava la mercatura, Pittagora prendesse passione ai viaggi che in seguito imprese a fare con un fine più elevato. Senza dubbio, dotato come era di un spirito elevato, di un amore ardente per la verità, fornito di tutta l' istruzione che allora era dato il possedere, Pittagora dovette profittare ne' luughi e numerosi suoi pellegrinaggi di una moltitudine di cognizioni che trovò presso popoli più antichi in civiltà de' suoi compatriotti. Ma sarebbe bene assurdo l' attribuire a questa sorgente le idee filosofiche, e le scoperte nell' aritmetica, nella geometria e nell' astronomia che appartengono interamente al suo ingegno. La scienza non si perde: questo prodotto della umana ragione sopravvive alle civiltà stesse che lo videro costituirsi sotto la forma sistematica. Ciò che ci rimane della scienza dei Caldei, degli Egiziani e degli antichi Indiani non permette di pensare un istante che Pittagora vi abbia attinto le cognizioni alle quali deve egli la sua immortalità (*Vedi* Astronomia). Comunque sia, tornato in patria, Pittagora insegnò alcun tempo in Samo la geometria e l' aritmetica, e passò quindi nella Magna Grecia, ove stabilì quella celebre scuola la cui costituzione ha più di un rapporto comune coi monasteri dei primi secoli del cristianesimo. La sua reputazione di sapienza e di dottrina gli attirò una folla di discepoli, che divennero poi i legislatori e i capi degli stati floridi di quella parte dell' Europa. Le verità matematiche formavano la parte più essenziale dell' insegnamento di Pittagora. Senza contare la scoperta della proprietà del triangolo rettangolo, vale a dire la dimostrazione del quadrato dell'ipotenusa, si attribuisce con ragione a questo filosofo un numero grande di teorie allora nuove in geometria, la diffusione delle quali ha contribuito singolarmente ai progressi della scienza. Dai differenti racconti degli scrittori antichi che ci hanno trasmesso le sue opinioni resulta che egli aveva le idee le più giuste intorno ai punti fondamentali dell' astronomia: così insegnava egli ai suoi discepoli la distribuzione della sfera celeste, la sfericità della terra e quella del sole, la causa della luce della luna, quella degli ecclissi di questi due astri, ed infine il moto della terra. Pittagora insegnò ancora ai suoi discepoli a considerare come astri antichi quanto l' universo, e dotati di un moto di rivoluzione intorno al sole, le comete, oggetto di terrore pel volgo. Deve confessarsi che alcune di queste idee, già annunziate da Talete, non possono esser considerate come scoperte di Pittagora, ma come da lui accettate e formanti parte del sistema completo da lui concepito: esse fanno fede almeno della perspicacia di questo uomo

grande e del suo amore per la verità. Pittagora e la scuola da lui fondata attribuirono per verità una importanza quasi puerile all' influenza dei numeri; ma le scoperte importanti e reali che sono loro dovute debbono far dimenticare quelle dottrine mistiche che loro si rimproverano, e delle quali d' altronde non possiamo oggi conoscere e valutare il vero significato: perciò i migliori pensatori non vi hanno veduto che emblemi dei quali abbiamo perduto la spiegazione. Pittagora determinò i rapporti matematici degl' intervalli musicali, e diede così origine, dice Montucla, ad un quarto ramo delle matematiche, vale a dire alla musica. È noto come fino d' allora si formarono due sette di musici, l' una delle quali, che riconosceva Pittagora per capo, distinguevasi per quella determinazione calcolata dell' armonia dei suoni dall' altra, alla testa della quale si pose Aristosseno, il quale pretendeva al contrario che i suoni fossero i soli giudici dei rapporti armonici.

Le incertezze che regnano in quanto alla nascita di Pittagora si riproducono in quanto alla determinazione dell' epoca e del luogo della sua morte. Si sa soltanto che essa avvenne verso l' anno 500 prima di Gesù Cristo. Alcuni storici giustificano, senza volerlo, quest' uomo sommo dalla taccia di aver circondato la verità di misteriosi veli, che hanno terminato col farla scomparire interamente agli sguardi dei popoli, poichè assicurano che ad onta di questa riserva si sparse l' allarme delle innovazioni da lui introdotte e delle verità ardite e contrarie alle credenze religiose del suo tempo che egli esponeva, e che prima della sua morte ebbe luogo di vedere scoppiare la persecuzione che assalì la sua scuola. Secondo alcuni autori, Pittagora ebbe per moglie Teano, celebre anch' essa nella storia della filosofia; secondo altri, essa era sua figlia. Tra i suoi figli si citano Telaogo, che fu il maestro di Empedocle, ed Arimneste che fu quello di Democrito. Si consulti per maggiori particolarità sulle dottrine di questo filosofo la *Storia della Filosofia* di Buhle e quella di Tenneman.

PIU'. Questa parola, rappresentata in algebra e in aritmetica col segno $+$, si usa per accennare l' addizione. Così l' espressione $5+8=13$ significa che 5 più 8 è eguale a 13. *Vedi* Addizione.

PLANETARIO (*Astron.*). Strumento che rappresenta i movimenti dei pianeti, o per mezzo di circoli, come nelle sfere mobili, o per mezzo di piccoli globi che girano intorno a un centro.

I planetarj più celebri sono quelli di Huygens, e quello cui è stato dato il nome di *Orrery*, perchè lord Orrery fu il primo a farlo costruire e a diffonderne l' uso in Inghilterra. Nella Biblioteca Reale vedonsi dei planetarj più moderni e più perfetti.

Planetario, preso come aggettivo, si dice di tutto ciò che si riferisce ai pianeti.

Sistema planetario. Dicesi così il complesso di tutti i pianeti principali e secondarj, che si muovono intorno al sole.

Ore planetarie. Sono le ore diseguali, dette ancora *antiche* o *giudaiche*: di queste se ne contavano 12 tra il levare e il tramontare del sole, e 12 tra il tramonto e la levata successiva.

Giorni planetarj. Gli antichi riferivano ciascun giorno ad un pianeta, dimanierachè i sette pianeti che essi conoscevano presedevano ai sette giorni della settimana. I nomi moderni dei giorni della settimana sono derivati dai nomi dei pianeti. *Vedi* Settimana.

PLANIMETRIA (*Geom.*). Parte della geometria pratica che ha per oggetto la misura delle superficie. *Vedi* Area.

PLANISFERO (*Astron.*). Projezione della sfera e de' suoi diversi circoli sopra una superficie piana. *Vedi* Projezione.

PLATONE. Quest' uomo sommo, al quale la posterità e la storia hanno conservato

il nome di *divino* accordatogli dall' entusiasmo della Grecia, nacque nell' isola di Egina il settimo giorno del mese targelione nell' anno terzo dell' LXXXVIII olimpiada (anno 430 av. G. C.). Aristone, suo padre, discendeva da Cadmo e da Perictonio; sua madre discendava da un fratello di Solone. Un' origine così illustre, e soprattutto l' ammirazione eccitata dalla sua eloquenza e dal suo ingegno, fecero nascere nell' antichità quelle favole ingegnose sulla sua nascita e sulla sua gioventù che per tanto tempo vi ebbero credito.

È impossibile certamente il parlare di Platone senza annunciare almeno il vasto e sublime sistema filosofico che manifestò al mondo. Discepolo di Socrate che aveva riformato la filosofia corrotta dai sofisti, fondandola sulla *cognizione di se medesimo*, Platone non riprodusse soltanto negl' immortali suoi scritti la dottrina dell' illustre suo maestro; l' ingegno suo creatore si clavò fino alle concezioni le più sublimi alle quali possa giungere lo spirito umano. La scuola per sempre celebre ch' ei creò sotto il nome di Accademia divenne una sorgente feconda donde scaturirono quei torrenti di luce che illustrarono la civiltà antica. Senza entrare nella esposizione sistematica della filosofia di Platone, che ha dato luogo anco a' nostri giorni a interpretazioni così diverse e sovente così strane, può dirsi che la società antica non ha prodotto altro sistema più completo e dal quale se ne deduca una morale più sublime e più pura. L' idea dell' unità di Dio e dell' immaterialità dell' anima posta da Platone come la base teoretica di qualunque cognizione ci spiega l' ammirazione dei padri della chiesa e dei primi cristiani per quest' uomo straordinario. Platone fu il fondatore della filosofia razionale, come Aristotile fu il fondatore della filosofia sperimentale. Questi due principj sono in realtà i soli per mezzo dei quali la ragione possa elevarsi alla cognizione dei grandi problemi che essa è destinata a risolvere. La storia dello spirito umano, in mezzo agli infiniti sistemi che sono stati immaginati, in ultima analisi non espone altro che la lotta perpetua delle dottrine di Platone e di Aristotile, che sono il punto di partenza di ogni filosofica speculazione. Ma adesso non dobbiamo considerare sotto questo rapporto i lavori di Platone, come non cercheremo nemmeno di raccontare le principali circostanze della sua vita che da nessuno sono ignorate.

Il divino Platone non divise l' opinione del suo maestro sulle matematiche: fu appunto per istruirsi in tali scienze che egli intraprese lunghi viaggi, e ne fece la base del suo insegnamento filosofico. La sua scuola, che precede di qualche tempo la scuola di Alessandria, fu la cuna delle scoperte memorabili che si associano ai primi progressi della scienza. Quelle delle sezioni coniche, dei luoghi geometrici e della loro applicazione alla risoluzione dei problemi indeterminati illustrarono specialmente la scuola di cui era il fondatore: ma senza fondamento però alcuni scrittori dell' antichità hanno voluto attribuirli tali scoperte, poichè sembra ormai fuori di dubbio che egli non ha composto nessun' opera puramente matematica. Al tempo di Platone il problema della duplicazione del cubo acquistò celebrità, e la sua risoluzione divenne uno degli oggetti della sua scuola. Noi abbiamo già consacrato varj articoli ai discepoli più celebri dell' Accademia, ed abbiamo avuto occasione di parlare di tali scoperte (*Vedi* Archita, Eudosso ec.). In tal guisa Platone appartiene alla storia della scienza, meno pei lavori suoi proprj, che per l' impulso che diede allo studio delle matematiche, e pel numero considerabile di geometri distinti nell' antichità che formaronsi alla sua scuola. Ci duole che i limiti del nostro piano non ci permettano di dare a questa notizia troppo succinta dei servigj resi da Platone alla scienza e all' umanità tutti quelli sviluppi che sarebbero necessarj e che egli meriterebbe. Non abbiamo potuto fare altro che inscrivere questo gran nome nelle pagine di quest' opera affatto speciale, affinchè non potessimo esse accusati di avere dimenticato, risalendo il

corso dei secoli, nei fasti della scienza il filosofo che fece scrivere sulla porta dell' Accademia: *Nessuno quì entri che non sia geometra.* Platone non contrasse mai il vincolo coujugale e morì il primo anno della CVIII olimpiade (anno 347 avanti G. C.). Le diverse edizioni e traduzioni delle sue opere che sono giunte fino a noi nella loro integrità formerebbero il soggetto di un articolo bibliografico assai importante. Si vedano in questo proposito le raccolte speciali, e tra le altre la *Bibliotheca Graeca* di Fabricio, e la *Bibliotheca Bussaviana.*

PLATONICO. Corpi platonici. Negli antichi scrittori si trovano talvolta così denominati i *corpi regolari.* *Vedi* Solidi.

PLEJADI (*Astron.*). Nome che è stato dato ad una riunione di stelle situate sul dorso del Toro. Gli antichi ne contavano sette, ma ora non ve ne sono più che sei visibili ad occhio nudo. Forse una di tali stelle ha diminuito di splendore, forse fu questo un errore degli antichi. Comunque sia, anco al tempo d' Ovidio non se ne contavano che sei, come ne fa testimonianza il verso: *Quae septem dici, sex tamen esse solent.*

PLEJONE (*Astron.*). Nome di una delle Plejadi.

PNEUMATICA. Ramo della meccanica generale, che ha per oggetto le leggi del moto dei gas o fluidi elastici.

La teoria del moto dei fluidi è, come l' abbiamo detto in altra parte (*Vedi* Idrodinamica), la parte della meccanica la meno avanzata; laonde ci attaccheremo principalmente ai resultamenti constatati dall' esperienza, e i quali nella pratica possono essere impiegati utilmente.

1. Quando un gas è contenuto in un vaso chiuso, esso esercita, astrazione fatta dal suo peso, delle pressioni uguali sopra tutti i punti delle pareti, e la cui intensità dipende dalla sua densità e dalla sua temperatura (*Vedi* Forza elastica). Se il vaso fosse situato in uno spazio vuoto limitato, e che si aprisse un orifizio in una delle sue pareti, il gas sgorgherebbe da quest' orifizio e si spanderebbe uniformemente nello spazio vuoto con una velocità di sgorgo, la quale diminuirebbe con la densità del gas nel vaso; questa velocità diventerebbe nulla e lo sgorgo cesserebbe, quando la forza elastica della porzione sgorgata potesse fare equilibrio a quella della porzione che rimane nel vaso, vale a dire quando la densità fosse la stessa al di dentro e al di fuori del vaso. Se in luogo di essere situato in uno spazio primitivamente vuoto, il vaso si trovasse in uno spazio pieno di un altro gas, la velocità iniziale dello sgorgo dipenderebbe dalla differenza delle forze elastiche o dalle pressioni interne ed esterne, dimodochè nel caso in cui la pressione del gas interno fosse la più piccola, non solamente esso non potrebbe uscire, ma sarebbe ancora ricalcato nel vaso dal gas esterno che vi penetrerebbe in virtù della superiorità della sua forza di espansione.

In questi diversi casi di sgorgo, la velocità è necessariamente variabile, poichè a misura che la massa gassosa diminuisce nel vaso, la porzione restante aumenta di volume, per occupar sempre tutta la capacità del vaso, il che diminuisce la sua densità, e per conseguenza la sua forza elastica. È evidente che la velocità dello sgorgo non potrebbe essere costante, se non che quando la pressione che la determina non sia essa stessa costante, e che la resistenza dovuta al mezzo nel quale il gas scorre rimanga la stessa in tutto il tempo dello sgorgo.

3. Per fissare le idee, immaginiamo un cilindro verticale esattamente chiuso e pieno di aria allo stato ordinario, vale a dire alla semplice pressione dell' atmosfera. Se si fora un orifizio alla base inferiore, veruno sgorgo non avrà luogo, poichè le molecole di aria interna che si trovano davanti quest' orifizio provano dalla parte dell' aria esterna una pressione uguale e opposta alla loro pressione interna; ma se l' aria interna viene a risentire un aumento di pressione, se, per esempio, la base superiore del cilindro è uno stantuffo mobile che si carica

di un peso, l'aria interna si troverà più compressa che l'aria esterna, e scapperà al di fuori in virtù di quest'eccesso di pressione; e siccome lo spazio occupato dal gas nel cilindro diminuisce a misura che esso sgorga, perchè lo stantuffo discende, ne resulta che la pressione e la densità del gas interno sono i medesimi in tutto il tempo dello sgorgo, la cui velocità è per conseguenza costante, poichè la resistenza dell'aria esterna non potrebbe essere modificata dalle porzioni dell'aria sgorgata, le quali vengono a perdersi nello spazio illimitato che essa occupa.

4. Si chiami p il peso dell'atmosfera a P il peso addizionale che carica lo stantuffo, le molecole interne in faccia dell'orifizio saranno spinte dal di dentro al di fuori con la forza $p+P$, e dal di fuori al di dentro con la forza p; queste due forze agendo in direzioni opposte, la loro resultante sarà $p+P-p=P$, e, per conseguenza, lo sgorgo avrà luogo come se esso fosse dovuto alla sola forza P, e che si effettuasse nel vuoto.

5. Si riporta teoricamente lo sgorgo dei gas a quello dei liquidi considerando il gas, il quale sgorga come un liquido di uguale densità, il cui carico al di sopra dell'orifizio (*Vedi* Sgorgo) ha per altezza l'altezza della colonna liquida, il cui peso sarebbe uguale alla pressione che produce lo sgorgo; così, indicando con b l'altezza di una colonna di aria che avesse per base lo stantuffo e il cui peso fosse P, avremo per la velocità V dello sgorgo

$$V=\sqrt{2gb}\,.$$

Siccome è uso di valutare la pressione dei fluidi elastici in colonne di mercurio, supponiamo ora che un manometro a mercurio (*Vedi* Forza elastica) sia adattato ad un cilindro e si elevi ad un'altezza h', nel mentre che un barometro situato nell'aria esterna si eleva ad un'altezza h; h' rappresenterà la pressione $p+P$ dell'aria interna, e la differenza dell'altezze $h'-h$, che indicheremo con H, rappresenterà la pressione dovuta al peso situato sopra lo stantuffo e il quale determina lo sgorgo. Si tratta dunque di valutare b in funzione di H per non avere da considerare che delle colonne di mercurio.

Spesso s'impiegano, per misurare le pressioni più grandi della pressione media dell'atmosfera, dei manometri aperti alla loro estremità superiore, dimodochè il mercurio che essi contengono è pressato in uno dei rami dal gas e nell'altro dall'aria esterna; l'altezza che essi segnano è allora la differenza tra la pressione interna e la pressione dell'atmosfera, ossia la quantità che abbiamo indicata con H. Supporremo, in tutto ciò che segue, che ci si serva di simili istrumenti.

La valutazione di b in funzione di H non presenta alcuna difficoltà, mentre poichè queste altezze appartengono a colonne della stessa base, quelle dello stantuffo, e dello stesso peso P, esse sono tra loro nel rapporto inverso delle densità dei loro fluidi respettivi; così indicando con Δ la densità del mercurio e con δ quella dell'aria, si ha

$$b=H\,\frac{\Delta}{\delta},$$

sostituendo questo valore di b in quello di V, si ottiene

$$V=\sqrt{2g\,.\,H\frac{\Delta}{\delta}}\,\ldots\ldots(a).$$

6. Quest'espressione può applicarsi a qualunque altro gas che l'aria atmosfe-

rica, intendendo per δ la densità di questo gas, e ne resulta una conseguenza importantissima. Siano δ e δ' le densità di due gas qualunque, H la pressione sotto la quale essi sgorgano, e V e V' le loro velocità respettive, abbiamo

$$V = \frac{M}{\sqrt{\delta}}, \quad V' = \frac{M}{\sqrt{\delta'}},$$

indicando per abbreviare, con M la quantità $\sqrt{2gH\Delta}$;

$$V : V' = \sqrt{\delta} : \sqrt{\delta'};$$

vale a dire che le velocità di sgorgo di due gas sotto una stessa pressione sono in ragione inversa delle radici quadrate dalle loro densità.

7. Consideriamo in particolare l'aria atmosferica, e modifichiamo la formula (*a*) in modo da renderla immediatamente applicabile a tutte le circostanze di pressione e di temperatura.

Si sa che il metro cubo di aria secca alla temperatura zero, e sotto la pressione media dell'atmosfera $0^m,76$ pesa chilogrammi 1,299; siccome questo fluido si dilata da 0,00375 del suo volume primitivo a 0°, per ciascun grado centigrado di accrescimento di temperatura, se rappresentiamo con 1 il suo volume a 0°, questo volume diventerà $1+0,00375t$ a t^o; donde resulta che alla temperatura di t^o centigradi e sempre sotto la stessa pressione $0^m,76$, il peso di un metro cubo di aria è rappresentato da

$$\frac{1^{ch.},299}{1+0,00375t},$$

il che possiamo portare a

$$\frac{1^{ch.},299}{1+0,004t},$$

per tener conto del vapore di acqua sempre mescolato all'aria atmosferica e il quale diminuisce il suo peso. Tutte le altre circostanze essendo le stesse, se la pressione fosse k, il metro cubo di aria sarebbe

$$\frac{k}{0,76} \cdot \frac{1,299}{1+0,004t} = 1,709 \cdot \frac{k}{1+0,004t}.$$

Quanto al peso del metro cubo di mercurio alla temperatura t^o, esso è

$$\frac{13598^{ch.}}{1+0,00018t};$$

poichè questo fluido pesa 13598 chilogrammi il metro cubo a 0°, e si dilata di $\frac{1}{5550}$ ossia da 0,00018 del suo volume a 0 per l'accrescimento di temperatura di un grado centigrado.

Premesso ciò, osserviamo che il rapporto delle densità Δ e δ del mercurio e dell'aria è lo stesso di quello dei pesi della loro unità di volume, e, pertanto, questo rapporto è

$$\frac{\Delta}{\delta} = 7956 \cdot \frac{1+0,004t}{(1+0,00018t)k},$$

ovvero semplicemente

$$\frac{\Delta}{\delta} = 7956 \cdot \frac{1 + 0,004t}{k},$$

trascurando il fattore $1+0,00018t$, il quale differisce sempre pochissimo dall'unità, questa soppressione d'altra parte, corregge ancora un poco l'effetto dei vapori acquosi sul peso dell'aria.

Per introdurre questo resultamento nella formula (a), non rimane che da sostituire alla pressione qualunque k, la pressione $h+H$, alla quale è sottoposta la massa di aria racchiusa nel cilindro; e viene, fatte tutte le riduzioni, dopo aver posto invece di g il suo valore $9^m,8088$,

$$V = 395 \sqrt{\left[\frac{H}{h+H}\left(1+0,004t\right)\right]},$$

il che si mette sotto la forma

$$V = 395 \sqrt{H \frac{T}{h+H}} \ldots\ldots (b),$$

ponendo

$$1 + 0,004t = T.$$

8. Si ottiene immediatamente il volume di aria sgorgato in un secondo di tempo moltiplicando, la velocità V per l'area S dell'orifizio di sgorgo; questo volume d'aria o l'*efflusso* dell'orifizio è dunque

$$395S \sqrt{H. \frac{T}{h+H}};$$

ma in questo caso, come per lo sgorgo dei liquidi, bisogna tener conto della contrazione che prova la vena fluida al suo passaggio per l'orifizio e la quale diminuisce l'afflusso teorico; sia dunque m un coefficiente di riduzione da determinare con l'esperienza: Q indicando l'efflusso reale, avremo

$$Q = 395 m S \sqrt{H. \frac{T}{h+H}} \ldots\ldots (d).$$

9. Il signor D'Aubusson, mediante il paragone di centocinquanta esperienze che ha fatto con la più gran cura sopra l'aria atmosferica, ha trovato che bisognava dare ad m il valore

0,65 per gli orifizi o sottili pareti
0,93 per tubi cilindrici
0,94 per tubi leggermente conici.

I tubi dei quali più ci serviamo nella pratica, tali come i tubi che terminano i mantici delle fucine e i tubi dei soffietti, essendo tubi molto allungati e acuti, il coefficiente 0,94 sarebbe quello che sembrerebbe convenirli meglio; ciò non ostante, per maggior sicurezza, il signor D'Aubusson adotta per questi tubi il coefficiente 0,93, e trasforma l'espressione (d) nell'espressione

$$Q = 289 D^2 \sqrt{H. \frac{T}{h+H}} \ldots\ldots (e),$$

introducendoci inoltre il diametro D dell'orifizio di uscita.

10. Se vogliamo conoscere il peso della massa di aria sgorgata in un secondo di tempo, bisogna moltiplicare quest'ultimo valore di Q per il peso di un metro cubo di aria alla temperatura t e sotto la pressione $h+H$, o per la quantità

$$1,709 \cdot \frac{h+H}{1+0,004t};$$

indicando con P il peso domandato, si ottiene, fatte tutte le riduzioni,

$$P = 493 \, . \, D^2 \sqrt{H \frac{h+H}{T}} \ldots . (f).$$

11. È essenziale di osservare che il volume di aria dato dalle formule (d) ed (e) è stimato avere la stessa densità che nell'interno del serbatojo donde esso esce, ossia essere sempre sottoposto alla pressione $h+H$; per trasformare questo volume in quello che avrebbe la stessa massa di aria sotto la sola pressione atmosferica h, o sotto qualunque altra pressione h', bisognerebbe moltiplicarlo per il rapporto delle due pressioni $\frac{h+H}{h'}$, e si avrebbe allora

$$Q = 289 \frac{D^2}{h'} \sqrt{H(h+H)T} \ldots . . (g).$$

12. I seguenti esempii ci faranno conoscere l'uso di queste diverse formule.

I. *Si domanda il volume d'aria atmosferica, ridotto alla pressione media* $0^m,76$, *che somministrerà un serbatojo sul quale il manometro a mercurio segna* $0^m,04$, *e al quale è adattoto un cannello o tubo di* $0^m,065$ *di diametro. La pressione atmosferica esterna indicato dal barometro è* $0^m,75$ *e la temperatura è di* 15°.

Si ha

$$t = 15^{\circ}; \quad h = 0^m,75; \quad h' = 0^m,76; \quad H = 0^m,04; \quad D = 0^m,065,$$

e, per conseguenza,

$$h+H = 0^m,79; \quad T = 1 + 0,004 \times 15 = 1,06.$$

Sostituendo questi valori nella formula (g), otterremo

$$Q = 289 \, . \, \frac{(0,065)^2}{0,76} \sqrt{\left[0,04 \times 0,79 \times 1,06\right]}$$

$$= 0^{mc},294,$$

vale a dire che il serbatojo darà, con pochissima differenza, il terzo di un metro cubo di aria per secondo, il che basta per alimentare il fuoco di quattro grosse fucine di raffineria.

Se si volesse conoscere questa quantità in *peso*, bisognerebbe moltiplicare il volume $0^{mc},294$ per il peso del metro cubo a 15° e sotto la pressione $0^m,76$ (*vedi* sopra, n.° 7), ovvero fare uso immediatamente della formula (f). Col primo processo, si troverebbe

$$P = 0,294 \times \frac{1,299}{1,06} = 0^{ch},360,$$

e col secondo

$$P = 493\left(0,065\right)^2 \cdot \sqrt{\left[0,04 \cdot \frac{0,79}{1,06}\right]}$$
$$= 0^{ch},35964,$$

resultamenti che possiamo considerare come identici.

II. *Si domanda qual dev' essere il diametro del canale di sgorgo, perchè la quantità d'aria somministrata sia di* $0^{ch},32$ *per secondo sotto una pressione manometrica di* $0^m,043$. *Il barometro segna mediamente nella fabbrica* 0^m75 *e il termometro* $11°$.

La quantità domandata essendo il diametro D, si potrebbe indifferentemente ricavare il valore di D da una delle espressioni (*f*) o (*g*); ma siccome la quantità d'aria data è espressa in peso, bisogna servirsi dell'espressione (*f*), la quale non esige veruna precedente riduzione. Abbiamo così

$$D = \sqrt{\left(\frac{P}{493\sqrt{\left[H\frac{h+H}{T}\right]}}\right)},$$

sostituendo in questa formula i valori dati, si ottiene

$$D = \sqrt{\left(\frac{0,32}{493\sqrt{\left(0,043 \cdot \frac{0,793}{1,044}\right)}}\right)}$$
$$= 0^m,0599.$$

Il diametro domandato è dunque $0^m,06$.

III. *Qual dev' essere l' altezza del manometro per fare uscire da un canale di* $0^m,075$ *di diametro* 413 *grammi, ossia* $0^{ch},413$ *di aria atmosferica in un secondo? Il barometro segna* $0^m,744$ *nella fabbrica, e il termometro* $13°$.

La quantità cercata essendo in questo caso l'altezza manometrica H, bisogna cominciare a dedurla dall'espressione (*f*). Elevando i due membri di quest' espressione al quadrato, si ottiene l'equazione del secondo grado in H,

$$TP^2 = (493)^2 \cdot D^4 \cdot h \cdot H + (493)^2 \cdot D^4 \cdot H^2,$$

donde si ricava

$$H = -\frac{1}{2}h + \sqrt{\left[\frac{P^2T}{(493)^2 \cdot D^4} + \frac{1}{4}h^2\right]}.$$

Facendo dunque $h = 0^m,744$; $D = 0^m,075$; $P = 0^{ch},413$;

$$T = 1 + 0,004 \times 13 = 1,052,$$

viene

$$H = -0,372 + \sqrt{\left[\frac{(0,413)^2 \cdot 1,052}{(493)^2 \cdot (0,075)^4} + (0,372)^2\right]},$$

e, fatti tutti i calcoli, si trova

$$H = 0^m,030.$$

13. Il principio del n.° 6 dà il mezzo di estendere a tutti i gas le formule (*f*) e (*g*) relative all'aria atmosferica. Infatti, indicando con δ la densità dell'aria, con δ' quella di un gas qualunque, e con V e V' le velocità respettive

di sgorgo, abbiamo in virtù di questo principio,

$$V' = V \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta'}}.$$

Così chiamando S l' area dell'orifizio di sgorgo del gas, la cui densità è δ', la quantità che si otterrà di questo gas in un secondo sarà

$$VS = VS \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta'}};$$

ma VS rappresenta la quantità d'aria ottenuta dallo stesso orifizio, o la quantità rappresentata di sopra per Q. Dunque, chiamando Q' la quantità ottenuta del gas, abbiamo

$$Q' = Q \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta'}}.$$

Se prendiamo per unità delle densità quella dell'aria, il rapporto $\frac{\delta'}{\delta}$ esprimerà la gravità specifica del gas, ed esprimendola con φ, avremo

$$Q' = \frac{Q}{\sqrt{\varphi}} \; \ldots\ldots \; (h).$$

Ponendo invece di Q il suo valore ricavato dall'espressione (*g*), verrà definitivamente

$$Q' = \frac{289 D^2}{h' \sqrt{\varphi}} \sqrt{H\left(h + H\right) T} \; \ldots\ldots \; (i),$$

formula che farà conoscere la quantità ottenuta di un gas la cui gravità specifica è φ.

Se non vogliamo pregiudicare in nulla sul valore del coefficiente di contrazione, bisogna sostituire nell' espressione (*h*) il valore di Q dato dall'espressione generale (*d*), si ha allora

$$Q' = \frac{395 \, . \, mS}{\sqrt{\varphi}} \, . \, \sqrt{H \, . \, \frac{T}{h+H}} \; \ldots\ldots \; (k),$$

e il volume Q' del gas è stimato avere la stessa densità che nell'interno del serbatojo, ove esso è sottoposto alla pressione $h+H$. Ed è quest'ultima formula che dovremo impiegare per tutte le valutazioni relative al gas idrogene negli apparecchj d' illuminazione.

14. Proponiamoci, per esempio di determinare il numero di matri cubi di gas idrogene, che potrà somministrare in un' ora di tempo un gasometro d' illuminazione sotto una pressione manometrica di $0^m,004$, e con una apertura circolare praticata nelle sue pareti di $0^m,124$ di diametro. La temperatura essendo di 15° e la pressione atmosferica di $0^m,755$.

L' orifizio è a parete sottile, e bisogna per conseguenza impiegare il coefficiente di contrazione $m = 0,65$; i dati sono perciò

$$m = 0,65; \quad H = 0^m,004; \quad h = 0^m,755;$$
$$T = 1 + 0,004 \times 15 = 1,06,$$

e si ha, poichè il semi-diametro dell' orifizio $= 0^m,062$,

$$S = 3,1416 \times (0,062)^2 = 0^{m q},01208.$$

Sostituendo tutti questi valori nella formula (k) facendoci di più, secondo il Dulong, $\varphi = 0,559$, si avrà

$$Q' = \frac{395 \times 0,65 \times 0,01208}{\sqrt{0,559}} \sqrt{\left[0,004 \cdot \frac{1,06}{0,759}\right]}$$

$$= 0,^{me}310051.$$

Questa quantità di gas è quella che ha luogo per un secondo; per avere la quantità totale in un ora, bisogna moltiplicarla per 3600, numero dei secondi contenuti in un'ora, il che dà pel valore cercato $1116^{mc},1836$. Così, sgorgheranno circa 1116 metri cubi; per ora, dal gassometro.

Si abbia ancora da determinare la grandezza dell'orifizio che bisognerebbe praticare nella parete sottile di un gassometro d'illuminazione, per avere una quantità di mille metri cubi di gas per ora, sotto una carica rappresentata da una colonna di acqua di $0^{m},05$ di altezza. Ammettendo che l'altezza media del barometro sia di $0^{m},75$ nella località e la temperatura di 12°.

Ricavando il valore di S dall'espressione (k), si ottiene l'espressione generale

$$S = \frac{Q'\sqrt{\varphi}}{395 \cdot m \sqrt{\left[H \cdot \frac{T}{h+H}\right]}},$$

nella quale non rimane che da sostituire i valori dati; ma siccome in questo caso l'altezza manometrica è espressa in colonna di acqua, bisogna cominciare dal ridurla in colonna di mercurio, osservando che l'altezza H di una colonna di mercurio, equivalente in peso ad una colonna di acqua la di cui altezza è b, è data dalla relazione

$$H = \frac{b}{\delta},$$

nella quale δ indica la gravità specifica del mercurio, quella dell'acqua essendo 1. Il valore conosciuto di δ essendo 13,598, abbiamo in questo caso, a motivo di $b = 0,05$,

$$H = \frac{0,05}{13,598} = 0^{m},003677;$$

osservando di più che mille metri cubi per ora danno per secondo

$$\frac{1000}{3600} = 0^{mc},2778,$$

faremo

$$Q' = 0,2778; \quad H = 0,003677; \quad h = 0,75; \quad \varphi = 0,559;$$
$$T = 1,048; \quad m = 0,65,$$

e la formula precedente ci darà

$$S = \frac{0,2778 \times \sqrt{0,559}}{395 \times 0,65 \times \sqrt{\frac{0,003677 \times 1,048}{0,753677}}}$$

$$= 0,^{mq}011313.$$

Così, l'area dell'spertura dev'essere di $o^{mq},011313$; se questa è un quadrato, il suo lato dovrà avere $o^m,106$, se essa è un circolo, il suo diametro sarà di $o^m,12$.

15. Quaodo i gas escono dal gassometro mediante un lungo tubo di condotta la cui estremità è interamente aperta o muoita di un tobo che ne diminuisce l'orifizio, le circostanze dello sgorgo non sono più le stesse, e la soa velocità è taoto più minore, quanto i gas hanno incontrato più resistenza dopo la loro uscita dal serbatojo fioo alla loro uscita dal condotto. Queste resistenze essendo dovute, come quelle che l'acqua prova nei tubi di condotta, all'azione delle pareti sul fluido, si suppone che esse siano:

1.° Proporzionali alla larghezza e al diametro del tubo;

2.° In ragione inversa delle sezione del tubo o del quadrato del suo diametro;

3.° Proporzionali al quadrato della velocità.

Così, chiamando u la velocità media di un gas in un condotto la cui lunghezza è L e il diametro D; e, di più, chiamando n un coefficiente costante, la resistenza totale sarà rappresentata da

$$n\frac{LDu^2}{D^2}, \quad \text{ossia da } n\frac{Lu^2}{D}.$$

Ora, se si stabilisce un manometro sul serbatoio ed un altro sul tubo, assai vicino alla bocca di uscita, l'altezza H del primo indicherà la forza che scaccia il gas dal serbatojo, e l'altezza h del secondo quella che scaccia il fluido dal condotto; la differenza di queste altezze, $H-h$, sarà la perdita di forza prodotta dalla resistenza delle pareti, ed avremo per conseguenza l'equazione

$$H-h=n\frac{Lu^2}{D} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (l).$$

16. La velocità di un gas in un tubo di condotta non è uniforme come quella dell'acqua, mentre, poichè la pressione diminuisce successivamente dall'orifizio del serbatojo fino all'orifizio di uscita, segue lo stesso della densità del gas; dimodochè immaginaodo due strati trasversali di uguale grossezza a qualche distanza l'uno dall'altro, lo strato più viciuo all'orifizio di uscita conterrà meno molecole del più lontano; e siccome deve passare in uno stesso tempo una stessa massa o un medesimo numero di molecole da tutte le sezioni del canale, le molecole dovranno muoversi con più velocità nel primo strato che nel secondo. La densità essendo proporzionale alla pressione, e la diminuzione di pressione effettuandosi in una progressione aritmetica, la velocità media u è quella che ha luogo nel mezzo del canale. Ora, indicando con b la pressione atmosferica esterna, la pressione è $b+H$ all'orifizio del serbatojo e $b+h$ all'orifizio del canale; la pressione nel mezzo del canale è dunque

$$\frac{1}{2}\left(b+H+b+h\right)=b+\frac{1}{2}\left(H+h\right),$$

e si ha tra la velocità u dovuta a questa pressione e la velocità v dello sgorgo dovuto alla pressione estrema $b+h$, la relazione

$$u : v=\left(b+h\right):\left(b+\frac{1}{2}\left(H+h\right)\right),$$

donde

$$u=v.\frac{b+h}{b+\frac{1}{2}\left(H+h\right)},$$

tale è il valore della velocità media che deve esser messo nell'equazione fondamentale (l).

Nel caso in cui il canale fosse terminato da un tubo che avesse un diametro d al suo orifizio, se si chiami V la velocità di uscita, avremo tra questa velocità V e la velocità v che avrebbe luogo a tubo aperto, la relazione

$$v = m V \frac{d^2}{D^2},$$

m indicando il coefficiente della contrazione. Ma la velocità di uscita V dipende dalla pressione manometrica h, e, per conseguenza, il suo quadrato V^2 è proporzionale ad h. Possiamo dunque porre

$$V^2 = n'h,$$

n' essendo un numero costante. Mediante quest' osservazione l'equazione (l) diventa

$$H - h = nmn' \left(\frac{b+h}{b + \frac{1}{2}\left(H+h\right)} \right)^2 \cdot \frac{hLd^4}{D^5},$$

il che si può ridurre a

$$H - h = \mu \cdot \frac{hLd^4}{D^5} \; \ldots\ldots (m),$$

rappresentando con una costante μ il prodotto delle tre costanti m, n, n', e del fattore

$$\left(\frac{b+h}{b + \frac{1}{2}\left(H+h\right)} \right)^2.$$

il cui valore, quantunque variabile, è sempre racchiuso tra limiti assai vicini perchè si possa considerare come costante.

17. Abbiamo supposto in tutto quello che precede che l'altezza manometrica h indicasse esattamente l'altezza dovuta alla velocità di uscita, e per quest'effetto, bisognerebbe che il manometro fosse situato sopra un serbatojo adattato all'estremità del canale, e al quale farebbe capo il tubo di uscita, nel mentre che in realtà questo manometro è immediatamente stabilito sul canale stesso, assai vicino al tubo; l'altezza h' alla quale esso si eleva è dunque più piccola di h, altezza realmente dovuta alla velocità di uscita di una quantità uguale all'altezza dovuta alla velcoità v che il gas ha sotto il manometro; quest' ultima essendo $\frac{v^2}{2g}$, ovvero

$$\frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\delta}{\Delta}$$

in colonna di mercurio (n.° 5), avremo per la sua espressione in funzione di h

$$h \frac{m^2 d^4}{D^4},$$

a motivo di $v^2 = m^2V^2\frac{d^4}{D^4}$, e di (n.° 5) $V=\sqrt{2gh\frac{\Delta}{\delta}}$; così

$$h' = h - h\frac{m^2d^4}{D^4} = h\left(1-\frac{m^2d^4}{D^4}\right)$$

e

$$h = \frac{h'}{1-\frac{m^2d^4}{D^4}} \quad \ldots\ldots (n).$$

Ma nei gran canali, ove d è tutto al più il terzo di D, possiamo trascurare il termine $\frac{m^2d^4}{D^4}$, assai piccolo rapporto all' unità, e prendere h' per h.

18. Un grandissimo numero di esperienze, consegnate negli *Annali delle mine* (anni 1828 e 1829) sono state fatte dal signor d' Aubusson per determinare il valore del coefficiente costante μ dell' equazione (m). Esse hanno dato il valore medio

$$\mu = 0,0238,$$

il quale, messo in (m), rende quest' equazione

$$H - h' = 0,0238\frac{h'Ld^4}{D^5} \quad \ldots\ldots (p),$$

prendendo h' per h. Se ne ricava

$$h' = \frac{42HD^5}{Ld^4+42D^5} \quad \ldots\ldots (q),$$

espressione per mezzo della quale potremo calcolare l' altezza manometrica h', che ha luogo all' estremità del canale.

» Ho paragonato, dice il signor d' Aubusson, i valori di h' dati da questa
» formula con quelli di più di trecento osservazioni, e i resultamenti del cal-
» colo hanno seguito quelli dell' esperienza in tutte le loro variazioni, qualunque
» fossero i canali e i tubi impiegati, quando la sezione di questi era 0,73 della
» sezione dei primi, il tutto come quando essa non ne era che 0,04. Così la nostra
» formula, benchè non sia rigorosa in teoria, ha pienamente la sanzione del-
» l' esperienza, almeno tra i limiti in cui l' abbiamo applicata, ed è tra questi
» limiti che si troveranno quasi tutti i casi della pratica. »

19. Supponendo sempre $h = h'$, si ottiene, sostituendo il valore (q) nella formola

$$395\sqrt{h\frac{T}{b+h}},$$

la quale dà la velocità di uscita dovuta all' altezza h (n.° 8), e, moltiplicando il resultamento per l' area dell' orifizio $= \pm 0,785d^2$, onde avere la quantità

$$Q = 2011\sqrt{\frac{T}{b+h}}\sqrt{\frac{HD^5}{L+42\frac{D^5}{d^4}}} \quad \ldots\ldots (r),$$

Q indicando sempre la quantità dell' efflusso.

20. Il volume di aria dato da questa formola è alla pressione $b+h$. Per averlo alla pressione atmosferica b o a qualunque altra pressione b', bisogna (n.° 11) moltiplicare il secondo membro per

$$\frac{b+h}{b'}.$$

si ha allora

$$Q = \frac{2011}{b'} \sqrt{T\left(b+h\right)} \sqrt{\frac{HD^5}{L+42\frac{D^5}{d^4}}} \; \ldots\ldots (s).$$

Se vogliamo conoscere la quantità in *peso*, ciò è (n.° 10) mediante la quantità

$$1,709\frac{b+h}{T},$$

che dobbiamo moltiplicare questo stesso secondo membro. In tutti casi; si otterrà il valore di h con la formola (q), ovvero, se si volesse una maggiore esattezza, con la formola (n), sostituendovi in luogo di h' il valore di questa quantità, dato dalla formola (q).

21. Il signor d'Aubusson pensa, che senza esporsi ad un errore maggiore di $\frac{1}{100}$, si possono fare sparire la quantità b e t dalle precedenti formole, sostituendo loro un valore medio per una grande estensione di paese. Così, per la Francia, esso prende $t=12°$; il che dà $T=1,048$ e $b+h=0^m,78$. La formola (r) diventa semplicemente mediante ciò

$$Q = 2313 \sqrt{\frac{HD^5}{L+42\frac{D^5}{d^4}}} \; \ldots\ldots (t).$$

22. Per applicare la formola (r) al caso dei canali aperti, non basta farvi $d=D$, bisogna ancora, mediante l'esperienze, sostituire al coefficiente 2011 il coefficiente 1989; si ha perciò

$$Q = 1989 \sqrt{\frac{T}{b+h}} \sqrt{\frac{HD^5}{L+42D}} \; \ldots\ldots (u),$$

il che può ridursi a

$$Q = 2305 \sqrt{\frac{HD^5}{L+42D}} \; \ldots\ldots (v),$$

dando a T e a $b+h$ i valori medj di sopra.

23. Mediante il principio del n.° 6 e le considerazioni del n.° 15, se indichiamo sempre con φ la gravita specifica di un gas qualunque rapporto all'aria, la quantità Q' di questo gas sarà data dalla relazione

$$Q' = \frac{Q}{\sqrt{\varphi}},$$

nella quale Q sarà la quantità di aria nelle stesse condizioni di canali, di tubi e di pressione.

24. Per presentare tutto in un tempo un esempio d'applicazione e paragonare il calcolo all'esperienza, sceglieremo la seguente questione, trattata dal signor d'Aubusson.

Ad un gassometro ripieno di gas da illuminazione, si è adattato un canale di $0^m,01579$ *di diametro e di* $126^m,58$ *di lunghezzo; l'altezza del manometro ad acqua stabilito sul gassometro è di* $0^m,03383$*: si domanda quale sarà la quantità per ogni secondo. Il barometro è a* $0^m,754$ *e il termometro a* 19°.

Si ha

$$b=0^m,754;\quad T=1,076;\quad D=0^m,01579;\quad L=126^m,58;$$
$$\varphi=0,599;$$

l'altezza del manometro ad acqua, ridotta a quella del manometro a mercurio, è

$$H=\frac{0,03383}{13,598}=0^m,002488.$$

Questi valori, messi nell'espressione (u) divisa per $\sqrt{\varphi}$, danno

$$Q'=\frac{1989}{\sqrt{0,559}}\sqrt{\frac{1,076}{0,7564}}\sqrt{\frac{0,002488\,(0,01579)^5}{126,58+42\times 0,01579}}$$
$$=0^{mc},000440,$$

l'esperienza ha dato $0^{mc},000420$.

Impiegando la formula ridotta (v), si avrebbe

$$Q'=\frac{2305}{\sqrt{0,559}}\sqrt{\frac{0,002488\,(0,01579)^5}{126,58+42\times 0,01579}}$$
$$=0^{mc},0004271,$$

il che si accorda meglio col fatto.

25. I principii teorici che servono di base alla deduzione delle formule pratiche che abbiamo esposte sono dovuti a Danielle Bernoulli. Tutti i geometri i quali si erano occupati dello sgorgo dei fluidi, fino a questi ultimi tempi, gli avevano adottati, sforzandosi di far coincidere i calcoli con l'esperienza mediante l'uso dei coefficienti di correzione; ma in una memoria pubblicata tra quelle dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1830, il Navier ha stabilito una teoria tutta nuova e molto più generale di quella del Bernoulli. Rimanderemo a quest'opera degna assai di osservazione, della quale non abbiamo creduto dover presentare in questo punto i resultamenti, perchè essi non differiscono sensibilmente da quelli del signor d'Aubusson, per i casi che interessano la pratica, e perchè le formule di quest'ultimo sono più facili a calcolarsi. Vedi, per altri oggetti relativi ai movimenti dei fluidi elastici, le parole RESISTENZA e SOFFIETTO.

POLARE (*Astron.*). Si applica in generale questo epiteto a tuttociò che ha rapporto ai poli del mondo.

La *stella polare* è l'ultima stella della coda dell'Orsa minore: essa fu in tal guisa nominata dai primi osservatori, i quali si avvidero che il cielo sembrava girare intorno al punto che essa occupa. Infatti è così vicina al polo che il piccolo circolo da essa descritto è quasi insensibile: pure la distanza di questa stella dal polo va annualmente cangiando. *Vedi* PRECESSIONE.

Diconsi *circoli polari* due piccoli circoli della sfera in vicinanza dei poli. *Vedi* ARMILLARE.

In *geometria*, quando si riferisce una curva ad un punto fisso dal quale si fanno partire tutte le ordinate, l'equazione che esprime la relazione tra que-

ste ordinate e le loro distanze angolari da un asse fisso, prende il nome di Equazione polare, perchè allora questo punto fisso si considera come un *polo*.

Per fissare le idee, consideriamo una curva MN (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 11), ed un punto arbitrario P, preso per *polo*. Se da questo punto si conduce primieramente una retta AB che rappresenti l'asse fisso, e quindi delle ordinate Px, Px', Px'', ec., a tutti i punti della curva, è evidente che se si stabilisce una relazione generale tra un'ordinata qualunque Px e l'angolo xPB che essa fa coll'asse, una tal relazione avendo luogo per tutti i punti della curva, rappresenterà questa curva egualmente bene che la relazione che possa esistere tra le sue *coordinate rettilinee*.

Le ordinate particolari Px, Px', ec., prendono il nome di *raggi vettori*. Questi raggi e gli angoli che fanno coll'asse diconsi *coordinate polari*.

Quando si conosce l'equazione di una curva in *coordinate rettilinee*, può senza difficoltà trovarsi la sua equazione in *coordinate polari*, e viceversa. Passiamo ora ad indicare il modo col quale si ottiene questa trasformazione.

Sia MN (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 12) una curva qualunque riferita agli assi coordinati AX, AY formanti tra loro un angolo qualunque, e la cui equazione sia

$$f(x,y)=0,$$

ove f indica una funzione qualunque delle ascisse x e delle ordinate y. Sia inoltre P il punto preso per *polo*, ed AR l'asse delle *coordinate polari*.

Indichiamo con a e con b le coordinate rettilinee del punto P, vale a dire facciamo $AC=a$ e $CP=b$; e rappresentiamo con α l'angolo degli assi AX e AY.

Dal punto P conduciamo le rette PX' e PY' parallele agli assi e il raggio Pz: indichiamo con z questo raggio vettore, con ν l'angolo zPR che esso fa col suo asse, e con β l'angolo RPX'.

Si avrà

$$AD \text{ ossia } x = AC + CD = a + PE,$$
$$Dz \text{ ossia } y = DE + Ez = b + Ez.$$

Ora, nel triangolo zPE si ha (*Vedi* Trigonometria)

$$PE : Pz :: \text{sen}\, PzE : \text{sen}\, PEz,$$
$$Ez : Pz :: \text{sen}\, zPE : \text{sen}\, PEz,$$

donde si trae

$$PE = \frac{Pz\, \text{sen}\, PzE}{\text{sen}\, PEz} = \frac{z\, \text{sen}\,(\alpha - \beta - \nu)}{\text{sen}\, \alpha},$$

$$Ez = \frac{Pz\, \text{sen}\, zPE}{\text{sen}\, PEz} = \frac{z\, \text{sen}\,(\nu + \beta)}{\text{sen}\, \alpha},$$

e per conseguenza

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{z\, \text{sen}\,(\alpha - \beta - \nu)}{\text{sen}\, \alpha} \\ y &= b + \frac{z\, \text{sen}\,(\nu + \beta)}{\text{sen}\, \alpha} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1).$$

Sostituendo ora questi valori di x e di y nell'equazione $f(x,y)=0$, si otterrà l'*equazione polare*.

Se gli assi sono rettangolari, siccome allora si ha $\alpha = 90°$, le formule si semplicizzano e divengono

$$\left.\begin{array}{l} x = a + z\cos(\varphi + \beta) \\ y = b + z\,\mathrm{sen}(\varphi + \beta) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Esse divengono anco più semplici se l'asse polare si prende parallelo all'asse delle x, perchè in questo caso si ha $\beta = 0$, ed allora si cangiano nelle seguenti

$$\left.\begin{array}{l} x = a + z\cos\varphi \\ y = b + z\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right\} \ldots\ldots (3).$$

Finalmente, se si prende per polo l'origine stessa delle coordinate rettangolari, queste formule si riducono a

$$\left.\begin{array}{l} x = z\cos\varphi \\ y = z\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right\} \ldots\ldots (4),$$

perchè allora a e b svaniscono.

Per far vedere l'applicazione di queste formule, proponiamoci di trovare le *equazioni polari* delle sezioni coniche riferite ai loro *fuochi* come *poli*.

Il fuoco della parabola essendo situato sull'asse ad una distanza dal vertice eguale al quarto del parametro, si avrà per questa curva, indicando con p il parametro,

$$a = \frac{1}{4}p, \quad b = 0,$$

e per conseguenza, in forza delle equazioni (3),

$$x = \frac{1}{4}p + z\cos\varphi, \quad y = z\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Ma l'angolo φ deve esser contato a partire dall'origine, dunque esso è in realtà il supplemento di quello che è stato considerato in queste formule, nelle quali devesi perciò cangiare $\cos\varphi$ in $-\cos\varphi$. Eseguendo questo cangiamento e sostituendo le espressioni precedenti nell'equazione della parabola (*Vedi* PARABOLA)

$$y^2 = px,$$

si trova

$$z^2\,\mathrm{sen}^2\varphi = \frac{1}{4}p^2 - pz\cos\varphi,$$

ossia

$$(1 - \cos^2\varphi)z^2 + pz\cos\varphi - \frac{1}{4}p^2 = 0.$$

Risolvendo quest'equazione di secondo grado, si ottengono questi due valori di z:

$$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos\varphi}, \quad z = -\frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\varphi}.$$

Il valore positivo si riferisce ad uno dei rami della curva e il valore negativo all'altro, considerando come positivi i raggi vettori situati da una parte dell'asse e come negativi i raggi vettori situati dalla parte opposta. Ma, senza far conto della situazione del raggio vettore, il primo valore di z può dare da sè solo tutti i punti della parabola facendo variare φ da $0°$ fino a $360°$.

Nell' iperbola, la cui equazione riferita al centro è

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2,$$

la distanza del fuoco dal centro essendo eguale a $\sqrt{(a^2+b^2)}$ (*Vedi* Iperbola), se s' indica questa distanza con c, si avrà, in virtù delle equazioni (3),

$$x = c - z\cos v, \quad y = z \operatorname{sen} v,$$

dando a $\cos v$ il segno — per la stessa ragione accennata di sopra. Queste espressioni sostituite nell' equazione della curva danno, dopo tutte le riduzioni,

$$z = \frac{c^2-a^2}{a+c\cos v}, \quad z = -\frac{c^2-a^2}{a-c\cos v}.$$

La discussione di questi valori fa conoscere che essi si riferiscono ai quattro rami dell' iperbola. All' articolo Ellisse abbiamo dato l' *equazione polare* dell' ellisse deducendola da considerazioni dirette.

POLEMOSCOPIO (*Ottica*). Apparecchio di ottica mediante il quale si possono vedere degli oggetti nascosti alla vista diretta.

Questo strumento, inventato nel 1637 da Evelio, è stato chiamato *Polemoscopio* dalle parole greche πολεμός *combattimento* e σκοπέω io *vedo*, perchè se ne può fare un uso vantaggioso in tempo di guerra, negli assedj, per vedere ciò che avviene nel campo nemico.

Il pezzo principale del polemoscopio è uno specchio inclinato (*Tav.* CXCV, *fig.* 2) posto in fondo ad una scatola aperta in faccia a questo specchio, il quale manda all' occhio dello spettatore l' immagine *ab* di un oggetto AB, che non potrebbe vedersi senza il soccorso dello strumento, a motivo degli ostacoli che s' incontrano tra quest' oggetto e l' occhio.

POLENI (Giovanni), fisico e matematico celebre, nato a Venezia nel 1683, fu in principio destinato dalla sua famiglia a correre l' arringo della magistratura: ma alcune lezioni di fisica e di matematica che ricevè dallo stesso suo padre palesarono in lui una decisa inclinazione per tali due scienze: non senza grandi difficoltà ottenne di potervisi interamente applicare, e i progressi che vi fece superarono l' espettativa de' suoi maestri. In età di ventisei anni aveva già dato prove sì indubitate di capacità, perchè offerta gli venisse la cattedra di astronomia a Padova: in capo a sei anni passò ad occupare quella di fisica, senza per questo cessare di essere addetto all' astronomia e di applicarsi all' osservazione dei fenomeni celesti. Per invito del senato di Venezia, volse in breve i suoi studj alla scienza delle acque, sì necessaria nella bassa Lombardia, e vi acquistò in poco tempo tanto grido che divenne l' arbitro di tutte le contese che ad ogni istante sorgevano tra i sovrani di cui gli stati confinavano con qualche fiume. I Veneziani gli affidarono la direzione di tutti i lavori di tal genere; e, malgrado le occupazioni che gl' imponeva tale ufizio, fu nel 1719 obbligato ad accettare la cattedra di matematiche, vacante per essersi ritirato Niccolò Bernoulli. Tanti incarichi non impedivano, tale era la sua attività, che attendesse a comporre un numero grande di opere e di memorie, tre delle quali furono premiate dall'Accademia delle Scienze di Parigi, cioè, una nel 1733, *sulla maniera migliore di misurare sul mare il cammino di un vascello, indipendentemente dalle osservazioni astronomiche*, un' altra nel 1736, *sul modo migliore di costruire le ancore*, ed una terza nel 1741, *sulla costruzione dell'argano*.

Nè qui arrestavansi le cognizioni del Poleni. Egli fu pure dottissimo antiquario ed insigne architetto, come ne fanno ampia testimonianza le opere importanti

che ha lasciato in questi due rami di cognizioni. Era in commercio di lettere coi dotti più illustri d'Italia, di Francia, di Inghilterra e di Germania: e fu membro delle Accademie delle Scienze di Parigi, di Berlino e di Pietroburgo, e della Società Reale di Londra. Nel 1748 fu chiamato a Roma per esaminare la cupola di S. Pietro, ed indicò i mezzi più opportuni a prevenirne le degradazioni. Oppresso da tante occupazioni, il Poleni cessò di vivere e di lavorare il 15 Novembre 1761, stimato ed amato da tutti quelli che il conobbero, non meno per la profondità de' suoi talenti che per la dolcezza e modestia del suo carattere. Oltre un numero grande di memorie inserite in varie raccolte accademiche e in diverse opere periodiche del suo tempo, i principali scritti scientifici del Poleni sono: I *Miscellaneo: de barometris et thermometris*; *de machina quadam arithmetica*; *de sectionibus conicis in horologiis solaribus describendis*, Padova, 1709, in-4; II *De motu aquae mixto libri duo*, *quibus nonnullo novo pertinentia ad aestuario, ad portus atque flumina continentur*, ivi, 1717, in-4; III *De castellis per quae derivantur aquae fluviorum*, ivi, 1718, in-4. Si veda il giudizio che di quest' opera ha dato Montucla nella sua *Storia delle matematiche*, Tom. III, pag. 684 e segg.; IV *Ad abbatem Grandum epistolae duae de telluris formo*; *observatio eclipsis lunaris Patavii anno* 1723; *et de causa motus musculorum*, ivi, 1724, in-4; V *Ad Johan. Jacob. Marinonum epistola in qua agitur de solis defectu anno* 1724, *Patavii observato*, Vienna, 1725, in-4; VI *Epistolorum mathematicorum fasciculus*, Padova, 1728, in-4. Per maggiori particolarità su questo dotto possono consultarsi le *Memorie per la vita, gli studj e i costumi del sig. Giovanni Poleni*, Padova, 1762, in-4; il suo *Elogio* inserito da Grandjean de Fouchy nella *Raccolta* dell'Accademia delle Scienze di Parigi, per l'anno 1763, e quello scritto da Fabroni nel tom. XII delle *Vitae illustrium Italorum*.

POLIEDRO. (*Geom.*) (da πολὺς, *più* e da ἕδρα, *base*). Corpo terminato da tutte le parti da superficie piane. Queste superficie si chiamano le *facce* del poliedro, e l'intersezione comune di due facce adiacenti prende il nome di *lato* o di *costola*.

I *poliedri*, come i poligoni, ricevono diverse denominazioni secondo il numero delle loro facce, così

Un poliedro che ha	*quattro* facce si chiama	*tetraedro*.
	cinque	*pentaedro*.
	sei	*essaedro*.
	otto	*ottaedro*.
	dodici	*dodecaedro*.
	venti	*icosaedro*, ec.

Il *tetraedro* è il più semplice di tutti i poliedri, poichè bisognano almeno quattro piani per racchiudere uno spazio solido.

Si chiama *vertice*, in un poliedro, qualunque punto ove più facce concorrono e formano un *angolo solido*. Si dimostra che il numero dei *vertici*, o quello degli angoli solidi, è sempre uguale *al numero delle costole*, *meno quello delle facce*, *più due*. Quanto al numero delle *costole*, è evidentemente uguale alla metà di quello dei lati di tutte le facce poligone, le quali compongono la superficie del poliedro. Se indichiamo con F il numero delle facce di un poliedro, con A, quello delle sue costole, e con S, il numero dei suoi angoli solidi, si avrà dunque l'espressione.



$$S = A - F + 2.$$

Si chiama *poliedro regolare* quello di cui tutte le facce sono poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali tra loro. Non possono esserci che *cinque poliedri regolari*, cioè: *tre* formati da triangoli equilateri, che sono il *tetraedro*; l'*ottaedro* e l'*icosaedro regolare*; *uno* terminato da quadrati, l'*essaedro regolare* o *cubo*; e finalmente *uno* terminato da *pentagoni*, il *dodecaedro regolare*. È impossibile di formare dei poliedri regolari con poligoni il cui numero dei lati superi cinque, perchè la somma degli angoli piani che compongono un angolo solido è necessariamente più piccola di quattro angoli retti: donde necessariamente segue che non si può formare un angolo solido con angoli di esagoni di cui tre sono equivalenti a quattro angoli retti, e a più forte ragione con gli angoli più grandi degli altri poligoni. (*Vedi* Solido e Regolare.)

POLIGONO. (*Geom.*). (da πολὺς *più*, e da γωνια, angolo.) Figura piana terminata da linee rette. (*Vedi* Nozioni preliminari.)

Si chiamano, in particolare,

Triangoli	i poligoni di tre lati.
Quadrilateri	quattro.
Pentagoni	cinque.
Esagoni	sei.
Eptagoni	sette.
Ottogoni	otto.
Enneogoni	nove.
Decogoni	dieci.
Undecogoni.	undici.
Dodecogoni.	dodici.

I poligoni che hanno più di 12 lati non hanno ricevuto nomi distinti, salvo quello di 15 lati che si chiama *pentodecagono*, ovvero *quindecogono*.

Le proprietà principali di questi poligoni essendo esposte negli articoli che gli sono consacrati, in questo punto ricercheremo soltanto di quelle, che sono comuni a tutti i poligoni.

1. Se da un punto preso nell'interno di un poligono si conducano delle rette ai vertici di tutti i suoi angoli, è evidente che si formeranno tanti triangoli quanti lati ha questo poligono. Per esempio, dal punto O, preso arbitrariamente nel pentagono ABCDE, conducendo le rette OA, OB, OC, OD e OE, si formano cinque triangoli che hanno ciascuno per *base* uno dei lati del pentagono (*Tav.* XXII, *fig.* 13).

Ora, è evidente, che la somma di tutti gli angoli alla base di questi triangoli è la stessa di quella degli angoli del poligono, poichè i primi non sono formati che delle parti di questi ultimi; ma la somma degli angoli alla base dei triangoli è uguale a tante volte due angoli retti, quanti triangoli ci sono, meno la somma degli angoli ai vertici; così, siccome quest'ultima, composta di tutti gli angoli intorno del punto O, è equivalente a quattro angoli retti (*Vedi* Angolo), ne resulta che la somma degli angoli di un poligono qualunque è equivalente a tante volte due angoli retti meno quattro, quanti lati ha questo poligono. Se indichiamo dunque con m il numero dei lati di un poligono qualunque, la somma dei suoi angoli sarà espressa da

$$m \cdot 180^\circ - 360^\circ, \quad \text{o da} \quad (m-2)\,180^\circ \; \ldots\ldots \; (o).$$

2. Si chiama *angolo esterno* di un poligono, l'angolo formato da un lato qua-

lunque e il prolungamento del lato adiacente, tale è l'angolo KDC (*Tav.* XXII, *fig.* 14). Prolungando tutti i lati di un poligono, si formano tanti angoli esterni quanti lati ci sono, e la somma di tutti questi angoli, qualunque sia il poligono, è sempre equivalente a quattro angoli retti. Infatti, ciascun angolo esterno KDF, aggiunto all'angolo interno che gli corrisponde CDE, fa una somma equivalente a due angoli retti; così la somma di tutti gli angoli, tanto esterni quanto interni, vale tante volte due angoli retti, quanti lati ci sono; ma la somma degli angoli interni equivale a tante volte due angoli retti, meno quattro, quanti lati ci sono, dunque la somma degli angoli esterni equivale a quattro angoli retti.

3. Si chiamano *poligoni regolari* quelli di cui tutti gli angoli e tutti i lati sono respettivamente uguali. Si ottiene il valore di un angolo di questi poligoni dividendo la somma degli angoli $(m-2).180^\circ$ per il numero m degli angoli. Ed è con questo metodo che si trova che l'angolo dell'esagono regolare è uguale a

$$\frac{(6-2)\,180^\circ}{6} = \frac{4}{6}\,.\,180^\circ = 120^\circ.$$

4. I poligoni regolari possono essere inscritti o circoscritti al circolo. Questa proprietà che abbiamo dimostrato alla parola Circolo, è feconda in conseguenze importanti che possiamo riassumere come segue.

Se si dividono in due parti uguali tutti gli angoli di un poligono regolare, le rette che faranno queste divisioni, concorreranno tutte in uno stesso punto nel mezzo del poligono; questo punto è il centro del circolo inscritto o circoscritto. In questo modo il poligono sarà diviso in triangoli isosceli uguali tra loro e il cui numero sarà uguale a quello dei suoi lati.

6. Se ai punti di mezzo di tutti i lati di un poligono regolare, si elevano delle perpendicolari, queste perpendicolari concorrono ancora al centro del circolo che possiamo inscrivere o circoscrivere al poligono.

7. Se si divide la circonferenza di un circolo in un numero qualunque di parti uguali, e che si tirino delle corde da un punto di divisione all'altro, si formerà un poligono regolare inscritto al circolo.

8. Ugualmente se si divide la circonferenza di un circolo in un numero qualunque di parti eguali, e che da ciascun punto di divisione si conduca una tangente a questo circolo, queste tangenti, tagliandosi due a due, formeranno un poligono regolare circoscritto al circolo.

9. Tutti i poligoni regolari di uno stesso numero di lati sono simili tra loro.

10. La perpendicolare abbassata dal centro sopra i lati di un poligono regolare, si chiama l'*apotema*; ed è il raggio del circolo inscritto nel poligono, ovvero del circolo al quale il poligono è circoscritto. L'apotema è l'altezza comune di tutti i triangoli isosceli nei quali possiamo dividere il poligono, conducendo delle rette dal centro a tutti i vertici.

Qualunque poligono regolare essendo composto di tanti triangoli isosceli uguali quanti lati vi sono, e la superficie di questi triangoli essendo rappresentata dalla metà del prodotto della sua base, o dal lato del poligono per l'apotema, la superficie totale di tutti i triangoli, vale a dire la superficie di un poligono regolare qualunque è ugale alla metà del prodotto del suo perimetro pel suo apotema.

11. I perimetri di due poligoni regolari di uno stesso numero di lati stanno tra loro nel rapporto dei raggi dei loro circoli inscritti o dei loro circoli circoscritti.

12. Le superficie di due poligoni regolari di uno stesso numero di lati stanno tra loro come i quadrati dei raggi dei circoli inscritti o circoscritti.

13. Il valore del lato di un poligono inscritto essendo dato, possiamo trovare facilmente quello del lato del poligono circoscritto di uno stesso numero di lati, come ancora il valore dei lati dei poligoni inscritti e circoscritti di un numero di lati doppio, con l'aiuto dell'espressioni.

$$C = \frac{c \cdot r}{a} \dots\dots\dots\dots\dots (1),$$

$$c' = \sqrt{\left[2r \cdot \left(r - a\right)\right]} \dots\dots (2),$$

$$C' = \frac{4r \cdot (r - a)}{c} \dots\dots\dots\dots (3),$$

nelle quali c è il lato del poligono dato, a l'apotema di questo poligono, r il raggio del circolo, c' il lato del poligono inscritto di un numero di lati doppio, C, quello del poligono circoscritto di uno stesso numero di lati, e C' il lato del poligono circoscritto di un numero di lati doppio.

Il valore dell'apotema è dato dall'espressiooe

$$a = \sqrt{\left[r^2 - \frac{1}{4} c^2\right]}.$$

Per dimostrare quest'espressioni, sia BC il lato del poligooo inscritto (*Tav.* LVIII, *fig.* 2), EF quello del poligono circoscritto, e AB e GH quelli dei poligoni inscritti e circoscritti di un numero doppio di lati. Conduciamo dal centro le rette che si vedono nella figura, ed avremo a motivo dei triangoli simili IBC, IEF.

$$BC : EF :: ID : IA :: ID : : IC;$$

donde

$$EF = \frac{IC \times BC}{ID},$$

il che è l'espressione (1).

Il quadrato di AB è uguale al prodotto del diametro del circolo per il segmento corrispondente (*Vedi* Circolo) AD; ora

$$AD = AI - ID = IC - ID,$$

così

$$AB = \sqrt{[2 . IC (IC - ID)]};$$

vale a dire l'espressione (2).

Finalmente, i triangoli BDA, IAH sono simili, perchè essi sono tutti due rettangoli, DBA e AIH sono uguali, avendo ciascuno per misura la metà dell'arco AC; così si ha la proporzione

$$BD : AD :: AI : AH,$$

donde

$$AH = \frac{AD \times AI}{BD} = \frac{(IC - ID) . IC}{\frac{1}{2} BC}.$$

ovvero, a motivo di $AH = \frac{1}{2} GH$,

$$GH = \frac{4IC.(IC - ID)}{BC},$$

cioè l'espressione (3).

Quanto al valore dell'apotema, si deduce dal triangolo rettangolo IBD.

14. I triangoli IMA, IBA, IEA, avendo una stessa altezza AM, stanno nel rapporto delle loro basi IM, IB, IE; ma IA che è uguale ad IB, è media proporzionale tra IM ed IE, dunque il triangolo IBA è medio proporzionale tra i triangoli IMA o IBD e IEA; ora questi triangoli IBD, IBA, IEA stanno tra loro come i poligoni di cui fanno parte, dunque *la superficie del poligono inscritto di un numero doppio di lati è media proporzionale tra le superficie dei poligoni inscritti e circoscritti.*

15. Il lato dell'esagono inscritto essendo eguale al raggio (*Vedi* Esagono), quello dell'esagono circoscritto sarà, sostituendo nell'espressione (1) il valore dell'apotema.

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^2}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Ma il perimetro dell'esagono essendo uguale a sei volte il suo lato, si ha per la superficie dell'esagono inscritto

$$\frac{1}{2} 6r . \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} r^2} = \frac{3}{2} . r^2 . \sqrt{3}.$$

e per quella dell'esagono circoscritto, il cui apotema è eguale al raggio del circolo

$$\frac{6r^2}{\sqrt{3}},$$

ora,

$$\frac{3}{2} r^2 \sqrt{3} : \frac{6r^2}{\sqrt{3}} :: 3 : 4.$$

Dunque *la superficie dell'esagono inscritto, è uguale ai tre quarti della superficie dell'esagono circoscritto.*

16. Mediante il teorema del n.° 14, la superficie del dodecagono inscritto è uguale a

$$\sqrt{\left[\frac{3}{2} r^2 \sqrt{3} \times \frac{6r^2}{\sqrt{3}}\right]} = \sqrt{9r^4} = 3r^2,$$

vale a dire a tre volte il quadrato del raggio.

17. Il triangolo, il quadrato, il pentagono e tutti i poligoni che resultano raddoppiando successivamente il numero dei loro lati, sono stati fino a questi ultimi tempi i soli accessibili alla Geometria elementare; ma il Gauss ha fatto vedere nelle sue *disquisitiones arithmeticae*, che questa geometria poteva ancora abbracciare quelli di 17, di 257, di 4097 lati, e generalmente quelli il cui numero di lati è un numero primo compreso sotto la forma generale $2^n + 1$. (*Vedi* l'opera di questo gran geometra, ovvero la *Teoria dei numeri* del Legendre.)

NUMERI POLIGONI. Generalmente s'indica sotto questo nome una serie di numeri formati dall'addizione successiva dei termini di una progressione aritmetica la quale comincia per l'unità, per esempio:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ec.

essendo una tale progressione, le somme consecutive di uno, due, tre, ec., termini di qnesta progressione, o

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, ec.,

sono *numeri poligoni*.

Secondo che la differenza della progressione aritmetica è 1, o 2, o 3, o 4, ovvero ec. I *numeri poligoni* prendono i nomi particolari di *numeri triangolari*, *quadrangolari*, *pentagoni*, *esagoni*, ec.

Ed è così che considerando le progressioni aritmetiche:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	ec.
1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	ec.
1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	ec.
1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37,	ec.
1,	6,	11,	16,	21,	26,	31,	36,	41,	46,	ec.

le loro somme consecutive danno:

Num. triang.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	ec.
Num. quadr.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	ec.
Num. pentag.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	ec.
Num. esag.	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	ec.
Num. eptag.	1,	7,	18,	34,	55,	81,	112,	148,	ec.

La denominazione di *numeri poligoni* sembra essere stata data a questi numeri perchè essi possono essere rappresentati da figure particolari. Così, i numeri triangolari hanno questa proprietà che possiamo disporre in triangolo tanti punti quante unità essi contengono, prendendo un punto per il più piccolo triangolo; ugualmente i punti indicati dai numeri *quadrangolari* o *quadrati* possono disporsi in quadrati, prendendo un punto per il più piccolo quadrato, ec. Per esempio, si ha

```
                    .
          .        . .     ec.
.        . .      . . .
1 ,       3 ,       6 ,    ec.

                  . . .
         . .      . . .    ec.
.        . .      . . .
1 ,       4 ,       9 ,    ec.
```

Se esprimiamo con $m-2$ la differenza della progressione aritmetica, i numeri poligoni che essa produce saranno dell' m^{goni}, e per calcolare quello di questi numeri che corrisponde al posto n, o il cui indice è n, avremo l'espressione generale

$$\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2} \ldots\ldots (a),$$

questa formula rappresentando la somma degli n primi termini della progressione aritmetica. (*Vedi* PROGRESSIONE). Abbiamo dunque in particolare, indicando con x l'ennesimo numero poligono, per i

$$\textit{Numeri triangolari} \ldots\ldots x = \frac{m+n}{2},$$

$$\textit{quadrati} \ldots\ldots x = n^2.$$

$$\textit{pentagoni} \ldots\ldots x = \frac{3n^2-n}{2},$$

$$\textit{esagoni} \ldots\ldots x = \frac{4n^2-2n}{3},$$

ec. ec.

L'indice di un numero poligono, ovvero il posto che esso occupa nella serie, si chiama la sua *radice*. Il Fermat, in una delle sue note sopra Diofante, ha dato diverse regole particolari per trovare la radice di un numero poligono dato, senza aver ricorso all'estrazione della radice quadrata che comprende l'espressione generale,

$$n = \frac{m-4 \pm \sqrt{[8x(m-2)+(m-4)^2]}}{2m-4}$$

che si deduce dall'espressione (a).

Le somme consecutive dei numeri poligoni sono chiamate *numeri piramidali*. (*Vedi* PIRAMIDE).

POLIGONOMETRIA. Ramo della geometria che ha per oggetto i poligoni in generale, come la *trigonometria* ha per oggetto i triangoli in particolare.

Quest'estensione delle regole della trigonometria è dovuta all'Huillier che ha pubblicato a Ginevra, nell'anno 1789, un trattato sopra questo soggetto. Dobbiamo citare il seguente bel teorema che si trova in quest'opera.

Se indichiamo con a, b, c, d, ec., i lati consecutivi di un poligono qualunque e con A, B, C, D, ec., gli angoli ugualmente consecutivi, in modo che A sia l'angolo formato dai lati a e b; B, l'angolo formato dai lati b e c, ec., avremo per il doppio della superficie del poligono, l'espressione

$$\begin{aligned}
& a \cdot b \text{ sen A} - a \cdot c \text{ sen (A+B)} + a \cdot d \text{ sen (A+B+C)} - \text{ec.} \\
& + b \cdot c \text{ sen B} - b \cdot d \text{ sen (B+C)} + b \cdot e \text{ sen (B+C+D)} - \text{ec.} \\
& + c \cdot d \text{ sen C} - c \cdot e \text{ sen (C+D)} + c \cdot f \text{ sen (C+D+E)} - \text{ec.} \\
& + \text{ec.} \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

nella quale tutti i lati debbono essere combinati due a due, eccettuato l'ultimo o quello che viene ad incontrare a. Per esempio, per un quadrilatero, si ha

$$2 \text{ volte la superficie} = \begin{cases} a \cdot b \cdot \text{sen A} \\ -a \cdot c \cdot \text{sen (A+B)} \\ +b \cdot c \cdot \text{sen B.} \end{cases}$$

Per un pentagono

$$2 \text{ volte la superficie} = \begin{cases} a \cdot b \cdot \text{sen A} \\ -a \cdot c \cdot \text{sen (A+B)} \\ +a \cdot d \cdot \text{sen (A+B+C)} \\ +b \cdot c \cdot \text{sen B} \\ -b \cdot d \cdot \text{sen (B+C)} \\ +c \cdot d \cdot \text{sen C.} \end{cases}$$

Vedi. L'Hullier, *Trattato di poligonometria*.

POLINOMIO (*Alg.*). (da πολύς, *più*, e da νομή, *parte*). Quantità algebrica composta di più parti o termini distinti mediante i segni + e —, come A+B—C+D+ ec. Quando non ci sono che due termini, il *polinomio* prende il nome di *binomio*, e quello di *trinomio* quando ve ne sono tre, ec. (*Vedi* Binomio e Trinomio.)

POLISPASTO (*Mec.*). Nome dato da Vitruvio ad una macchina composta di più pulegge, che presentemente si chiama *taglia*. (*Vedi* Puleggia).

POLLUCE (*Astron.*). Nome dato generalmente alla parte posteriore della costellazione dei Gemelli, e in particolare alla bella stella di seconda grandezza che si vede in questa parte.

POLO. In astronomia si dà questo nome alle due estremità dell' asse intorno al quale sembra che giri la sfera celeste, e in geografia alle due estremità dell' asse di rotazione della terra. In generale, i poli di un circolo massimo di una sfera sono i due punti della superficie della sfera egualmente lontani da tutti i punti del circolo. Così:

I poli del mondo, o i *poli dell' equatore*, sono lontani dell' equatore di 90°. Uno di essi dicesi *polo artico*, *settentrionale*, *boreale*, o *polo nord*; ed è quello che è elevato al di sopra del nostro orizzonte. L' altro si dice *polo antartico*, *meridionale*, *australe*, o *polo sud*. I poli della terra hanno respettivamente gli stessi nomi dei poli celesti ai quali corrispondono.

I *poli dell' ecclittica* sono lontani dai poli dell' equatore di una distanza eguale all' inclinazione dell' ecclittica.

Lo *zenit* e il *nadir* sono i poli del *meridiano*.

L' *est* e l' *ovest* sono i poli dell' *orizzonte*. *Vedi* Armillare.

PONENTE (*Astron.*), *Ovest*, *Occidente*. Punto del cielo nel quale il sole tramonta. Queste tre espressioni, che indicano la stessa cosa, sono più particolarmente impiegate, la prima nel discorso ordinario, la seconda dai naviganti, la terza dagli astronomi.

Il punto dell' orizzonte nel quale il sole tramonta variando ogni giorno, si è preso per punto fisso quello nel quale il sole tramonta il giorno dell' equinozio, e che divide per conseguenza in due parti eguali il semicircolo dell' orizzonte compreso tra il nord e il mezzogiorno. Il ponente effettivo differisce tanto maggiormente da questo punto fisso, che dicesi anco *ponente* o *occidente vero*, quanto è più grande la declinazione del sole e l' altezza del polo. Alla distanza tra il ponente vero e il ponente effettivo è stato dato il nome di *Amplitudine*. *Vedi* Amplitudine.

PONTE (*Archit. Idraul.*). Costruzione fatta sopra un fiume, una riviera, un torrente ovvero ancora un fosso, per facilitarne il passo.

Si distinguono due specie di ponti, i *ponti fissi* e i *ponti mobili*. I primi; che si chiamano ancora *ponti dormienti*, sono fabbricati in pietra, in legno o in ferro, situati sopra fondamenti solidissimi, e di cui tutte le parti son legate in modo da non formare che una sola massa capace di resistere per molto tempo alle ingiurie del tempo e a tutte le altre cause di distruzione. I secondi sono costruzioni, ordinariamente in legno, le quali possono essere rimosse a piacere, per dare o rifiutare il passo, come i *ponti levatoj* nelle piazze fortificate, e i *ponti che girono* sopra i canali di navigazione. Esista ancora un' altra specie di ponti il cui uso non è che momentaneo; essa si compone dei *ponti di barche* o *ponti ondeggianti*, che si gettano sopra un fiume per far passare un' armata.

La costruzione dei ponti fissi è una delle parti le più importanti della scienza degl' ingegneri; essa abbraccia una immensità di particolarità teoriche e pratiche la cui esposizione, ancora succintissima, supera i nostri limiti, e d' altra parte esce dal nostro piano. Nell' impossibilità in cui siamo in questo punto di riepilogare il complesso delle conoscenze attuali sopra un genere di costruzione che

al più alto grado interessa il ben'essere pubblico, tenteremo almeno di mettere in grado gli studenti di conoscere le questioni elementari d'idraulica, di geometria e di meccanica, inerenti a questo soggetto, premettendo la teoria e tavola delle Altezze dovute ad una velocità.

S'indica comunemente sotto il nome di *altezza dovuta alla velocità* l'altezza, dalla quale un corpo pesante dovrebbe cadere liberamente per acquistare questa velocità mediante l'effetto della forza di gravità. Quantunque sia facilissimo calcolare l'altezza dovuta a qualunque velocità data, poichè la sua espressione generale è

$$h=\frac{v^2}{2g} \dots\dots (a),$$

nella quale h indica l'altezza, v la velocità, e g la forza di gravità $=9^m,808795$ (*Vedi* Accelerato e Gravità), il grand'uso che si fa di queste quantità nelle questioni di meccanica, ci determina a dare una tavola delle altezze corrispondenti alle velocità, che si presentano le più ordinariamente. Le velocità, da quella di *un centimetro* fino a quella di *dieci metri* per *un secondo sessagesimale* di tempo, vi crescono di centimetro in centimetro, il che è sufficiente per tutti i bisogni pratici; dimodochè, quando una velocità è data, e che il numero che la rappresenta in unità metriche contiene dei millimetri, bisogna cercare semplicemente nella colonna delle velocità il numero che si avvicina più. Per esempio, se la velocità data fosse $2^m,553$, si prenderebbe l'altezza corrispondente a $2^m,55$; se essa fosse $2^m,557$, si prenderebbe l'altezza corrispondente a $2^m,56$. La piccola differenza tra le altezze date con questo metodo dalla tavola e quelle che si otterrebbero mediante la formula (a), sostituendoci il valore esatto della velocità, non può mai indurre in un errore apprezzabile nella pratica. Se si avessero da considerare delle velocità superiori a 10 metri, bisognerebbe calcolare le altezze con la formula (a), alla quale si può dare la forma più comoda per i calcoli

$$h=0,050975 \,.\, v^2 \dots\dots (b),$$

ponendoci invece di $2g$ il valore

$$\frac{1}{2g}=\frac{1}{19,61759}=0,050975.$$

Possiamo ancora servirci della tavola per la questione inversa di trovare *la velocità dovuta ad un' altezza data*. Bisogna allora cercare nella colonna dell'altezze il numero che si avvicina più all'altezza data, e il numero corrispondente, nella colonna delle velocità, è la velocità domandata. Se si trattasse, per esempio, di conoscere la velocità dovuta ad una caduta di $3^m,574$, siccome questo numero è compreso tra i due numeri 3,5711 e 3,5796, i quali si seguono nella colonna dell'altezza, e che esso è più vicino a 3,5711 che a 3,5796, si prenderebbe per la velocità cercata quella che corrisponde a $3^m,5711$, cioè: $8^m,37$. Quando le altezze superano $5^m,098$, bisogna ricorrere alla formula (a), donde si ricava

$$v=\sqrt{2gh},$$

ovvero

$$v=\sqrt{19,61759\ h}.$$

La tavola seguente è quella che il Navier ha dato nelle sue note sul primo volume dell' *Architettura Idraulica* del Bélidor; vi abbiamo corretto alcuni errori di calcolo riprodotti in tutte le opere, ove questa tavola è stata inserita fino a questo punto, e che sono stati indicati dal signor barone di Prony. (*Vedi*, Annali dei Ponti e Argini).

TAVOLA

DELLE ALTEZZE CORRISPONDENTI A DIFFERENTI VELOCITÀ ESPRESSE IN METRI

VELOCITÀ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÀ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÀ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Metri	Metri	Metri
0,01	0,00001	0,44	0,0098	0,87	0,0386
0,02	0,00002	0,45	0,0103	0,88	0,0395
0,03	0,00005	0,46	0,0108	0,89	0,0404
0,04	0,00009	0,47	0,0112	0,90	0,0413
0,05	0,00013	0,48	0,0117	0,91	0,0422
0,06	0,00019	0,49	0,0122	0,92	0,0431
0,07	0,00026	0,50	0,0127	0,93	0,0441
0,08	0,00034	0,51	0,0132	0,94	0,0450
0,09	0,00043	0,52	0,0138	0,95	0,0460
0,10	0,00051	0,53	0,0143	0,96	0,0470
0,11	0,00062	0,54	0,0148	0,97	0,0480
0,12	0,00074	0,55	0,0154	0,98	0,0490
0,13	0,00087	0,56	0,0160	0,99	0,0500
0,14	0,00100	0,57	0,0165	1,00	0,0510
0,15	0,00115	0,58	0,0171	1,01	0,0520
0,16	0,00131	0,59	0,0177	1,02	0,0530
0,17	0,00148	0,60	0,0185	1,03	0,0541
0,18	0,00166	0,61	0,0190	1,04	0,0551
0,19	0,00185	0,62	0,0196	1,05	0,0562
0,20	0,00204	0,63	0,0202	1,06	0,0573
0,21	0,00225	0,64	0,0209	1,07	0,0584
0,22	0,00247	0,65	0,0215	1,08	0,0595
0,23	0,00270	0,66	0,0222	1,09	0,0606
0,24	0,00294	0,67	0,0229	1,10	0,0617
0,25	0,00319	0,68	0,0236	1,11	0,0628
0,26	0,00345	0,69	0,0243	1,12	0,0639
0,27	0,00372	0,70	0,0250	1,13	0,0651
0,28	0,00400	0,71	0,0257	1,14	0,0662
0,29	0,00429	0,72	0,0264	1,15	0,0674
0,30	0,00459	0,73	0,0272	1,16	0,0686
0,31	0,00490	0,74	0,0279	1,17	0,0698
0,32	0,00522	0,75	0,0287	1,18	0,0710
0,33	0,00555	0,76	0,0295	1,19	0,0722
0,34	0,00589	0,77	0,0302	1,20	0,0734
0,35	0,00624	0,78	0,0310	1,21	0,0746
0,36	0,00660	0,79	0,0318	1,22	0,0758
0,37	0,00697	0,80	0,0326	1,23	0,0771
0,38	0,00735	0,81	0,0334	1,24	0,0783
0,39	0,00775	0,82	0,0343	1,25	0,0797
0,40	0,00816	0,83	0,0351	1,26	0,0809
0,41	0,0086	0,84	0,0360	1,27	0,0822
0,42	0,0090	0,85	0,0368	1,28	0,0835
0,43	0,0094	0,86	0,0377	1,29	0,0848

SEGUE LA TAVOLA

VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Metri	Metri	Metri
1,30	0,0861	1,77	0,1597	2,24	0,2557
1,31	0,0875	1,78	0,1615	2,25	0,2580
1,32	0,0888	1,79	0,1633	2,26	0,2603
1,33	0,0901	1,80	0,1651	2,27	0,2626
1,34	0,0915	1,81	0,1670	2,28	0,2649
1,35	0,0929	1,82	0,1680	2,29	0,2673
1,36	0,0943	1,83	0,1707	2,30	0,2696
1,37	0,0957	1,84	0,1726	2,31	0,2720
1,38	0,0970	1,85	0,1745	2,32	0,2743
1,39	0,0984	1,86	0,1763	2,33	0,2767
1,40	0,0999	1,87	0,1782	2,34	0,2791
1,41	0,1013	1,88	0,1802	2,35	0,2815
1,42	0,1028	1,89	0,1820	2,36	0,2839
1,43	0,1042	1,90	0,1849	2,37	0,2863
1,44	0,1057	1,91	0,1859	2,38	0,2887
1,45	0,1072	1,92	0,1878	2,39	0,2911
1,46	0,1086	1,93	0,1898	2,40	0,2936
1,47	0,1101	1,94	0,1918	2,41	0,2960
1,48	0,1116	1,95	0,1938	2,42	0,2985
1,49	0,1131	1,96	0,1958	2,43	0,3010
1,50	0,1147	1,97	0,1978	2,44	0,3034
1,51	0,1162	1,98	0,1998	2,45	0,3060
1,52	0,1177	1,99	0,2018	2,46	0,3085
1,53	0,1193	2,00	0,2039	2,47	0,3110
1,54	0,1209	2,01	0,2059	2,48	0,3135
1,55	0,1225	2,02	0,2080	2,49	0,3160
1,56	0,1241	2,03	0,2100	2,50	0,3186
1,57	0,1257	2,04	0,2121	2,51	0,3211
1,58	0,1273	2,05	0,2142	2,52	0,3237
1,59	0,1289	2,06	0,2163	2,53	0,3263
1,60	0,1305	2,07	0,2184	2,54	0,3289
1,61	0,1321	2,08	0,2205	2,55	0,3315
1,62	0,1337	2,09	0,2226	2,56	0,3341
1,63	0,1354	2,10	0,2248	2,57	0,3367
1,64	0,1371	2,11	0,2269	2,58	0,3393
1,65	0,1388	2,12	0,2291	2,59	0,3419
1,66	0,1405	2,13	0,2313	2,60	0,3446
1,67	0,1422	2,14	0,2334	2,61	0,3472
1,68	0,1439	2,15	0,2356	2,62	0,3499
1,69	0,1456	2,16	0,2378	2,63	0,3526
1,70	0,1473	2,17	0,2400	2,64	0,3553
1,71	0,1490	2,18	0,2422	2,65	0,3580
1,72	0,1508	2,19	0,2444	2,66	0,3607
1,73	0,1525	2,20	0,2467	2,67	0,3634
1,74	0,1543	2,21	0,2490	2,68	0,3661
1,75	0,1561	2,22	0,2512	2,69	0,3688
1,76	0,1579	2,23	0,2535	2,70	0,3716

SEGUE LA TAVOLA

VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Metri	Metri	Metri
2,71	0,3744	3,18	0,5155	3,65	0,6791
2,72	0,3771	3,19	0,5187	3,66	0,6828
2,73	0,3799	3,20	0,5220	3,67	0,6866
2,74	0,3827	3,21	0,5252	3,68	0,6903
2,75	0,3855	3,22	0,5285	3,69	0,6940
2,76	0,3883	3,23	0,5318	3,70	0,6978
2,77	0,3911	3,24	0,5351	3,71	0,7016
2,78	0,3939	3,25	0,5384	3,72	0,7054
2,79	0,3967	3,26	0,5417	3,73	0,7092
2,80	0,3996	3,27	0,5450	3,74	0,7130
2,81	0,4025	3,28	0,5484	3,75	0,7168
2,82	0,4054	3,29	0,5517	3,76	0,7206
2,83	0,4082	3,30	0,5551	3,77	0,7245
2,84	0,4111	3,31	0,5585	3,78	0,7283
2,85	0,4140	3,32	0,5618	3,79	0,7322
2,86	0,4169	3,33	0,5652	3,80	0,7361
2,87	0,4198	3,34	0,5686	3,81	0,7400
2,88	0,4228	3,35	0,5721	3,82	0,7438
2,89	0,4257	3,36	0,5755	3,83	0,7478
2,90	0,4287	3,37	0,5789	3,84	0,7517
2,91	0,4316	3,38	0,5823	3,85	0,7556
2,92	0,4346	3,39	0,5858	3,86	0,7595
2,93	0,4376	3,40	0,5893	3,87	0,7634
2,94	0,4406	3,41	0,5927	3,88	0,7674
2,95	0,4436	3,42	0,5962	3,89	0,7713
2,96	0,4466	3,43	0,5997	3,90	0,7753
2,97	0,4496	3,44	0,6032	3,91	0,7793
2,98	0,4526	3,45	0,6067	3,92	0,7833
2,99	0,4557	3,46	0,6102	3,93	0,7873
3,00	0,4588	3,47	0,6138	3,94	0,7913
3,01	0,4618	3,48	0,6173	3,95	0,7953
3,02	0,4649	3,49	0,6209	3,96	0,7994
3,03	0,4680	3,50	0,6244	3,97	0,8034
3,04	0,4711	3,51	0,6280	3,98	0,8074
3,05	0,4742	3,52	0,6316	3,99	0,8115
3,06	0,4773	3,53	0,6352	4,00	0,8156
3,07	0,4804	3,54	0,6388	4,01	0,8197
3,08	0,4835	3,55	0,6424	4,02	0,8238
3,09	0,4866	3,56	0,6460	4,03	0,8279
3,10	0,4899	3,57	0,6497	4,04	0,8320
3,11	0,4930	3,58	0,6533	4,05	0,8361
3,12	0,4962	3,59	0,6569	4,06	0,8402
3,13	0,4994	3,60	0,6606	4,07	0,8444
3,14	0,5026	3,61	0,6643	4,08	0,8485
3,15	0,5058	3,62	0,6680	4,09	0,8527
3,16	0,5090	3,63	0,6717	4,10	0,8569
3,17	0,5122	3,64	0,6754	4,11	0,8611

SEGUE LA TAVOLA

VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITA	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Metri	Metri	Metri
4,12	0,8653	4,59	1,0739	5,06	1,3051
4,13	0,8695	4,60	1,0786	5,07	1,3103
4,14	0,8737	4,61	1,0833	5,08	1,3155
4,15	0,8779	4,62	1,0880	5,09	1,3206
4,16	0,8821	4,63	1,0927	5,10	1,3258
4,17	0,8865	4,64	1,0974	5,11	1,3311
4,18	0,8906	4,65	1,1022	5,12	1,3363
4,19	0,8949	4,66	1,1069	5,13	1,3415
4,20	0,8992	4,67	1,1117	5,14	1,3467
4,21	0,9035	4,68	1,1164	5,15	1,3520
4,22	0,9078	4,69	1,1212	5,16	1,3572
4,23	0,9121	4,70	1,1260	5,17	1,3625
4,24	0,9164	4,71	1,1308	5,18	1,3678
4,25	0,9207	4,72	1,1356	5,19	1,3730
4,26	0,9251	4,73	1,1404	5,20	1,3784
4,27	0,9294	4,74	1,1452	5,21	1,3837
4,28	0,9337	4,75	1,1501	5,22	1,3890
4,29	0,9381	4,76	1,1549	5,23	1,3943
4,30	0,9425	4,77	1,1598	5,24	1,3996
4,31	0,9469	4,78	1,1647	5,25	1,4050
4,32	0,9513	4,79	1,1695	5,26	1,4103
4,33	0,9557	4,80	1,1744	5,27	1,4157
4,34	0,9601	4,81	1,1793	5,28	1,4211
4,35	0,9646	4,82	1,1842	5,29	1,4265
4,36	0,9690	4,83	1,1891	5,30	1,4319
4,37	0,9734	4,84	1,1941	5,31	1,4373
4,38	0,9779	4,85	1,1990	5,32	1,4427
4,39	0,9824	4,86	1,2040	5,33	1,4481
4,40	0,9867	4,87	1,2090	5,34	1,4535
4,41	0,9913	4,88	1,2139	5,35	1,4590
4,42	0,9958	4,89	1,2189	5,36	1,4645
4,43	1,0003	4,90	1,2239	5,37	1,4699
4,44	1,0048	4,91	1,2289	5,38	1,4754
4,45	1,0094	4,92	1,2339	5,39	1,4809
4,46	1,0140	4,93	1,2389	5,40	1,4864
4,47	1,0185	4,94	1,2440	5,41	1,4919
4,48	1,0231	4,95	1,2490	5,42	1,4975
4,49	1,0276	4,96	1,2541	5,43	1,5030
4,50	1,0322	4,97	1,2591	5,44	1,5085
4,51	1,0368	4,98	1,2642	5,45	1,5141
4,52	1,0414	4,99	1,2693	5,46	1,5196
4,53	1,0460	5,00	1,2744	5,47	1,5252
4,54	1,0507	5,01	1,2795	5,48	1,5308
4,55	1,0553	5,02	1,2846	5,49	1,5364
4,56	1,0599	5,03	1,2897	5,50	1,5420
4,57	1,0646	5,04	1,2948	5,51	1,5476
4,58	1,0692	5,05	1,3000	5,52	1,5532

SEGUE LA TAVOLA

VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Metri	Metri	Metri
5,53	1,5588	6,00	1,8351	6,47	2,1338
5,54	1.5645	6,01	1,8412	6,48	2,1404
5,55	1,5701	6,02	1,8473	6,49	2,1471
5,56	1,5758	6,03	1,8535	6,50	2,1537
5,57	1,5815	o,04	1,8596	6,51	2,1603
5,58	1,5865	6,05	1,8658	6,52	2,1670
5,59	1,5929	6,06	1,8720	6,53	2,1736
5,60	1,5986	6,07	1,8782	6,54	2,1803
5,61	1,6043	6,08	1,8843	6,55	2,1869
5,62	1,6100	6,09	1,8905	6,56	2,1936
5,63	1,6157	6,10	1,8968	6,57	2,2003
5,64	1,6215	6,11	1,9030	6,58	2,2070
5,65	1,6272	6,12	1,9092	6,59	2,2137
5,66	1,6330	6,13	1,9155	6,60	2,2205
5,67	1,6388	6,14	1,9217	6,61	2,2272
5,68	1,6446	6,15	1,9280	6,62	2,2339
5,69	1,6503	6,16	1,9343	6,63	2,2407
5,70	1,6562	6,17	1,9405	6,64	2,2474
5,71	1,6620	6,18	1,9468	6,65	2,2542
5,72	1,6678	6,19	1,9531	6,66	2,2610
5,73	1,6736	6,20	1,9595	6,67	2,2678
5,74	1,6795	6,21	1,9658	6,68	2,2746
5,75	1,6854	6,22	1,9721	6,69	2,2814
5,76	1,6912	6,23	1,9785	6,70	2,2883
5,77	1,6971	6,24	1,9848	6,71	2,2951
5,78	1,7030	6,25	1,9912	6,72	2,3019
5,79	1,7089	6,26	1,9976	6,73	2,3088
5,80	1,7148	6,27	2,0039	6,74	2,3156
5,81	1,7207	6,28	2,0103	6,75	2,3225
5,82	1,7266	6,29	2,0167	6,76	2,3294
5,83	1,7326	6,30	2,0232	6,77	2,3363
5,84	1,7385	6,31	2,0296	6,78	2,3432
5,85	1,7445	6,32	2,0361	6,79	2,3501
5,86	1,7505	6,33	2,0425	6,80	2,3571
5,87	1,7564	6,34	2,0490	6,81	2,3640
5,88	1,7624	6,35	2,0554	6,82	2,3709
5,89	1,7684	6,36	2,0619	6,83	2,3779
5,90	1,7744	6,37	2,0684	6,84	2,3849
5,91	1,7805	6,38	2,0749	6,85	2,3919
5,92	1,7865	6,39	2,0814	6,86	2,3989
5,93	1,7925	6,40	2,0879	6,87	2,4059
5,94	1,7986	6,41	2,0945	6,88	2,4129
5,95	1,8046	6,42	2,1010	6,89	2,4199
5,96	1,8107	6,43	2,1075	6,90	2,4269
5,97	1,8168	6,44	2,1141	6,91	2,4339
5,98	1,8229	6,45	2,1207	6,92	2,4410
5,99	1,8290	6,46	2,1273	6,93	2,4481

SEGUE LA TAVOLA

VELOCITÀ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÀ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÀ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Metri	Metri	Metri
6,94	2,4551	7,41	2,7989	7,88	3,1652
6,95	2,4622	7,42	2,8063	7,89	3,1733
6,96	2,4693	7,43	2,8140	7,90	3,1813
6,97	2,4764	7,44	2,8216	7,91	3,1894
6,98	2,4835	7,45	2,8292	7,92	3,1974
6,99	2,4906	7,46	2,8368	7,93	3,2055
7,00	2,4978	7,47	2,8444	7,94	3,2136
7,01	2,5049	7,48	2,8521	7,95	3,2217
7,02	2,5121	7,49	2,8597	7,96	3,2298
7,03	2,5192	7,50	2,8673	7,97	3,2380
7,04	2,5264	7,51	2,8750	7,98	3,2461
7,05	2,5336	7,52	2,8826	7,99	3,2542
7,06	2,5408	7,53	2,8903	8,00	3,2624
7,07	2,5480	7,54	2,8980	8,01	3,2705
7,08	2,5552	7,55	2,9057	8,02	3,2787
7,09	2,5624	7,56	2,9134	8,03	3,2869
7,10	2,5696	7,57	2,9211	8,04	3,2951
7,11	2,5769	7,58	2,9288	8,05	3,3033
7,12	2,5841	7,59	2,9365	8,06	3,3115
7,13	2,5914	7,60	2,9443	8,07	3,3197
7,14	2,5987	7,61	2,9520	8,08	3,3280
7,15	2,6060	7,62	2,9598	8,09	3,3362
7,16	2,6132	7,63	2,9676	8,10	3,3444
7,17	2,6205	7,64	2,9754	8,11	3,3527
7,18	2,6279	7,65	2,9832	8,12	3,3610
7,19	2,6352	7,66	2,9910	8,13	3,3693
7,20	2,6425	7,67	2,9988	8,14	3,3776
7,21	2,6499	7,68	3,0066	8,15	3,3859
7,22	2,6572	7,69	3,0144	8,16	3,3942
7,23	2,6646	7,70	3,0223	8,17	3,4025
7,24	2,6720	7,71	3,0301	8,18	3,4108
7,25	2,6794	7,72	3,0380	8,19	3,4192
7,26	2,6868	7,73	3,0459	8,20	3,4275
7,27	2,6942	7,74	3,0538	8,21	3,4359
7,28	2,7016	7,75	3,0617	8,22	3,4443
7,29	2,7090	7,76	3,0696	8,23	3,4526
7,30	2,7164	7,77	3,0775	8,24	3,4610
7,31	2,7239	7,78	3,0854	8,25	3,4695
7,32	2,7313	7,79	3,0933	8,26	3,4779
7,33	2,7388	7,80	3,1013	8,27	3,4863
7,34	2,7463	7,81	3,1092	8,28	3,4947
7,35	2,7538	7,82	3,1172	8,29	3,5032
7,36	2,7613	7,83	3,1252	8,30	3,5116
7,37	2,7688	7,84	3,1332	8,31	3,5201
7,38	2,7763	7,85	3,1412	8,32	3,5286
7,39	2,7838	7,86	3,1492	8,33	3,5371
7,40	2,7914	7,87	3,1572	8,34	3,5455

SEGUE LA TAVOLA

VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Metri	Metri	Metri
8,35	3,5541	8,82	3,9654	9,29	4,3993
8,36	3,5626	8,83	3,9744	9,30	4,4088
8,37	3,5711	8,84	3,9834	9,31	4,4183
8,38	3,5796	8,85	3,9925	9,32	4,4278
8,39	3,5882	8,86	4,0015	9,33	4,4373
8,40	3,5968	8,87	4,0105	9,34	4,4468
8,41	3,6053	8,88	4,0196	9,35	4,4563
8,42	3,6139	8,89	4,0286	9,36	4,4659
8,43	3,6225	8,90	4,0377	9,37	4,4754
8,44	3,6311	8,91	4,0468	9,38	4,4850
8,45	3,6397	8,92	4,0559	9,39	4,4945
8,46	3,6483	8,93	4,0650	9,40	4,5041
8,47	3,6570	8,94	4,0741	9,41	4,5137
8,48	3,6656	8,95	4,0832	9,42	4,5233
8,49	3,6743	8,96	4,0923	9,43	4,5329
8,50	3,6829	8,97	4,1015	9,44	4,5425
8,51	3,6916	8,98	4,1106	9,45	4,5522
8,52	3,7003	8,99	4,1198	9,46	4,5618
8,53	3,7090	9,00	4,1289	9,47	4,5715
8,54	3,7177	9,01	4,1381	9,48	4,5811
8,55	3,7264	9,02	4,1473	9,49	4,5908
8,56	3,7351	9,03	4,1565	9,50	4,6005
8,57	3,7438	9,04	4,1657	9,51	4,6102
8,58	3,7526	9,05	4,1750	9,52	4,6199
8,59	3,7613	9,06	4,1841	9,53	4,6296
8,60	3,7701	9,07	4,1934	9,54	4,6393
8,61	3,7789	9,08	4,2017	9,55	4,6490
8,62	3,7876	9,09	4,2119	9,56	4,6588
8,63	3,7964	9,10	4,2212	9,57	4,6685
8,64	3,8052	9,11	4,2305	9,58	4,6783
8,65	3,8141	9,12	4,2398	9,59	4,6880
8,66	3,8229	9,13	4,2491	9,60	4,6978
8,67	3,8317	9,14	4,2584	9,61	4,7076
8,68	3,8405	9,15	4,2677	9,62	4,7174
8,69	3,8494	9,16	4,2771	9,63	4,7272
8,70	3,8583	9,17	4,2864	9,64	4,7370
8,71	3,8671	9,18	4,2958	9,65	4,7469
8,72	3,8760	9,19	4,3051	9,66	4,7567
8,73	3,8849	9,20	4,3145	9,67	4,7666
8,74	3,8938	9,21	4,3239	9,68	4,7764
8,75	3,9028	9,22	4,3323	9,69	4,7863
8,76	3,9117	9,23	4,3417	9,70	4,7962
8,77	3,9206	9,24	4,3511	9,71	4,8061
8,78	3,9295	9,25	4,3615	9,72	4,8160
8,79	3,9385	9,26	4,3710	9,73	4,8259
8,80	3.9475	9,27	4,3804	9,74	4,8358
8,81	3,9565	9,28	4,3898	9,75	4,8458

SEGUE LA TAVOLA

VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE	VELOCITÁ	ALTEZZA DELLE CADUTE
Metri	Metri	Metri	Matri	Metri	Metri
9, 76	4, 8557	9, 85	4, 9457	9, 94	5, 0365
9, 77	4, 8657	9, 86	4, 9557	9, 95	5, 0466
9, 78	4, 8756	9, 87	4, 9658	9, 96	5, 0568
9, 79	4, 8856	9, 88	4, 9758	9, 97	5, 0668
9, 80	4, 8956	9, 89	4, 9859	9, 98	5, 0770
9, 81	4, 9056	9, 90	4, 9960	9, 99	5, 0872
9, 82	4, 9156	9, 91	5, 0061	10, 00	5, 0975
9, 83	4, 9256	9, 92	5, 0162		
9, 84	4, 9356	9, 93	5, 0264		

1. Un ponte di pietra generalmente si compone di diverse grosse fabbriche, le quali sostengono una o più volte sotto le quali l' acqua del fiume scorre.

2. Tra queste grosse fabbriche, quelle che sono stabilite ai due limiti del fiume, come MN ed MN (*Tav.* CCIV, *fig.* 3), portano il nome di *cosce*. Quelle che sono stabilite nel mezzo dell' acque, come AABB, si chiamano *pilastri*.

3. Lo spazio inenrvato che è tra due pilastri o tra un pilastro e una coscia è un *arco*. Si dà ancore il nome di *arco* alla volte essa stessa, la quale è formata di pietre tagliate che si chiamano *peducci*.

I punti A e D, ove comincia la curvatura della volta, si chiamano i *principii* dell' arco. Il peduccio del mezzo della volta porta il nome di *chiave*.

4. Par costruire un arco, si stabilisce tra due pilastri un complesso di armatura di legname chiemato *centina*, la parte superiore della quale è convessa, e presente la stessa superficie curva che quella che deve avere l' arco nella sua concavità. Ed è sopra questa centina che successivamente si stabiliscono i diversi peducci, cominciando da quelli dei principii; l' ultimo che si pone è la *chiave*, e si dice allora che *l' arco* è *legato*. Dopo aver posto la chiave, i peducci che non erano sostenuti che dalla centina ai sostengono gli uni gli altri, e si riempie con una quantità di rottami di pietra gli spazj vuoti CEC, chiamati i *fianchi*, fino al livello MM che si vuol dare all' alzata del ponte.

5. I pilastri della figura 3, dei quali la figura 4, dà il taglio orizzontale, sono semplici prismi a base rettangolare che presentano una faccia piana alla corrente. Ordinariamente si dà loro la forma di un prisma esagonale (fig. 5 e 6), e allora le parte in punta BCB, volteta dalla parte della corrente, riceve il nome di *avanti-becco*; l' altre parte opposta si chiame l' *addietro-becco*.

6. Quando il luogo che deve occupare un ponte è stato fissato da ragioni di convenienza, si presentano tre questioni principali, che esamineramo: 1.° l' apertura che bisogna lasciere al fiume, 2.° la forma dagli archi, 3.° la grandezza degli archi.

7. L' apertura di un ponte, o lo spazio libero che gli archi debbono lasciare al passo dell' acqua, si determina dalla velocità che prenderà naturalmente l' acque sotto questi archi. Se questa apertura è meno grande che la sezione che

aveva il fiume avanti la costruzione del ponte, la velocità dell'acqua sotto il ponte sarà più grande della velocità primiera; se, al contrario, l'apertura è più grande della sezione, la velocità sarà più piccola (*Vedi* Corrente n.° 18.) Il primo caso succede quando il letto primiero del fiume si trova racchiuso dallo stabilimento delle cosce e dei pilastri; il secondo, quando il letto si trova allargato, perchè si sono fatte entrare le cosce nel terreno al di là delle sponde, e che si è tolto da queste sponde uno spazio maggiore di quello che è occupato dai pilastri.

8. Il ristringimento e l' allargamento del letto di un fiume possono presentare l' uno e l' altro gravi inconvenienti.

Allorquando, per un troppo grande ristringimento, le acque sono forzate a prendere bruscamente una velocità molto più grande della loro velocità primiera, si forma un rigurgito al di sopra di ciascun pilastro e una cadota all' ingiù; dimodochè l' acqua reagisce contro il fondo del suo letto, e tende a vuotarlo fino a tanto che esso abbia guadagnato proporzionalmente in profondità ciò che gli si è tolto in larghezza. Ora, il punto essenziale è di evitare che la velocità aumenti tanto, perchè l' acque possono attaccare il fondo del fiume e scavare i fondamenti dei pilastri, dal che dipende una delle principali cause della rovina dai ponti. Da un' altra parte, la diminuzione della velocità primiera cagiona dei depositi di materie o degli adunamenti di fango che diventano pericolosi.

Per poter fissare la sua opinione sopra la velocità che si deve adottare, bisogna esaminare accuratamente la natura dal terreno che compone il fondo del fiume. Se questo terreno è duro e compatto, e che non si abbia punto da temere che il ponte sia scavato, bisogna solamente osservare che l'apertura non sia chiusa al punto di cagionare dei rigurgiti assai considerabili per impedire la navigazione e produrre delle inondazioni nella parte superiore del fiume; se, al contrario, il fondo si componga di una materia che l' acqua possa attaccare facilmente, è necessario di dare all' apertura dimensioni tali che la velocità non sia sensibilmente aumentata.

9. La determinazione dell' apertura di un ponte esige dunque due elementi dei quali non possiamo fissare il valore che mediante esperienze e osservazioni fatte sul luogo ove vogliamo stabilirlo. Questi elementi sono la velocità media dell' acqua in questo luogo, e la velocità media che essa prenderà dopo la costruzione del ponte. Quando questi due elementi son conosciuti, l' area dell' apertura si deduce assai facilmente.

Infatti, si chiami U la velocità media primitiva dell' acqua, e Ω l' area della sezione dal fiume, sezione che si è dovuto, prima di tutto, misurare assai esattamente; la quantità d' acqua che passa nell' unità di tempo dalla sezione Ω, o lo sgorgo di questa sezione (*Vedi* Corrente), è ΩU. Si chiami attualmente v la velocità media che si vuol lasciare all' acqua sotto il ponte, e ω l' area del l' apertura di questo ponte; lo sgorgo della sezione ω, nell' unità di tempo, sarà ωv. Ma le quantità d' acqua che passano nello stesso tempo dalle diverse sezioni di una stessa massa fluida in moto sono uguali; così

$$\Omega U = v\omega,$$

donde si ricava

$$\omega = \Omega \cdot \frac{U}{v}.$$

Basta dunque moltiplicare la sezione primiera Ω per il rapporto delle due velocità per ottenere l' area dell' apertura, che darà la velocità adottata v.

Osserviamo ciò non ostante che l' espressione $v\omega$ dello sgorgo dell' apertura

non è esatta nella pratica; poichè le acque subiscono una contrazione penetrando sotto gli archi che diminuiscono la sezione ω (*Vedi* SGORGO DEI FLUIDI); dimochè la sezione reale dell' apertura non è ω, ma una quantità più piccola, $m\omega$, m essendo un coefficiente di contrazione da determinare per mezzo dell' esperienza. Resulta da quest' osservazione che l' espressione dello sgorgo per la sezione contratta è $mv\omega$, e che in realtà si ha

$$\Omega U = mv\omega$$

relazione che somministra le due espressioni

$$\omega = \Omega \cdot \frac{U}{mv} \ldots\ldots (1),$$

$$v = U \cdot \frac{\Omega}{m\omega} \ldots\ldots (2),$$

la prima delle quali fa conoscere l' apertura per mezzo delle due velocità U e v, e la seconda delle quali può essere impiegata per determinare la velocità che prenderebbero le acque sotto gli archi, nel caso di un valore dato dall' area dell' apertura.

10. Il valore del coefficiente di contrazione m non è ancora conosciuto con una sufficiente esattezza: l' Eytelwein lo stima a 0,855 per i pilastri i cui avanti-becchi presentano in quadrato la loro faccia anteriore alla corrente, e a 0,95 quando essi gli presentano un angolo acuto. Alcune esperienze del Dubuat sembrano indicare, per quest' ultimo caso, il valore $m = 0,91$. Siccome la grossezza dèi pilastri e la forma degli avanti-becchi influisce assai sensibilmente sopra la maniera con la quale si opera la contrazione, questa questione reclama un seguito di osservazioni più esatte e più dirette di tutte quelle che sono state fatte fino a questo giorno.

11. Lasciando da parte la grandezza del rigurgito, sopra la quale ritorneremo quanto prima, la determinazione dell' apertura dipende solamente dalle due velocità U e v, e si trova data dalla formula (1). Prima di tutto si tratta dunque di trovare i valori di queste velocità e principalmente il valore di U, poichè quello di v dev' essere adottato mediante la natura del terreno del fondo del fiume (n.° 8).

Rammentiamoci che U rappresenta la velocità media del fiume alla sezione Ω del suo letto, nel luogo ove si vuole costruire il ponte: ora la sola velocità facilmente da osservarsi è la velocità alla superficie, e sarebbe utilissimo il poter concludere la velocità media da quest' ultima, la cui valutazione diretta presenta grandi difficoltà. Abbiamo riportato in altra parte (CORRENTE) la formula del Dubuat, la quale dà il rapporto della velocità del filo dell' acqua con la velocità media, come pure la formula del signor Prony conclusa dalle stesse esperienze,

$$U = \frac{V(V+2,37187)}{V+3,15312} \ldots\ldots (3),$$

nella quale V indica la velocità del filo dell' acqua. Quest' ultima, della quale possiamo servirci assai utilmente, nei casi ordinari della pratica, si riduce all' espressione semplicissima

$$U = 0,82V \ldots\ldots\ldots (4)$$

per velocità comprese tra i limiti $V = 0$, $V = 3$ metri. Così, dopo aver mi-

surato la velocità del filo dell'acque con un galleggiante (*Vedi* IDROMETRO), sarebbe facilissimo di concludere la velocità media se la formula (3) si estendesse a tutti i casi; ma questa formula suppone che la relazione delle velocità U e V sia indipendente dalla grandezza e dalla figura del letto della corrente, il che non sembra molto ammissibile e non permette di sperare che una determinazione ulteriore dei coefficenti numerici, mediante nuove esperienze, possa mai dargli un grado di certezza più grande. Il signor di Prony, nelle sue *Ricerche sopra la teoria dell'acque correnti*, ha dato la seguente formula, che fa conoscere la velocità media per mezzo del declivio del fiume.

$$U = -0,07 + \sqrt{\left[0,005 + 3233 \frac{\Omega . I}{P}\right]} \ldots\ldots (5).$$

Ω è come sopra, l'area della sezione;

P il perimetro ammollito, o la parte del perimetro della sezione in contatto con la parete contenente il fluido.

I il declivio per un metro.

Quest' equazione suppone essenzialmente che la grandezza della sezione e il valore del declivio siano sensibilmente i medesimi sopra una gran lunghezza del letto, affinchè la velocità media possa considerarsi come costante. In tutti i casi pratici, i quali non si allontaneranno troppo da quest'ipotesi, potremo dunque dedurre il valore della velocità media con una sufficiente esattezza.

12. Il signor di Prony ha determinato i valori dei suoi coefficienti numerici mediante trentuna esperienze, scelte e discusse con molta cura, ma esso non le ha considerate che come provvisorie, e soggette naturalmente a subire delle modificazioni. Dopo, l'Eytelwein, combinando novantuna esperienze fatte sopra diversi canali e fiumi, ha ottenuto altri valori i quali cangiano l'equazione (5) in

$$U = -0,0332 + \sqrt{\left[0,0011 + 2736 \frac{\Omega . I}{P}\right]} \ldots\ldots (6).$$

Abbiamo dato la deduzione di quest'ultima alla parola CORRENTE.

13. Ci rimane da fare un'osservazione importantissima; questa è che l'apertura di un ponte non deve mai essere fissata dalla quantità media di acque che conduce il letto del fiume, ma bensì da quella che esso contiene all'epoca delle grandi acque. Così, la misura della sezione Ω e la determinazione della velocità media U, sia per le formule precedenti, sia con processi diretti, debbono essere effettuate al momento in cui il livello del fiume è giunto alla sua più grande altezza; e, siccome a questo momento le acque sono ordinariamente traboccate, e si estendono dai due lati sopra una gran superficie ove esse corrono lentamente, nel mentre che esse hanno una gran velocità nel mezzo della corrente, ci si esporrebbe a commettere grandi errori nella valutazione della velocità media, se s' impiegassero ciecamente le formule (4) o (6). Bisogna allora scegliere, quando sia possibile, un posto del fiume dove le acque si trovino incassate, o dove nel tempo dell'accrescimento esse non trabocchino sensibilmente; dopo aver misurato accuratamente la sezione del fiume in questo posto e la velocità media corrispondente, si conoscerà l' efflusso di questa sezione, e per conseguenza l'efflusso della sezione nel luogo del ponte progettato; non si avrà dunque che da dividere quest' efflusso per l'area di quest' ultima sezione per conoscere la velocità media cercata, ammettendo ciò non ostante che alcuno affluente non venga ad aumentare la quantità dell' acque tra le due sezioni, poichè in questo caso sarebbe necessario di tener conto dell' aumento dell' efflusso che avrebbe luogo all' ultima sezione.

Sopponiamo, per schiarire la questione, che si progetti un ponte in AB, (*Tav.* CLXXX, *fig.* 1) ove la sezione del fiume è stata trovata di 1200 metri quadrati; il letto non essendo punto incassato e la sua larghezza AB = 400 metri essendo considerabile rapporto alla sua profondità media 3 metri, sarebbe difficile di conoscere la velocità media con una sufficiente esattezza; ma ad una lega al di sopra, in *ab*, il fiume passa tra due scogli a picco, e in questo punto la sua larghezza non è che di 150 metri e la sua altezza media di $4^m,85$. La sua velocità media misurata in *ab* essendo di $4^m,10$ per secondo, ne resulta che l'efflusso per la sezione *ab* è

$$150 \times 4,85 \times 4,10 = 2983 \text{ matri cubi.}$$

Così, se non ci fosse affluente, la velocità media della sezione AB sarebbe

$$U = \frac{2983}{1200} = 2^m,49.$$

Ma, tra le due sezioni AB e *ob*, un piccolo fiume viene a gettare le sue acque nel letto del grande, e si è trovato madiante le misure dalla sua sezione *mn* e della sua velocità media, a questa sezione, che l'efflusso di questo piccolo fiume, vala a dire la quantità d'acqua cha esso versa nel grande, in un secondo di tempo, è di 150 metri cubi. Così, il volume d'acqua che passa in AB per un secondo è uguale a

$$2983 + 150 = 3133 \text{ metri cubi,}$$

il che, per una sezione di 1200 metri quadrati, dà una velocità media

$$U = \frac{3133}{1200} = 2^m,61.$$

Ammettiamo ora che il fondo del fiuma sia composto di materie poco consistenti, e che sia pericoloso ristringere il suo letto; bisognerà, in questo caso, che l'apertura del ponte non aumenti sensibilmente la velocità media $2^m,61$; dimodochè porremo nella formula (1) $v = 2^m,61$ ed avremo, impiegando il coefficiente di contrazione $m = 0,95$, perchè gli avanti-becchi debbono presentare un angolo acuto alla corrente,

$$\omega = 1200 . \frac{2,61}{0,95 \times 2,61} = \frac{1200}{0,95} = 1263 \text{ matri quadrati.}$$

Il ponte progettato dovrà dunque presentare un'apertura di 1263 metri quadrati. Faremo osservare, passando, che se i principii delle volte fossero situati al di sotto dal livello delle grandi acque, bisognerebbe impiegare il più piccolo coefficiente di contrazione $m = 0,85$.

Nel caso, al contrario, in cui il fondo del letto si ravvicinasse alla natura dallo scoglio e si credesse di potere senza pericolo lasciar prendere alle acque, sotto il ponte, una velocità media più grande di $2^m,61$, per esempio, una velocità media di $3^m,50$, il che permette di dare meno sviluppo al ponte e diminuisce le spese del suo stabilimento, si farebbe $v = 3,50$, e la formula (1) darebbe

$$\omega = 1200 . \frac{2,61}{0,95 \times 3,50} = 942 \text{ metri quadrati.}$$

14. Ed è quando vogliamo ristringere il letto del fiume che diviena impor-

tante di considerare, se i rigurgiti non saranno assai considerabili per impicciare la navigazione e produrre delle inondazioni al di sopra del ponte. Il problema da risolvere è dunque quello di trovare l'altezza dei rigorgiti per un valore particolare dell'apertura. Eccone una soluzione, secondo il Dubuat, che può esser utile nella pratica, quantunque diverse circostanze vi sieno trascurate; essa è riportata dal Gauthey nel suo bel *Trattato della costruzione dei ponti.*

Supponiamo che ABCD (*Tav.* CLXXX, *fig.* 6) rappresenti la faccia laterale di un pilestro, ed EF il declivio naturale del fiume avanti la costruzione del ponte. La corrente trovandosi ristretta sopra tutta la lunghezza CD, la velocità e conseguentemente il declivio del fiume saranno più considerabili, e la superficie dell'acqua, facendo astrazione dalle resistenze particolari prodotte dagli avanti-becchi, prenderà un'inclinazione che potrà essere rappresentata dalla linea HL. Questa superficie al di sopra del fiume si eleverà necessariamente al di sopra del punto H, e la rappresenteremo con la linea MG, la quale, sopra una piccola lunghezza, è sensibilmente orizzontale.

Si chiami

Ω l'area della sezione naturale del fiume;

ω l'area della sezione dopo la costruzione del ponte, o la superficie dell'apertura;

U la velocità media dell'acqua;

v la velocità media che prenderà l'acqua sotto gli archi dopo la costruzione del ponte;

I il declivio per un metro del fiume;

L la lunghezza dei pilestri $=$CD o AB;

H l'altezza GK del rigurgito;

g la forza di gravità.

Le velocità, in uno stesso fiume, essendo in ragione inversa dell'area delle sezioni corrispondenti, si avrà

$$v=\frac{\Omega}{\omega}U,$$

e, conseguentemente, le altezze dovute alle velocità U e v saranno respettivamente

$$\frac{U^2}{2g} \text{ e } \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{U^2}{2g}.$$

Ma la parte GH dell'altezza del rigurgito corrisponde all'aumento della velocità; così

$$GH=\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{U^2}{2g}-\frac{U^2}{2g}.$$

Ciò non ostante, siccome il rapporto $\frac{\Omega}{\omega}$ non è esattamente uguale al rapporto inverso delle velocità $\frac{v}{U}$, a motivo della contrazione della vena fluida e degli attriti sopra le pareti degli orifizi, gli sostituiremo la quantità $\mu\frac{\Omega}{\omega}$, nella quale

μ è un coefficiente di correzione da determinare mediante l'esperienza; avremo allora

$$GH = \frac{U^2}{2g}\left(\mu^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1\right).$$

Quanto alla parte KH dell'altezza del rigurgito, essa dipende dal declivio che si formerà sopra la lunghezza dei pilastri: ora, avanti la costruzione del ponte, questo declivio era uguale a L.I; esso deve dunque essere, dopo

$$LI\,\mu^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2},$$

poichè i declivii aumentano nel rapporto delle altezze dovute alle velocità, e resulta

$$KH = LI\,\mu^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} - LI.$$

Prendendo la somma delle due parti GH e KH, avremo definitivamente per l'altezza totale GK = H, alla quale le acque si elevano al di sopra, poichè il loro livello deve restare lo stesso per l'ingiù della corrente

$$H = \left(\frac{U^2}{2g} + IL\right)\left(\frac{\Omega^2}{m^2\omega^2} - 1\right) \ldots\ldots (7).$$

Applichiamo quest'espressione all'esempio precedente, nel caso di un'apertura $= 942^{mq}$, e ammettiamo di più che il declivio I sia stato trovato di $0^m,001$, e che la lunghezza L dei pilastri debba essere di 10 metri. Sostituendo questi valori nell'espressione (7), osservando che l'altezza $\frac{U^2}{2g}$ dovuta alla velocità $U = 2^m,61$ si trova tutta calcolata nelle tavole delle altezze (*Vedi* al principio di quest'articolo), e che essa è uguale a $0^m,3472$; avremo

$$H = (0,3472 + 0,001 \times 10)\left(\frac{(1200)^2}{(0,95)^2 . (942)^2} - 1\right)$$

$$= 0,3572\left[\left(\frac{1200}{894,9}\right)^2 - 1\right] = 0^m,285.$$

Questa grandezza essendo poco considerabile, si potrebbe concluderne che l'apertura adottata è sufficiente; ma, in generale, la formazione di un rigurgito non potendo mai essere che pregiudicevole, è essenzialissimo di renderlo il più piccolo possibile. Se l'altezza trovata H sembrasse troppo grande, bisognerebbe aumentare la sezione ω dell'apertura, e per conseguenza diminuire la velocità v, ovvero prendere per H il valore che si giudicherebbe conveniente e sostituirlo nell'equazione (7) dalla quale si ricaverebbe allora il valore di ω.

15. Quando si tratta solamente di calcolare H e che si vuol fare uso della tavola delle *altezze dovute alle velocità*, possiamo dare all'espressione (7) una forma molto più comoda, sostituendo a $\frac{\Omega^2}{m^2\omega^2}$ il rapporto $\frac{v^2}{U^2}$; viene così

$$H = \left(\frac{U^2}{2g} + IL\right)\left(\frac{v^2}{U^2} - 1\right),$$

e sviluppando il prodotto,

$$H=\left(\frac{v^2}{2g}-\frac{U^2}{2g}\right)+IL\left(\frac{v^2}{U^2}-1\right).$$

Par esempio, con i dati di sopra,

$$v=3^m,50;\quad U=2^m,61;\quad I=0^m,001;\quad L=10^m;$$

non rimane da fare altro calcolo che quello del secondo termine

$$IL\left(\frac{v^2}{U^2}-1\right)=0,01\left[\left(\frac{3,50}{2,61}\right)^2-1\right]=0,00798,$$

poichè la tavola fa immediatamente conoscere

$$\frac{v^2}{2g}=0,6244,\quad \frac{U^2}{2g}=0,3472.$$

Donde

$$H=0,6244-0,3472+0,0798=0^m,285.$$

16. Se, per maggior semplicità, indichiamo con h l'altezza dovuta alla velocità U o il valore della quantità $\frac{U^2}{2g}$, otterremo, ricavando ω dell'equazione (7), l'espressione

$$\omega=\frac{\Omega}{m}\cdot\sqrt{\left[\frac{h+IL}{H+h+IL}\right]}\;\ldots\ldots(8),$$

che farà conoscere l'area dell'apertura per un valore adottato dell'altezza H del rigurgito. Per esempio, sempre nell'esempio precedente dove abbiamo

$$h=\frac{U^2}{2g}=0,3472;\quad \Omega=1200^m;\quad m=0,95;$$

$$I=0^m,001;\quad L=10;$$

se non si volesse che l'altezza del rigurgito passasse $0^m,2$, si farebbe $H=0^m,2$ e si avrebbe

$$\omega=\frac{1200}{0,95}\cdot\sqrt{\left[\frac{0,3472+0,01}{0,2+0,3472+0,01}\right]}$$

$$=\frac{1200}{0,95}\cdot\sqrt{\left[\frac{0,3572}{0,5572}\right]}=1011^{mq}.$$

Così l'area dell'apertura dovrabbe elevarsi a 1011 metri quadrati.

Nel caso in cui si adottasse quest' apertura e che si volesse conoscere la velocità che l'acqua prenderebbe sotto il ponte, bisognerebbe fare $\omega=1011$, e la formula (2) darebbe per questa velocità

$$v=2,61\,.\,\frac{1200}{0,95\times1011}=3^m,26.$$

17. I metodi di calcolo che abbiamo esposti non danno in realtà che valori ap-

prossimati, ma essi sono però utilissimi per stabilire il progetto di un ponte. Quando l'ingegnere ha fissato la grandezza dell'apertura, esso deve procedere alla scelta della forma degli archi, i quali si distinguono in tre specie principali:

1.° Gli archi in *semi-cerchio*, descritti da un semi-circonferenza di circolo (*Tav.* CLXXXI, *fig.* 1);

2.° Gli archi ad *ansa di paniere* (*Vedi* Questa parola), descritti da più archi di circolo con raggi differenti (*Tav.* CLXXXI; *fig.* 3);

3.° Gli archi in *arco di circolo*, i quali sono formati da un solo arco di circolo (*Tav.* CLXXX, *fig.* 2) di un numero più o meno grande di gradi.

Ciascuna di queste specie di archi presenta vantaggi e inconvenienti particolari.

18. Gli archi in semi-cerchio sono i più facili a costruire e quelli che offrono più solidità, ma impediscono considerabilmente il passaggio dell'acqua e cagionano la più gran contrazione della massa fluida. Si pongono ordinariamente i loro principii all'altezza dei fondamenti ovvero al livello AB (*Tav.* CLXXXI, *fig.* 1) delle basse acque, dimodochè, in quest'ultimo caso, l'apertura, al tempo delle grandi acque *ab*, si compone di uno spazio mistilineo C*ab*E, del quale possiamo calcolare l'area nella seguente maniera:

Sia OF$=h$ l'altezza delle basse acque, GF$=h'$ quella delle grandi acque, AB$=2a$ il diametro dell'arco. Facciamo OG$=h'-h=\theta$ e conduciamo il raggio O*a*.

La semi-apertura CA*a*GF sarà composta di un rettangolo CAOF la cui area è uguale ad AO$\times$OF, vale a dire ad *ah*.

Più di un settore di circolo AO*a*, la cui area ha per espressione (*Vedi* Settore)

$$\frac{1}{2}\text{AO}\times\text{arco A}ma,\quad\text{ovvero}\quad\frac{1}{2}a\times\text{arco A}ma.$$

Più finalmente di un triangolo rettangolo *a*GO, la cui superficie è uguale a $\frac{1}{2}a\text{G}\times\text{GO}$. Abbiamo per quest'ultimo

$$a\text{G}=\sqrt{a\text{O}^2-\text{GO}^2}=\sqrt{a^2-\theta^2};$$

così la sua area è rappresentata da

$$\frac{1}{2}\theta\sqrt{a^2-\theta^2}=\frac{1}{2}\theta\sqrt{(a+\theta)(a-\theta)}.$$

Raddoppiando tutte queste quantità per avere l'area intera dell'apertura C*ab*E, avremo dunque, chiamando quest'area S,

$$\text{S}=2ah+\theta\sqrt{(a+\theta)(a-\theta)}+a\times\text{arco A}ma,$$

espressione nella quale tutto è conosciuto, eccettuato l'arco A*ma*, del quale bisogna esprimere la lunghezza in unità lineari della medesima natura di quelle impiegate per misurare il raggio *a*. Per quest'effetto osserviamo che conducendo la perpendicolare $a\text{Q}=\text{GO}=\theta$, il triangolo rettangolo *a*QO dà

$$\text{sen A}ma=\frac{a\text{Q}}{a\text{O}}=\frac{\theta}{a}.$$

Avendo calcolato con l' aiuto di quest' espressione il seno dell' arco Ama, le tavole dei seni faranno conoscere il numero dei gradi dell' arco Ama; e indicando con φ'' il numero dei *secondi* di quest' arco, siccome il numero dei secondi compresi in una semi-circonferenza è 648000, avremo, per la lunghezza dell' arco Ama,

$$\text{arco } Ama = a\pi \frac{\varphi''}{648000},$$

π essendo la semi-circonferenza del circulo il cui raggio $=1$, o il numero 3,1415926. Così l' espressione generale dell' area dell' apertura dell' arco è

$$S = 2ah + \theta\sqrt{(a+\theta)(a-\theta)} + a^2\pi \cdot \frac{\varphi''}{648000} \quad \ldots\ldots (9),$$

nella quale l' arco φ che bisogna esprimere in secondi, è dato dalla relazione

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{\theta}{a}.$$

Tutti i termini di quest' espressione possono valutarsi per mezzo dei logaritmi, il che rende i calcoli semplicissimi.

Siano, per esempio, $AB = 2a = 20$ metri; $OF = h = 1^m,20$; $GO = \theta = 3^m,55$. Si avrà, tenendo conto del raggio delle tavole $=10$,

$$\text{Log sen}\,\varphi = 10 + \text{Log}\,3,55 - \text{Log}\,10 = 9,5502283;$$

questo logaritmo farà conoscere

$$\varphi = 20°47'36'',4;$$

donde

$$\varphi'' = 74856'',4.$$

Avendo così il valore di tutte le quantità che entrano nell' espressione (9), si troverà

$$20 \times 1,20 = 24,$$

$$3,55\sqrt{13,55 \times 6,45} = 33,188,$$

$$100\pi \frac{74856,4}{648000} = 36,292.$$

La somma di questi valori darà definitivamente

$$S = 93^{mq},48.$$

19. Possiamo giungere allo stesso resultamento calcolando separatamente l' area totale CADBE dell' arco, quella del segmento aDb, e prendendo la loro differenza. L' area totale CADBE, che d' altra parte può essere utile conoscere, si compone del rettangolo ACEB e del semi-circolo ADB; essa ha per espressione, conservando le precedenti denominazioni, e indicandola con Π,

$$\Pi = 2ah + \frac{1}{2}a^2\pi \quad \ldots\ldots (10).$$

L'area del segmento aDb è uguale all'area del settore $DaOb$ meno quella del triangolo aOb; per ottenere l'area del settore, bisogna osservare che il triangolo rettangolo OaG dà

$$\cos\psi = \frac{OG}{Oa} = \frac{\delta}{a} \quad \ldots\ldots (11),$$

ψ indicando l'angolo aOD ovvero l'arco aD. Calcolando, per mezzo di questa relazione, il valore di ψ in secondi di grado, si ha inseguito

$$\text{Area del settore } aOD = \frac{1}{2}\,a^2\pi\,\frac{\psi''}{648000},$$

e, per conseguenza,

$$\text{Area del settore } DaOb = a^2\pi\,\frac{\psi''}{648000}.$$

Quanto all'area del triangolo aOb, siccome si conoscono i due lati

$$aO = bO = a$$

e l'angolo compreso $aOb = 2\psi$, si ha immediatamente (*Vedi* Trigonometria).

$$\text{Area del triangolo } aOb = \frac{1}{2}a^2 \,.\, \text{sen}\, 2\psi.$$

Così, l'area del segmento aDb, che indicheremo con Π', avrà per espressione

$$\Pi' = a^2\pi\,\frac{\psi''}{648000} - \frac{1}{2}\,a^2 \,.\, \text{sen}\, 2\psi \quad \ldots\ldots (12),$$

ed avremo, per l'area dell'apertura $CabE$,

$$S = \Pi - \Pi'.$$

Applichiamo queste formule ai dati dell'esempio precedente. Si comincia da avere

$$\Pi = 20 \times 1,20 + \frac{1}{2}\,.\,100 \times 3,1416 = 181^{mq},08.$$

La formula (11) dà

$$\text{Log}\cos\psi = 10 + \text{Log}\,3,55 - \text{Log}\,10 = 9,5502283;$$

donde

$$\psi = 69^{\circ}12'23'',6$$

e

$$\psi'' = 249143'',6.$$

Sostituendo questi valori nella formula (12), osservando che il seno di

$$2\psi = 138^{\circ}24'47'',2$$

è lo stesso di quello del supplemento di quest'arco

$$180^{\circ} - 2\psi = 41^{\circ}35'12'',8,$$

troveremo

$$100 \times 3,1416 \times \frac{249143,6}{648000} = 120,788,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \mathrm{sen}\left(41^{\circ}35'12'',8\right) = 33,188,$$

e per conseguenza,

$$\Pi' = 120,788 - 33,188 = 87^{mq},60.$$

Il valore dell' aperture S è dunque, come sopra

$$S = 181,08 - 87,60 = 93^{mq},48.$$

Possiamo impiegare concorrentemente questi due processi per la verificazione dei calcoli.

20. Gli archi a *ansa di paniere*, l'uso dei quali non si è introdotto in Francia che verso la fine del secolo diciassettesimo, offrono quasi altrettanta solidità e facilità nella costruzione, quanto gli archi in semi-cerchio, quando i loro due diametri non sono molto ineguali. Essi hanno sopra quest' ultimi il vantaggio di dare una più grande apertura, senz' essere obbligati ad aumentare considerabilmente l' altezza. Si formano con 3, 5, 7 o con un maggior numero di archi di circolo, ma è quasi sempre inutile l' impiegare più di cinque archi.

La larghezza e l' altezza di un' ansa di paniere non bastano per determinare la sua forma, poichè è sempre possibile descrivere sopra due diametri dati un'infinità di curve differenti. La sole condizione generale alla quale tutte queste curve sono soggette è, che la tangente al vertice sia orizzontale e che le tangenti all' origini siano verticali. Vengono dati, in tutti i casi particolari, delle condizioni particolari le quali servono a determinare i raggi di ciascun arco.

Quando la volta non è molto schiacciata e che possiamo contentarci di descrivere l' ansa di paniere con tre archi, ci assoggettiamo alla condizione, che i tre archi siano uguali ciascuno alla sesta parte della loro circonferenza respettiva, o siano tutti di 60°, ovvero ancora che i tre raggi differiscano tra loro il meno possibile. Queste due condizioni danno delle curve poco differenti tra loro.

21. Nel primo caso, quello di tre archi di 60°, siano DM (*Tav.* CLXXXI, *fig.* 3) l' altezza dell' arco, CE' la sua larghezza e AB il livello delle origini. Supponiamo l' ansa di paniere descritta, e indichiamo con R il raggio OD dell' arco del vertice C'DC'', con r i due raggi uguali AR e QB dei due altri archi uguali AC' e C''B. La questione si riduce a trovare uno qualunque dei centri R, O, Q; poichè, conoscendo per esempio il centro R, si descriverà da questo punto, col raggio AR un arco AC' di 60°, poi dai punti C' ed R si condurrà la retta C'R, il cui prolungamento taglierà DM in un punto O, che sarà il centro dell' arco C'C''; quanto al terzo centro Q, esso è naturalmente determinato dalla condizione di AR = QB.

Ora, l' angolo C'OC'' essendo di 60°, il triangolo ROQ è equilatero, e si ha

$$RQ = OR;$$

dunque, a motivo di

$$AR = RC'$$

e di

$$OC' = OD,$$

si ha ancora

$$AR+RQ=OR+RC'=ON+ND.$$

Premesso ciò, prendiamo per incognita la distanza RN del centro R al mezzo N di AB, e indichiamo AB con $2a$, e DN con b; avremo

$$RQ=2RN=2x,$$

il triangolo rettangolo ORN ci darà

$$ON=\sqrt{\overline{OR}^2-\overline{RN}^2}=\sqrt{3x^2},$$

donde concluderemo

$$\sqrt{3x^2}+b=x+a,$$

Il valore di x, ricavato da quest' equazione, è

$$x=\frac{1}{2}\left(a-b\right)+\sqrt{\frac{3}{4}\left(a-b\right)^2};$$

possiamo calcolarlo o costruirlo graficamente con molta facilità. Per costruirlo, si prenderà $NF=a-b$, e dopo aver costruito sopra questa base il triangolo equilatero NEF, si abbasserà la perpendicolare EG, poi dal punto G come centro con GE per raggio, si descriverà un arco di circolo che taglierà AB in un punto Q tale, che si avrà $NQ=x$. Il punto Q sarà dunque uno dei centri e servirà a determinare i due altri, come l' abbiamo detto sopra.

22. La descrizione dell' ansa di paniere sottoposta alla condizione di tre archi di 60° non presenta dunque alcuna difficoltà. Per avere il valore dei due raggi OD ed AR o R ed r, bisogna osservare che

$$r=AN-NR=a-x;$$

e che

$$R=OR+RC'=2x+r=a+x.$$

Si ha dunque, dando ad x il suo valore precedente

$$\left.\begin{aligned} r&=\frac{a+b-(a-b)\sqrt{3}}{2} \\ R&=\frac{3a-b+(a-b)\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (13),$$

espressioni nelle quali non rimane che da sostituire in luogo di a e di b i valori relativi a ciascun caso particolare.

23. Se si volesse conoscere l' area dell' arco CADBE', bisognerebbe valutare separatamente l'area del rettangolo ABE'C, quella dello spazio mistilineo AC'DC''B, e prendere la loro somma. Per ottenere l' area AC'DC''B, bisogna osservare che essa si compone di tre settori RAC', OC'C'', QC''B meno il triangolo equilatero ROQ, e siccome ciascun arco è la sesta parte della circonferenza, ciascun settore è il sesto del circolo di cui fa parte. Si ha dunque

$$\text{Settore RC'A ovvero QC''B}=\frac{1}{6}r^2\pi,$$

$$\text{Settore OC'C''}=\frac{1}{6}R^2\pi.$$

Quanto al triangolo ROQ, la sua area ha per espressione

$$\frac{1}{2}\,OR\,.\,OQ\,.\,\text{sen}\,ROQ,$$

il che si riduce a $\frac{1}{4}\left(R-r\right)^2\sqrt{3}$, a motivo di $OR=OQ=R-r$ e di $\text{sen}\,60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (*Vedi* SENO).

Chiamando Π l'area totale CADBE', h l'altezza AC del rettangolo ABE'C e riunendo insieme tutte l'aree parziali, viene

$$\Pi=2ah+\frac{1}{3}r^2\pi+\frac{1}{6}R^2\pi-\frac{1}{4}\left(R-r\right)^2.\sqrt{3}\;.\;.\;.\;.\;.\;(14).$$

24. Per dare un esempio d'applicazione di queste formule, prendiamo in altezza e in larghezza le dimensioni dell'arco in semi-cerchio n.° 18, vale a dire; facciamo AB o $2a=20^m$, DM$=11^m,20$, e supponiamo DN o $b=7^m$, il che ci darà AC o $h=4^m,20$.

Questi valori cominciando a sostituirgli nella formula (13), ci faranno conoscere i raggi r ed R

$$r=\frac{17-3\sqrt{3}}{2}=5^m,90192,$$

$$R=\frac{23+3\sqrt{3}}{2}=14^m,09807,$$

e la loro differenza $R-r=8^m,19615$; quindi, valutando i quattro termini dell'espressione (14), troveremo

$$20\times4,20=84^{mq},00,$$

$$\frac{1}{3}\left(5,90192\right)^2.\,3,1416=36^{mq},48,$$

$$\frac{1}{6}\left(14,09807\right)^2.\,3,1416=104^{mq},07,$$

$$\frac{1}{4}\left(8,19615\right)^2.\sqrt{3}=29^{mq},09,$$

donde si deduce definitivamente

$$\Pi=195^{mq},56.$$

Paragonando con l'area trovata sopra (n.° 19) per l'arco in semi-cerchio della stessa larghezza e della stessa altezza, vediamo che l'arco in ansa di paniere offre 13 metri quadrati di più. Se si trattasse di calcolare l'apertura che quest'ultimo presenta alle grandi acque, la cui altezza supposta è di $4^m,75$, si dividerebbe l'area mistilinea di quest'apertura in rettangoli, triangoli e settori, come l'abbiamo fatto per l'arco in semi-cerchio. Si vede d'altra parte che ponendo l'origini al livello delle grandi acque si ha la più grande apertura possibile, il che possiamo fare con un'ansa di paniere, senza aumentare l'altezza, e solamente abbassandola un poco più, nel mentre che col semi-cerchio questo metodo porta necessariamente un'elevazione di arco che non può adattarsi a tutte le località.

25. Esaminiamo ora il caso in cui si adotta per condizione che i raggi R ed r differiscano il meno possibile. Si chiami sempre la metà dell'apertura dell'arco AN $=a$ (*Tav.* CLXXXI, *fig.* 3), la sua salita DN$=b$, r il raggio AR dell'arco delle origini, e R quello dell'arco del vertice DO. Il triangolo rettangolo ORN dà

$$(R-r)^2=(a-r)^2+(R-b)^2,$$

e tale è, in tutti i casi possibili, l'equazione di condizione tra i raggi incogniti R, r e le quantità cognite a e b.

Risolvendo quest'equazione rapporto ad R, si trova

$$R=\frac{\frac{r}{2}\left(a^2+b^2\right)-ar}{b-r}.$$

Così l'espressione del rapporto dei due raggi è

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)-ar}{br-r^2}.$$

Ora, r dovendo sempre essere più piccolo di R, questo rapporto è un *minimum* quando i due raggi differiscono il meno possibile. Uguagliando perciò a zero la differenziale (*Vedi* MASSIMO) del secondo membro, presa rapporto alla variabile r, si avrà

$$ar^2-\left(a^2+b^2\right)r+\frac{b}{2}\left(a^2+b^2\right)=0,$$

dalla quale, ricavando il valore di r

$$r=\frac{a^2+b^2-(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2a};$$

mettendo questo valore in quello di R, si ottiene

$$R=\frac{a^2+b^2+(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2b}.$$

Possiamo dare a quest'espressione delle forme più semplici moltiplicando i due termini della prima per $\sqrt{a^2+b^2}+\left(a-b\right)$, e i due termini della seconda per $\sqrt{a^2+b^2}-\left(a-b\right)$; fatte tutte le riduzioni e ponendo per abbreviare

$$\sqrt{a^2+b^2}=c,$$

viene

$$\left.\begin{aligned} r&=\frac{bc}{c+(a-b)} \\ R&=\frac{ac}{c-(a-b)} \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ (15).$$

Si costruiscono assai facilmente queste due espressioni conducendo la retta AD, sottraendo da essa la parte $DP=a-b$ ed elevando una perpendicolare CO sul mezzo H del resto AP; i punti R e Q, dove questa perpendicolare taglia i due assi della curva, sono i centri cercati.

26. La valutazione dell'area mistilinea ACDC'B si effettuerà, come l'abbiamo indicato sopra, sottraendo dalla somma dell'aree dei tre settori ARC, COC', C'QB, l'area del triangolo ROQ. Si calcolerà precedentemente il numero dei gradi degli archi AC e CC', per mezzo della seguente relazione, data dal triangolo rettangolo ORN

$$\text{sen RON}=\frac{RN}{OR}=\frac{a-r}{R-r};$$

chiamando φ il valore in gradi dell'angolo RON, si ha

$$\varphi=\text{arco CD}, \quad e \quad 90^{\circ}-\varphi=\text{arco AC},$$

poichè l'angolo RON è la metà dell'angolo COC' e il complemento dell'angolo ARC.

27. Tutte le volte che la salita DN non è più piccola del terzo dell'apertura AB, possiamo contentarci di descrivere l'ansa di paniere con tre archi di circolo; ma negli altri casi, siccome il passaggio da un arco all'altro diventerebbe troppo sensibile, bisogna impiegare cinque archi. *Vedi*, Ansa di paniere.

28. Gli archi in *arco di circolo* sono di una costruzione più facile degli archi in ansa di paniere. L'arco della volta *aDb* (*Tav.* CLXXX, *fig.* 2) è interamente determinato dalla posizione dell'origini e dalla sua freccia DH, poichè un solo arco di circolo può passare per i tre punti *a*, D, *b*.

Questa forma dà un'apertura meno grande dell'ansa di paniere, quando le origini sono immerse nell'acqua; e allora diventa svantaggiosa, così nella maggior parte dei ponti nei quali essa è stata impiegata, si è avuto cura di situare le origini al livello delle grandi acque. Quando è possibile di adottare quest'ultima disposizione, senza che la volta sia troppo abbassata perchè l'opera possa presentare la solidità necessaria, si deve preferire gli archi in arco di circolo a tutti gli altri.

Il calcolo dell'area totale di un tale arco si riduce alla valutazione dell'area del rettangolo *aCEb* e a quella del segmento *aDb*. Si ottiene il raggio DO dell'arco *a*D, per mezzo delle due quantità date *ab* e DH, dall'espressione

$$r=\frac{k^2+f^2}{2f},$$

nella quale

$$r=DO, \quad k=aH, \quad f=DH;$$

ovvero ancora, calcolando in principio l'angolo $aOD=z$, e sostituendo il suo valore dato dall'espressione

$$\tan \frac{1}{2} z=\frac{f}{k},$$

nella formula

$$r=\frac{k}{\text{sen } z}.$$

(*Vedi* Inflessione della retta). Conoscendo il raggio DO, la determinazione dell'area del segmento si effettua come è stato indicato sopra.

Quanto all'area dell'apertura presentata alle grandi acque, essa è quella del rettangolo *a*CE*b*, ed essa è per conseguenza la più grande possibile.

29. Le tre specie di archi che abbiamo considerate sono le sole, delle quali attualmente si faccia uso in Francia. L'ansa di paniere è stata sostituita alla semi-ellisse, la quale offre una curvatura più uniforme e più piacevole all'occhio, ma che ha lo svantaggio di complicare il taglio dei peducci delle volte e di non dare tanta apertura. L'arco gotico ovvero *arco in diagonale*, formato da due archi di circolo (*Tav.* CLXXX, *fig.* 5), non è stato impiegato dai moderni, malgrado la semplicità della sua costruzione e la sua estrema solidità; l'elevazione che esso esige nella strada del ponte, unita alla sua poca apertura, sono inconvenienti i quali sono comparsi più grandi dei suoi vantaggi.

30. La scelta che si deve fare tra le differenti specie di archi non potrebbe essere soggetta a regole generali. La superficie dell'apertura che bisogna dare al fiume, la differenza dei livelli delle più basse e delle più grandi acque, l'altezza alla quale possiamo elevare la superficie del pavimento del ponte, la natura dei materiali che si hanno a sua disposizione e il grado di resistenza del quale essi sono capaci, in una parola, tutte le circostanze locali dovranno essere consultate accuratamente, poichè la forma più conveniente è quella che si accorda meglio con le circostanze.

31. Segue lo stesso della grandezza da dare agli archi, questa questione dipende dalla località; ciò non ostante possiamo stabilire per principio che i grandi archi debbono essere impiegati di preferenza per i fiumi e le grandi riviere, e i piccoli per le riviere tranquille le cui acque non si elevano ad una grande altezza. Col fine di lasciare un passo libero al filo dell'acqua, il numero degli archi dev'essere sempre impari; possiamo fare l'arco del mezzo più grande degli altri, e diminuire progressivamente l'apertura di quest'ultimi, in modo che i due più piccoli uniscano le cosce del ponte; ovvero possiamo fare tutti gli archi uguali tra loro, il che permette di centinargli tutti con i legnami che hanno servito per i due primi. Quest'ultima disposizione aumenta l'altezza delle sponde del ponte, ed ordinariamente obbliga a fare degli argini più considerabili e più dispendiosi. Qualunque sia il partito che si prende sopra ciò, è essenziale di dare agli archi un'altezza sufficiente perchè, nei grandi accrescimenti delle acque, i corpi estranei che il fiume può trasportare trovino un libero sfogo sotto gli archi. Quando gli archi sono uguali, la loro altezza al di sopra delle grandi acque non deve essere minore di un metro; quando esse sono ineguali, quest'altezza può essere di un $1^m,40$ per il più grande, e di $0^m,70$ per i due più piccoli.

32. Le questioni precedenti non sono, per così dire, che preliminari, e quando si è determinato la curvatura degli archi, si presentano tre difficoltà gravissime, che la scienza non può ancora risolvere rigorosamente. Si tratta:

1.° Di fissare la grossezza delle cosce a proporzione della grandezza degli archi e dei pesi che essi debbono sostenere;

2.° Di trovare la larghezza dei pilastri,

3.° E finalmente, di determinare la grossezza delle volte al serraglio.

33. L'ultima questione domina le due prime, poichè la grandezza e la direziona della spinta, e per conseguenza la resistenza che debbono opporre i punti di appoggio dipendono dalla grossezza della volta al serraglio. Ora, supponendo che i peducci delle volte siano incompressibili, che essi siano posti gli uni sopra gli altri senza legature nè calcina, e che la volta non possa prendere alcun ammucchiamento, è evidente che basterebbe per l'equilibrio, che l'altezza del

serraglio fosse abbastanza grande perchè la pietra non si rompesse sotto la pressione che essa avrebbe da sopportare, le cosce avendo d'altra parte la grossezza conveniente. In quest' ipotesi, bisognerebbe calcolare, col processo esposto inseguito, la pressione orizzontale che le due semi-volte esercitano l' una sull'altra; e conoscere la resistenza della pietra che si deve impiegare; l'altezza del serraglio si concluderebbe nella seguente maniera; siano

P la pressione per un metro di lunghezza;

Q la resistenza della pietra per un centimetro quadrato della superficie,

x l'altezza del serraglio, espressa in metri.

La superficie che sopporta la pressione P avendo un metro di lunghezza sopra un'altezza x, ha per espressione $1 \times x$ ossia x^{mq}, ciascun centimetro quadrato di questa superficie, offrendo una resistenza R, la superficie intera offre una resistenza rappresentata da

$$\frac{x^{mq}}{0^{mq},0001}Q;$$

ma questa resistenza deve fare equilibrio alla pressione P, così si ha l'equazione

$$\frac{x}{0,0001}Q=P,$$

donde si deduce

$$x=0,0001\,.\,\frac{P}{Q}.$$

Supponiamo per esempio, che la pressione sia stata trovata di 141000 chilogrammi, e che la volta debba esser costruita in pietra di Saillancourt, la quale si rompe sotto un peso di 2994 chilogrammi sopra 25 centimetri di superficie; siccome non si deve far portare alle pietre (*Vedi* Resistenza) un peso maggiore del *terzo* di quello sotto il quale esse si rompono, si ammetterà che la resistenza sia di $1000^{ch.}$ per 25 centimetri quadrati o di $40^{ch.}$ per un centimetro quadrato, si farà dunque

$$Q=40^{ch.},\quad P=141000^{ch.},$$

e si troverà

$$x=0,0001\,.\,\frac{141000}{40}=0^{m},3525.$$

34. Questa determinazione riposa sopra ipotesi le quali non s' incontrano mai esattamente nella pratica; non si deve dunque considerarla che come un limite al quale possiamo tentare di approssimarci, ma che sarebbe pericoloso di raggiungere. I dati del calcolo precedente son presi dal ponte di Neuilly, che si conta nel numero dei più arditi, e che non ostante ha $1^{m},624$ di altezza al serraglio.

35. Fin qui gl' ingegneri hanno impiegato diverse regole empiriche per determinare la grossezza delle volte. Ecco quella che dà il celebre Perronet, autore del ponte di Neuilly e di più altri non meno osservabili per la loro arditezza. Sia a l'apertura dell'arco espressa in metri, e x l'altezza del serraglio, bisogna fare

$$x=\frac{a}{24}+0^{m},325-\frac{a}{144},$$

vale a dire, sottrarre dal ventiquattresimo dell'apertura, la cento quaranta quattresima parte di questa stessa apertura, e aggiungere 325 millimetri al resto. I resultamenti dati da questa regola si accordano con le altezze impiegate nei ponti conosciuti, sopra tutto per i ponti in semi-cerchio; ma essi differiscono talmente in più da quelli della teoria, che si potrebbero, senza alcun dubbio, eseguire ponti molto più arditi e più leggieri di tutti quelli che sono stati costruiti fino al presente. Tale è almeno l'opinione del Gauthey, al quale si deve accordare una grande autorità in queste materie.

36. La questione della grossezza delle cosce di un ponte non ammette ancora soluzione rigorosa, ma essa è stata considerabilmente resa più chiara dell'esperienze del Gauthey e del Boistard sopra la rottura delle volte. » Quando il serraglio è » stabilito (Gauthey, *Trattato della costruzione dei ponti*) e che sia disfatta la » centina della volta, le parti superiori della volta DE e dE (*Tav.* CLXXX, *fig.* 4) » non sono più sostenute che dalla loro pressione reciproca e in ragione dello sti» vamento che si produce, il loro punto d'appoggio comune, si trova necessaria» mente portato nella parte estrema della volta in E; le commettiture tendono » dunque a serrarsi, come costantemente si è osservato, e alcuni costruttori ag» giungono ancora a quest'effetto, cacciandoci delle biette di legno, il cui og» getto è di aumentare la solidità della volta e nello stesso tempo l'energia » della pressione che queste due parti esercitano l'una sull'altra, e per mezzo » della quale esse si sostengono scambievolmente. »

» Ciò non ostante lo sforzo di questa pressione si riferisce necessariamente verso » le cosce e le parti inferiori della volta, che tende a rovesciare facendole gi» rare intorno delle loro costole esterne K e K. Ciascuna metà della volta si » separa in due parti a certi punti D e d, i quali servono di punti di appog» gio alle parti superiori, e mediante i quali il loro sforzo si trasmette alle co» sce; questi punti di appoggio si trovano necessariamente situati nella faccia » concava degli spigoli delle volte, se le cosce non hanno abbastanza stabilità » per resistere allo sforzo della volta, le quattro parti si sprofondano girando » intorno dei punti K, D, E, d e K. Se esse sono capaci di sostenerlo, l'effetto » dello stivamento si limita a fare riserrare le commettiture della parte esterna » della volta vicino al punto E, e nella faccia concava degli spigoli della volta » vicino ai punti d e D, e a fare aprire la faccia concava degli spigoli della » volta vicino al punto F, e nella parte esterna della volta vicino ai punti d' » e D'. »

Si suppone in questo punto che vi sia una commettitura verticale EF al vertice della volta, nel mentre che ci si trova un peduccio in realtà; ma quest'ipotesi non produce errore sensibile per la determinazione dei punti D e d, che si chiamano i *punti di rottura*, e che principalmente è essenziale di conoscere.

37. Da queste considerazioni, dedotte da un numero di esperienze, possiamo ridurre le diverse parti di una volta ad un sistema di quattro leve KD, DE, Ed, dK, caricate ciascuna dei pesi respettivi delle parti che gli corrispondono, e capaci di girare intorno dei punti di appoggio K, D, E, d, K, dove essi sono legati fra loro con delle cerniere. In questo modo, la questione dell'equilibrio della volta si trova riportata a quella dell'equilibrio di queste leve.

Ora, se i punti N, M, m, n sono quelli dove le leve sono incontrate dalle verticali, che passano per i centri di gravità delle parti corrispondenti della volta, possiamo immaginare che i pesi respettivi di queste parti siano riuniti a questi punti, e siccome la volta si trova divisa in due parti simmetriche dalla verticale EC, basta considerare le due leve KD e DE la prima delle quali, caricata in N, di un peso μ, ha il suo punto di appoggio in K, e la seconda delle quali caricata in M di un peso π, ha il suo punto di appoggio in D.

Infatti, non ci sarà evidentemente niente di cangiato al sistema, se invece del peso π si sostituiscono due altri pesi, l'uno applicato in D e rappresentato da (*Vedi* Resultante)

$$\pi \cdot \frac{EM}{DE}, \text{ ovvero con } \pi \cdot \frac{EF}{EQ},$$

e l'altro applicato in E e rappresentato da

$$\pi \cdot \frac{DM}{DE}, \text{ ovvero con } \pi \cdot \frac{FQ}{EQ}.$$

Ma se si decompone quest'ultimo in due forze, la prima orizzontale

$$\pi \cdot \frac{FM}{EQ} \cdot \frac{DQ}{EQ} \ldots\ldots\ldots (16),$$

e la seconda, agendo nel senso della leva DE,

$$\pi \cdot \frac{FQ}{EQ} \cdot \frac{ED}{EQ},$$

la prima sarà distrutta dalla forza orizzontale uguale ed opposta dall'altra parte superiore Ed della volta, e la seconda sola agirà in D sulla leva KD. Questa leva sarà dunque sollecitata da tre forze differenti, il peso μ che agisce in N, la forza verticale $\pi \frac{EF}{EQ}$ che agisce in D, e finalmente la pressione $\pi \cdot \frac{FQ}{EQ} \cdot \frac{ED}{EQ}$ che agisce in D nella direzione ED. Così, perchè ci sia equilibrio, bisogna che la somma dei momenti di queste tre forze, presa rapporto al punto d'appoggio K, sia nulla (*Vedi* Momento). Abbassando dunque dal punto K delle perpendicolari sopra le direzioni ED, DR, NS, e moltiplicando ciascuna forza per la perpendicolare alla sua direzione, avremo per l'equazione dell'equilibrio

$$\pi \cdot \frac{FQ}{EQ} \cdot \frac{ED}{EQ} \cdot KV = \pi \cdot \frac{EF}{EQ} \cdot KR + \mu \cdot KS.$$

Possiamo dare a quest'equazione una forma più semplice, osservando che la perpendicolare KV è uguale a

$$\frac{KU \cdot DQ - DU \cdot EQ}{ED}.$$

Sostituendo questo valore e riducendo, viene

$$\pi \cdot \frac{FQ}{EQ} \cdot \frac{DQ}{EQ} \cdot KU = \pi \cdot KR + \mu \cdot KS \ldots. (17)$$

Tale è l'equazione generale dell'equilibrio delle volte.

38. L'equazione (17) offre il mezzo diretto di determinare la grossezza delle cosce quando si conosce la posizione dei punti di rottura D e d; ma essa dà luogo a calcoli complicatissimi per cui non è quasi possibile d'insegnare il metodo generale altrimenti che con esempi. Sceglieremo il presente come il più semplice e il più proprio a servire di guida.

Sia (*Tav.* CLXXX, *fig.* 3) KBDGEK la metà di una volta in arco di circolo, avente un'apertura 2BC ovvero 2DQ di venti metri e una grossezza EG al

serraglio di un metro. Supponiamo di più DB di 5 metri e l' arco DG di 30 gradi.

In un arco di questa specie, i punti di rottura sono alle origini; così la posizione del punto D è conosciuta, ed è facile di trovare la lunghezza di tutte le linee della figura. Le quantità da cercare, che entrano nell'equazione dell' equilibrio, sono: π, μ, FQ, DQ, EQ, KR, KS; e siccome in questo caso KR si confonde con BK, che FQ fa conoscere EQ, e che

$$DQ = BC = 10^{m},$$

non rimane da valutare che π, μ, FQ e KS.

Consideriamo in primo luogo la parte che agisce della volta compresa nella figura EHIDG. Questa parte si trova decomposta dalle linee orizzontali IC e *b*G e dalla verticale *a*D in due rettangoli *ab*GE ed HIC*a*, un triangolo rettilineo IDC e un triangolo mistilineo *b*DG. Per avere la sua area totale, bisogna dunque calcolare separatamente le aree di queste diverse figure.

Ora, nel triangolo rettangolo IDC si ha

$$ID = EG = 1^{m}$$

e l'angolo

$$IDC = \text{angolo } DOE = 30^{o};$$

questi dati fanno trovare

$$IC = 0^{m},5 \quad e \quad DC = 0^{m},87;$$

si conosce inoltre *b*D uguale al seno-verso

$$GQ = 2^{m},68;$$

così tutti i lati delle figure sono conosciuti, e si trova

Area del rettangolo *ab*GE	=	$10^{mq},000$
Area del rettangolo HIC*a*	=	1 ,407
Area del triangolo IDC	=	0 ,217
Area del triangolo mistilineo D*b*G	=	8 ,678
Area totale	=	$20^{mq},302$

L'area del triangolo mistilineo D*b*G si ottiene sottraendo l'area del segmento DG*m* da quella del triangolo rettangolo DG*b*.

Per trovare ora il peso della parte agente della volta per un metro di lunghezza, bisognerebbe moltiplicare l'area che abbiamo ottenuta per il peso del metro cubo dei materiali impiegati alla sua costruzione, ma siccome abbiamo solamente bisogno di conoscere, per l'oggetto della nostra ricerca, il rapporto dei pesi delle due parti della volta e siccome questi pesi stanno tra loro come le aree, possiamo porre

$$\pi = 20^{mq},302.$$

Questo valore di π ci farà trovare MF o la distanza del peso della parte agente della volta alla linea EC, osservando che il momento di π rapporto ad EC, vale a dire, il rapporto dell'area HIDGE per la distanza del suo centro di gravità all' asse EC, è eguale alla somma dei momenti di tutte le aree componenti. Cal-

colando dunque, per ciascuna dell'aree, la distanza del suo centro di gravità, formeremo il seguente prospetto:

Indicazione delle Figure	Area delle Figure	Distanza dei centri di gravità alla linea EC	Momenti rapporto alla linea EC
	met. quadrati	metri.	metri quadrati
Rettangolo *ab*GE	10,000	5,00	50,000
Rettangolo HI*ca*	1,407	10,25	14,422
Triangolo IDC	0,217	10,17	2,207
Triangolo mistilineo D*b*G	8,678	7,53	65,345
Somme	20,302		131,974

Abbiamo in conseguenza,

$$FM \times 20,302 = 131,974,$$

donde

$$FM = \frac{131,974}{20,302} = 6^{m},50.$$

È facile di concluderne, a motivo della proporzione

$$DQ : MF = EQ : EF,$$

i valori

$$EF = 2^{m},39 \quad \text{ed} \quad FQ = EQ - EF = 1^{m},29.$$

Procediamo ora al calcolo della parte resistente della volta compresa nella figura KKBDIH. Questa figura è divisa in un rettangolo ABD*d*, un triangolo *d*DI e un rettangolo KKAH. Tutti i lati sono conosciuti, eccettuato KA, il cui valore dipende da BK mediante la relazione

$$KA = BK - AB = BK - 0^{m},5;$$

così, indicando BK con x, la superficie del rettangolo KKAH sarà espressa da

$$8,68(x - 0,5) = 8,68x - 4,34.$$

Quanto alle due altre due figure, ne formeremo senza difficoltà il seguente prospetto.

INDICAZIONE DELLE FIGURE	AREE DELLE FIGURE	DISTANZE DEI CENTRI DI GRAVITÀ ALLA LINEA aB	MOMENTI RAPPORTO ALLA LINEA aB
	met. quadrati.	metri.	metri quadrati
Rettangolo ABDd	2,500	0, 25	0, 625
Triangolo IDB	0, 217	0, 33	0, 072
Somme.	2,717		0, 697

L'area della figura ABDI è dunque di 2,717 metri quadrati, e la distanza del suo centro di gravità alla linea aB è $\frac{0,697}{2,717} = 0^m,26$; la superficie totale della parte resistente è, in conseguenza,

$$\mu = 2,717 + 8,68x - 4,34$$
$$= 8,68x - 1,623,$$

e siccome KS rappresenta nella figura la distanza del centro di gravità di μ alla linea KK, se prendiamo i momenti rapporto a quest'ultima linea, avremo, osservando che la distanza del centro di gravità dell'area ABDI alla linea KK è $x - 0,26$

$$\mu . KS = 2,717 (x - 0,26) + (8,68x - 4,34) \frac{x - 0,5}{2}.$$

Sostituendo nell'equazione dell'equilibrio (17) i differenti valori che abbiamo trovati, essa diventa

$$20,302 . \frac{1,29 \times 10}{(3,68)^2} . 5 = 20,302x + 2,717 (x - 0,26)$$
$$+ (4,34x - 2,17)(x - 0,5),$$

il che si riduce a

$$4,34x^2 + 18,679x = 96,216.$$

Se ne dedurrà, per il valore dell'incognita x o BK, $3^m,02$. Questo calcolo effettuato con un maggior numero di decimali in tutte le quantità dà

$$BK = 2^m,95.$$

39 La determinazione delle distanze dei centri di gravità non presenta alcuna difficoltà fintantochè si tratta di figure rettilinee, le quali in questi casi sono sempre rettangoli o triangoli rettangoli; basta non dimenticare che il centro di gravità di un rettangolo è al punto ove le sue diagonali si tagliano, e che quello di un triangolo qualunque è al punto d'intersezione delle rette condotte dai suoi vertici ai mezzi dei lati opposti. Dimodochè la distanza del centro di gravità di un rettangolo a uno dei suoi lati è la metà del lato adiacente, e che la distanza del centro di gravità di un triangolo rettangolo a uno dei lati del-

l'angolo retto è il terzo dell'altro lato dell'angolo retto. Quanto ai triangoli mistilinei, il calcolo è molto penoso, e nelle volte ad ansa di paniere, dove siamo obbligati formarne più, è utile ricorrere alle costruzioni grafiche le quali, quando le figure son tracciate accuratamente, possono dare sufficienti approssimazioni. Il processo più semplice consiste a condurre nell'interno di un triangolo mistilineo una serie di linee parallele ad uno dei lati rettilinei, di dividerle tutte in due parti ugnali e di far passare una curva per tutti i punti di divisione; si ricomincia la stessa operazione rapporto all'altro lato rettilineo, e il punto d'intersezione delle due curve è il centro di gravità del triangolo. Ecco d'altra parte, il calcolo rigoroso.

Il triangolo mistilineo $bDmG$ (*Tav.* CLXXX, *fig.* 3), è ciò che rimane del triangolo rettangolo bDG, quando se ne sottrae il segmento di circolo DGm, e, per conseguenza, il suo momento rapporto all'asse EC è la differenza dei momenti di queste due ultime figure rapporto allo stesso asse. Ora, la superficie del triangolo rettangolo bDG è

$$\frac{1}{2}bD \,.\, bG = \frac{1}{2} \,.\, 2,6795 \times 10 = 13,3975,$$

e la distanza del suo centro di gravità alla linea EC è uguale ai $\frac{2}{3}$ di bG si ha 6,6667; il suo momento è dunque $= 89,3167$.

La superficie del segmento DGm, ottenuta prendendo la differenza dell'aree del settore $DOGm$ e del triangolo DGO è $= 4^{mq},7198$. La distanza del suo centro di gravità al centro O, misurata sul raggio che passa per questi due centri e che divide l'arco DmG in due parti ugnali, ha per espressione generale

$$\frac{1}{12} \,.\, \frac{C^3}{A},$$

C indicando la corda e A l'area del segmento; si trova per questo valore $19^{m},5913$, ed è facile concluderne che la distanza del centro di gravità del segmento all'asse $EC = 5,0707$; donde si ottiene, per il suo momento, 23,9323. Il momento del triangolo mistilineo è dunque

$$89,3167 - 23,9323 = 65,3844,$$

e siccome la sua area è uguale $8^{mq},6777$, ne resulta che la distanza del suo centro di gravità all'asse EC è

$$\frac{65,3844}{8,6777} = 7,5348.$$

Nei calcoli precedenti, l'abbiamo fatto solamente $= 7,53$.

40. La grandezza della pressione orizzontale che le due semi-volte esercitano l'una sull'altra entra come parte costituente negli elementi della valutazione delle cosce, dimodochè questa grandezza si trova conosciuta senza calcoli ulteriori. Infatti, la sua espressione (n.° 37)

$$\pi \,.\, \frac{FQ}{EQ} \,.\, \frac{DQ}{EQ}$$

è il coefficiente di KU nel primo membro dell'equazione d'equilibrio (17); il

suo valore numerico, con i dati del nostro esempio, è

$$20,302 \cdot \frac{1,29 \times 10}{(3,68)^2} = 19^{m\gamma},339,$$

e non si tratta più che di moltiplicare questa quantità per il peso del metro cubo della pietra impiegata, per avere la grandezza assoluta della pressione orizzontale per un metro di lunghezza. Ammettendo che questa pietra sia quella di Saillancourt, il cui metro cubo pesa 2261 chilogrammi, si avrebbe per lo sforzo reciproco delle due semi-volte

$$2.61 \times 19,339 = 43725 \text{ chilogrammi.}$$

Si vede che la grossezza della volta al serraglio è uno degli elementi che entrano nella determinazione della pressione orizzontale, e che la regola data n.° 33 non ha altra utilità che di far conoscere, se la lunghezza adottata per il serraglio conviene alla resistenza particolare della pietra impiegata.

41. I diversi calcoli che abbiamo indicati, come pure tutte le applicazioni dell'equazione d'equilibrio (17) riposano sopra la determinazione precedente dei punti di rottura, determinazione che la teoria sola non può ancora dare e per la quale bisogna ricorrere all' esperienza. Così, quando si tratta di stabilire un progetto d'arco, bisogna, dopo aver tracciato la sua curva, fare differenti ipotesi sopra la posizione del punto D (*Tav.* CLXXX, *fig.* 4) e per ciascuna calcolare il valore corrispondente di BK, regolandosi d'altra parte sopra i resultamenti d'esperienza e con l'esempio dei ponti conosciuti, la cui forma si avvicina a quello che si progetta. Il più gran valore di BK sarà quello che si dovrà adottare, e la posizione del punto di rottura sarà determinata dal valore corrispondente dell' arco BD. Il Gautbey dà il seguente prospetto, il quale contiene i resultamenti di questi calcoli per le volte le più frequentemente impiegate:

INDICAZIONE DELLE SPECIE DI VOLTA	GROSSEZZA DELLE COSCE	POSIZIONE DEI PUNTI DI ROTTURA
	Metri	gradi
Semi-cerchio	0, 45	27
Ansa di paniere schiacciata al terzo. .	0, 66	45
Ansa di paniere schiacciata al quarto .	0, 82	54
Arco di circolo di 60° elevato sopra pilastri di 5 metri di altezza. . . .	2, 95	0

Questi numeri si riferiscono a volte i cui spigoli son pari dalla parte di fuori del livello, di 20 metri di apertura e di un metro di grossezza al serraglio. I numeri di gradi compresi nell' ultima colonna sono contati a cominciare dalle origioi, e sul piccolo arco nell' anse di paniere, supponendo queste anse di paniere descritte con tre archi ugnali ciascuno al sesto della circonferenza.

42. Questi resultamenti, in quanto riguarda la grossezza delle cosce, sono assai inferiori alle dimensioni adottate dai migliori architetti; ma siccome la teoria suppone che le diverse parti delle volte siano perfettamente legate tra loro e non possano provare alcuno ammucchiamento, non dobbiamo maravigliarci di ve-

dere che l'esperienza reclama delle grossezze più forti. Questa teoria suppone inoltre che la rottura delle volte non può aver luogo, che quando le loro cosce girano intorno della loro costola esterna; e ciò non ostante potrebbe succedere che la parte superiore strisciasse sopra la parte inferiore e che si facesse una disgiunzione orizzontale. La resistenza che la coscia oppone a questa seconda specie di moto dipende in gran parte dall'aderenza degli smalti e dagli attriti, dei quali non è facile valutare gli effetti.

Resulta ciò non ostante dall'esperienze del signor Boistard che l'aderenza dello smalto è proporzionale alla superficie, e che essa può valutarsi mediamente a 6960 chilogrammi per metro quadrato per lo smalto di calcina e rena, e a 3700 chilogrammi per lo smalto di calcina e calcistruzzo. Il valore di questa aderenza varia pochissimo col tempo; essa è quasi la stessa dopo il primo mese che dopo diversi anni. La superiorità dello smalto di rena sopra quello di calcistruzzo non ha più luogo, quando questi smalti sono impiegati sotto l'acqua, in quest'ultimo caso, lo smalto di calcistruzzo contrae assai prontamente una forte consistenza, nel mentre che lo smalto di rena rimane allo stato molle. Il signor Boistard ha ugualmente trovato che il rapporto dell'attrito alla pressione è una quantità costante, e che questo rapporto, per una pietra appuntata o scalpellata, strisciando sopra una pietra simile o sopra una superficie dello smalto indurita all'aria, è mediamente di o, 76.

Introducendo questi dati nella questione trattata sotto il punto di vista di una disgiunzione orizzontale, si giunge all'equazione d'equilibrio

$$\pi \cdot \frac{FQ}{EQ} \cdot \frac{DQ}{EQ} = 6960 \, . \, KR + 0,76(\pi + \mu),$$

la quale dà risultamenti più vicini dei valori adottati dai costruttori; se non si tien conto della pressione verticale resultante dal peso delle parti superiori della volta, l'equazione d'equilibrio si riduce a

$$\pi \cdot \frac{FQ}{EQ} \cdot \frac{DQ}{EQ} = 6960 \, . \, KR + 0,76\,\mu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

In queste due ultime, le quantità π e μ non possono più considerarsi come semplici aree, a motivo del peso assoluto 6960 il quale entra nel termine relativo all'aderenza dello smalto, ma possiamo loro conservare questa significazione introducendo il peso specifico della pietra, ovvero il peso del suo metro cubo. Indicando con δ questo peso, l'equazione (18) diventa

$$\pi\delta \cdot \frac{FQ}{EQ} \cdot \frac{DQ}{EQ} = 6960 \, . \, KR + 0,76\,\delta\,\mu \; . \; . \; . \; . \; (19),$$

e allora π rappresenta l'area della parte agente della volta e μ l'area della parte resistente. Quest'equazione, applicata al calcolo di volte simili a quelle del prospetto precedente, supponendo che la disgiunzione si faccia sempre al livello delle origini, e prendendo per il peso del metro cubo del fabbricato il numero di 2600 chilogrammi, ha dato al Gauthey i seguenti resultamenti:

INDICAZIONE DELLE SPECIE DI VOLTE	GROSSEZZA DELLE COSCE	POSIZIONE DEI PUNTI DI ROTTURA
.	metri	gradi
Semi-cerchio	1,32	13° 30′
Ansa di paniere schiacciata al terzo. .	1,62	31° 30′
Ansa di paniere schiacciata al quarto.	2,24	40° 30′
Arco di circolo di 60°	3,09	0° 0′

Le grossezze delle cosce di questo prospetto sono ancora al di sotto delle dimensioni ordinarie; ma ammettendo che sia essenziale di aumentarla nella pratica, ciò non ostante resulta che le regole empiriche dei costruttori danno generalmente grandezze troppo considerabili.

43. L'ultima questione della quale dobbiamo dire alcune parole è quella della grossezza dei pilastri. Questa grossezza può essere determinata in due differenti maniere, secondo che si destinano i pilastri a sostenere semplicemente il peso degli archi, ovvero a servire di cosce ed a resistere alla spinta delle volte. Nei ponti le cui volte debbono essere centinate l'una dopo l'altra, sarebbe forse imprudente di non dare a ciascun pilastro la forza necessaria per fare l'ufizio di coscia; ma ammettendo del tutto che un largo pilastro è sempre più vantaggioso di uno stretto sotto il rapporto della solidità, siccome esso cagiona una più grande contrazione dell'acqua, è almeno vantaggioso di ridurre le sue dimensioni fintanto che sia strettamente necessario. Quando lo scopo di un pilastro è unicamente di portare il peso degli archi, la resistenza della pietra che deve entrare nella sua costruzione è la cosa principale alla quale bisogna aver riguardo. Dobbiamo rimandare per tutte le particolarità della pratica, all'opere speciali. *Vedi* il Gauthey, *Trattato della costruzione dei ponti*, — il Boistard, *Esperienze sopra la mano d' opera di differenti lavori*; — il Perronet, *Opere complete*; il Frezier, *Taglio delle pietre*; il Rondelet, *Trattato dell' arte di fabbricare*.

PONTI SOSPESI. La costruzione dei ponti murati è generalmente assai dispendiosa e inoltre presenta difficoltà e pericoli che sempre non possiamo superare. In certe località, la necessità di accumulare masse enormi nel seno di fiumi larghi e rapidi, porta delle spese accessorie di trasporto e di mano d'opera grossa, le quali sempre formano la più gran parte della spesa totale. Così, dopochè l'imponente bisogno di comunicazioni pronte e facili ha fatto costruire un gran numero di ponti in luoghi, dove l'uso della pietra sola era assorbito da capitali troppo considerabili, si è dovuto cercare e impiegare diverse disposizioni più o meno vantaggiose sotto il rapporto dell'economia e della solidità. Il legno ha cominciato ad essere messo in opera, tanto solo, quanto combinato con la pietra; poi gli è stato sostituito il ferro; ma non è che recentemente ebe l'uso di questo metallo ha acquistato il più alto grado di utilità mediante lo sviluppo del sistema dei ponti sospesi, sistema i cui numerosi vantaggi sono ora incontestabili.

L'idea di aprire una strada di comunicazione, sospendendo con corde e catene un pavimento a dei punti di appoggio superiori, non è nuova; si trova in uso, per il passaggio dei torrenti e delle valli alte, alle Grandi-Indie, in China

e nell' America meridionale; ciò non ostante non è più di quarantadue anni che il primo ponte sospeso capace di dare il passo alle vetture è stato costruito agli Stati Uniti dal signor Finley. Il successo di questa costruzione e di un gran numero di altre simili eseguite nello stesso paese, avendo richiamato l'attenzione degli ingegneri inglesi, si vide bentosto elevarsi in Inghilterra e in Scozia più ponti sospesi la cui utilità non tardò ad essere apprezzata dal governo Francese. Nel 1821, la direzione dei ponti e argini incaricò il Navier di esaminare i vantaggi e gl'inconvenienti di questo nuovo sistema, e di raccogliere i documenti necessari per completarlo e introdurlo in Francia. Dopo due viaggi in Inghilterra questo sapiente consegnò i risultamenti delle sue numerose ricerche in una memoria assai degna di osservazione, che l'Accademia delle Scienze di Parigi ha giustamente considerato come un trattato altrettanto nuovo che completo sulla materia, e del quale non sapremmo troppo raccomandare lo studio ai costruttori. Le seguenti nozioni sono destinate a facilitare ad essi l'intelligenza di questo bel lavoro.

1. Un *ponte sospeso* si compone di un pavimento orizzontale, o quasi orizzontale, MN (*Tav.* CLXXXI, *fig.* 4) sospeso con degli stipiti verticali AM, am, $a'm'$, ec., a delle catene AB curve e flessibili, le cui estremità A e B sono attaccate a punti fissi.

Si vede facilmente che in un tal sistema si deve considerare:

1.° La figura della curva che deve prendere la catena AB in virtù del peso di cui essa è caricata;

2. Gli sforzi esercitati ai punti d'appoggio A e B, sforzi ai quali questi punti debbono opporre una sufficiente resistenza;

3.° Le modificazioni portate nella curvatura delle catene per i sopraccarichi momentanei dovuti al passaggio delle vetture e dei pedoni;

4.° La resistenza delle catene, tanto al peso permanente del ponte quanto ai sopraccarichi accidentali.

2. Se il peso sostenuto dalla catena AB, supposta inestensibile e perfettamente flessibile, fosse distribuito uniformemente sopra la sua lunghezza; essa si troverebbe nello stesso caso come se ella fosse unicamente caricata col suo proprio peso, e la sua figura, quando l'equilibrio fosse stabilito, dovrebbe essere quello della curva *catenaria* (*Vedi* Questa parola); ma ammettendo, il che ha luogo nel più gran numero dei casi, che il pavimento sia orizzontale e che tutte le sue parti siano uguali tra loro, o che il peso dell'unità delle lunghezze sia da pertutto lo stesso, il carico della catena può giudicarsi distribuito uniformemente sopra una linea orizzontale, poichè il suo proprio peso e quello degli stipiti di sospensione non formano mai che una piccola parte del carico totale. Cominciamo da esaminare, qual sarà la forma della curva in quest'ultima ipotesi, che possiamo prendere per base dei calcoli che servono ai progetti dei ponti sospesi.

3. Sia AOB la catena (*Tav.* CLXXXI, *fig.* 6), A e B i suoi punti d'attacco, che, per maggior semplicità, cominceremo dal supporre situati in una stessa linea orizzontale AB, ed MN la linea orizzontale, ovvero il pavimento, sul quale il carico è uniformemente distribuito. Il sistema essendo supposto in equilibrio e la catena avendo preso la forma, che deve avere in virtù del peso del quale essa è caricata, è evidente che niente sarà cangiato nelle condizioni d'equilibrio, se si sostituisce al punto d'attacco B una forza uguale ed opposta allo sforzo che la catena esercita contro questo punto, ovvero ancora, se invece di questa forza si pongono le sue componenti verticale e orizzontale, che rispettivamente indichiamo con P e Q. Premesso ciò, prendiamo il punto A per origine dell'ordinate verticali y della curva AOB e delle sue ascisse orizzontali x, che conteremo sopra la retta AB.

La tensione particolare sopportata da un elemento qualunque mm' della curva, considerata come una forza agente al punto m nella direzione di quest' elemento, o in quello della tangente della curva in m, deve fare equilibrio a tutte le forze applicate alla parte mOB della catena, vale a dire alle forze P e Q e al peso distribuito lungo di DN; questa tensione, che indicheremo con T, è conseguentemente uguale e direttamente opposta alla resultante di tutte queste forze, supponendo che si applichino immediatamente al punto m senza cangiare le loro grandezze e le loro respettive direzioni. Ora, indicando le coordinate del punto m, Ap e pm con x ed y; l' arco Am con s, l' elemento mm' con ds, l' accrescimento mr dell' ascissa con dx, l' accrescimento rm' dell' ordinata con dy, e l' angolo rmm' con φ, avremo

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,\varphi = \dfrac{rm'}{mm'} = \dfrac{dy}{ds} \\[2ex] \cos\varphi = \dfrac{mr}{mm'} = \dfrac{dx}{ds} \end{array}\right\} \ldots\ldots (a).$$

Ora, se decomponiamo la tensione T in due forze, l' una orizzontale e l' altra verticale, la componente orizzontale avrà per espressione $T\dfrac{dx}{ds}$ e la componente verticale $T\dfrac{dy}{ds}$; e siccome dopo ciò che precede la componente orizzontale dev' essere uguale a Q, e che la componente verticale dev' essere uguale alla somma dei pesi sospesi ai punti della curva da m fino a B, diminuita della forza P, che agisce in senso contrario di questi pesi avremo l' equazioni

$$\left.\begin{array}{l} T\dfrac{dx}{ds} = Q \\[2ex] T\dfrac{dy}{ds} = p(2a-x)-P \end{array}\right\} \ldots\ldots (b),$$

p indicando il peso dell' unità di lunghezza dell' orizzontale MN e $2a$ la lunghezza totale di questa linea. Infatti la somma dei pesi della parte

$$DN = 2a - x,$$

ha per espressione $p \times DN$, ovvero $p(2a-x)$.

Dividendo l' ultima equazione per la prima otterremo per l' equazione differenziale della curva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(2a-x)-P}{Q} \ldots\ldots (c).$$

Ora, si sa che la quantità $\dfrac{dy}{dx}$ indica generalmente la tangente trigonometrica dell' angolo formato dall' asse delle x con la tangente della curva al punto le cui ordinate sono x, y (Vedi Tangente); in questo caso d' altra parte resulta dalle relazioni (a), dividendole

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang}\,\varphi,$$

così supponendo $x=0$, l'equazione (c) ci darà il valore della tangente trigonometrica dell'angolo della curva con l'asse AB al punto A; questo valore sarà, indicando l'angolo con α,

$$\tang\alpha=\frac{2pa-P}{Q},$$

il che permette di dare all'equazione (c) la forma

$$\frac{dy}{dx}=\tang\alpha-\frac{px}{Q}.$$

Integrando quest'equazione, osservando che non vi è costante da aggiungere, perchè si deve avere $y=0$; quando $x=0$, viene

$$y=x\tang\alpha-\frac{px^2}{2Q}\ .\ .\ .\ .\ .\ (d).$$

4. Possiamo fare sparire la quantità $\tang\alpha$ da quest'ultima, osservando che essa deve essere soddisfatta dai valori $y=0$, $x=2a$; donde

$$0=2a\tang\alpha-\frac{2pa^2}{Q},$$

il che dà

$$\tang\alpha=\frac{pa}{Q}\ .\ .\ .\ .\ .\ (e).$$

Sostituendo questo valore in (d), l'equazione della curva diventa definitivamente

$$y=\frac{p(2ax-x^2)}{2Q}\ .\ .\ .\ .\ .\ (f),$$

ed è facile riconoscere che questa curva è una parabola.

5. La distribuzione uniforme dei pesi sopra l'orizzontale MN indica sufficientemente che le due parti AO ed OB della curva di ciascun lato del punto il più basso O sono uguali e simmetriche; questo punto O è dunque il vertice della parabola, e bisogna trasportarci l'origine delle coordinate, se vogliamo avere l'equazione della curva sotto la sua forma la più semplice. Cominciamo da osservare che l'ascissa AC del punto O è uguale alla metà a della *corda* AB, e che facendo $x=a$, nell'equazione (f), otterremo il valore dell'ordinata OC ossia della freccia della curva; questo valore è dunque, indicando OC con f

$$f=\frac{pa^2}{2Q}\ .\ .\ .\ .\ .\ (g).$$

Premesso ciò, le nuove ascisse orizzontali x' essendo contate a partire dal punto O sull'asse MN, col segno + a destra e il segno — a sinistra, e le nuove ordinate verticali y' essendo contate di basso in alto, abbiamo tra queste nuove coordinate e le antiche x ed y, le relazioni

$$x=a+x',$$

$$y=f-y'=\frac{pa^2}{2Q}-y',$$

le quali sostituite nell' equazione (f), danno, fatte tutte le riduzioni

$$y'=\frac{p}{2Q}x'^2 \ldots\ldots (h).$$

6. Le grandezze della corda $2a$ e della freccia f essendo generalmente i primi dati per stabilire un ponte sospeso, sostituiamo nell' equazione (h) invece di Q il suo valore ricavato dalla relazione (g), cioè

$$Q=\frac{pa^2}{2f} \ldots\ldots (i),$$

riporteremo con ciò la nostra equazione alla forma

$$y'=\frac{f}{a^2}x'^2 \ldots\ldots (k),$$

la quale non contiene più che costanti date immediatamente. Quest' ultima dà il mezzo di risolvere tutte le questioni relative alla lunghezza della catena e a quelle degli stipiti di sospensione.

7. Determiniamo ora in funzione dei dati a ed f la tensione che ha luogo in un punto qualunque della curva; la sua espressione è, mediante l' equazione (b),

$$T=Q\frac{ds}{dx},$$

ovvero

$$T=Q\frac{ds}{dx'},$$

a motivo di $dx=dx'$. Ora $ds=\sqrt{dx'^2+dy'^2}$; così

$$T=Q.\sqrt{\left[1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right]}.$$

Sostituendo io quest' espressione il valore di $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2$, ricavato dall' equazione (h) differenziata, si ottiene

$$T=Q.\sqrt{\left[1+\frac{4f^2x'^2}{a^4}\right]} \ldots\ldots (l),$$

ai punti estremi A e B, dove la tensione è la più grande, e corrisponde ai valori $x=-a$, $x=a$, si ha per questa tensione maximum

$$Q\sqrt{\left[1+\frac{4f^2}{a^2}\right]} \ldots\ldots (m).$$

Al punto il più basso O, si vede, facendo $x=0$, che la tensione è uguale a Q, il che è d' altra parte evidente.

Si ottiene un' altra espressione della tensione maximum osservando che l'equazione (g) dà

$$f^2=\frac{p^2a^4}{4Q^2},$$

donde, in virtù dell' espressione (e),

$$\frac{4f^2}{a^2} = \frac{p^2a^2}{Q^2} = \text{tang}^2 x.$$

Così

$$\sqrt{\left[1 + \frac{4f^2}{a^2}\right]} = \sqrt{\left[1 + \text{tang}^2 x\right]} = \frac{1}{\cos x},$$

e si ha per la tensione maximum

$$Q\sqrt{\left[1 + \text{tang}^2 x\right]}, \text{ ovvero } \frac{Q}{\cos x} \ldots\ldots (n).$$

La componente verticale di questa tensione maximum è avidentemente

$$Q \,\text{tang}\, x, \quad \text{ovvero} \quad pa \ldots\ldots (o).$$

Ed è mediante queste diverse tensioni che bisogna regolare, come lo vedremo in seguito, la resistenza dai punti d' appoggio A e B.

8. Siccome è essenziale di conoscere la lunghezza della curva, rammenteremo che un arco s della parabola, contato a cominciare dal vertice O fino al punto la cui coordinate sono x' e y', ha per espressione (*Vedi* Rettificazione)

$$s = \frac{1}{2}x'\sqrt{\left[1 + 4p^2x'^2\right]}$$

$$+ \frac{1}{4p}\text{Log}\left[2px' + \sqrt{\left(1 + 4p^2x'^2\right)}\right],$$

p indicando il parametro, e la caratteristica Log un logaritmo naturale.

Il parametro essendo in questo caso $\frac{f}{a^2}$, abbiamo

$$s = \frac{1}{2}x'\sqrt{\left[1 + \frac{4f^2x'^2}{a^4}\right]}$$

$$+ \frac{a^2}{4f}\cdot\text{Log}\left[\frac{2fx'}{a^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{4f^2x'^2}{a^4}\right)}\right],$$

e per conseguenza, la lunghezza dell' arco OA o della metà della catena, lunghezza che indicheremo con c, è

$$c = \frac{1}{2}a\sqrt{\left[1 + \frac{4f^2}{a^2}\right]}$$

$$+ \frac{a^2}{4f}\text{Log}\left[\frac{2f}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{4f^2}{a^2}\right)}\right] \ldots\ldots (p).$$

Quest' espressione, sviluppata in serie diventa

$$c=a\left[1+\frac{1}{3\,.\,2}\left(\frac{2f}{a}\right)^2-\frac{1}{5\,.\,8}\left(\frac{2f}{a}\right)^4\right.$$
$$+\frac{1}{7\,.\,16}\left(\frac{2f}{a}\right)^6$$
$$-\frac{5}{9\,.\,128}\left(\frac{2f}{a}\right)^8$$
$$\left.+\text{ec.}\,\ldots\ldots\ldots\right]\ldots\,(q).$$

Sarà sempre più facile di calcolare c mediante questa serie, nei casi ordinari dove essa è convergentissima, piuttosto che con l'espressione (p). Allorquando la freccia f è $\frac{1}{15}$ della corda $2a$, rapporto molto generalmente impiegato, i due primi termini danno una sufficiente approssimazione.

9. Per dare un esempio d'applicazione di queste diverse formule, supponiamo i seguenti dati

$$AC=a=32^m,\quad CO=f=4^m.$$

L'equazione (k) diventa, con questi valori,

$$y=\frac{4}{(32)^2}x^2.$$

Si levano gli accenti i quali non sono più di alcuna utilità.

Quest' equazione, ridotta, mediante la soppressione dei fattori comuni, a

$$y=\frac{1}{256}x^2,$$

è dunque quella della parabola particolare AOB; così, ammettendo che il pavimento MN (*Tav.* CLCXXXI, *fig.* 6) debba essere sostenuto da pilastri verticali am, $a'm'$, $a''m''$, ec., distanti l'uno dall'altro di un metro a cominciare dal punto O si otterranno le lunghezze di questi pilastri facendo successivamente $x=1^m$, $x=2^m$, $x=3^m$, ec. fino ad $x=32^m$,

Si troverà in questa maniera, y_1, y_2, y_3, ec. indicando gli stipiti

$$y_1=\frac{1}{256}(1)^2=0^m,0039,$$

$$y_2=\frac{1}{256}(2)^2=0^m,0156,$$

$$y_3=\frac{1}{256}(3)^2=0^m,0352,$$

$$y_4=\frac{1}{256}(4)^2=0^m,0625,$$

ec. = ec.

La lunghezza dello stipite che fissa la tavola al punto O vien considerata come nulla, perchè questo punto tocca il pavimento. La lunghezza della semi-catena AO si calcolerà facendo nelle serie (q)

$$a = 32, \; f = 4.$$

Si troverà, per mezzo solamente dei due primi termini

$$c = 32\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{8}{32}\right)^2\right] = 32^m, 33.$$

La catena intera avrà dunque $64^m, 66$, si concluderà dai medesimi dati

$$\tang \alpha = \frac{2f}{a} = \frac{8}{32} = 0, 25,$$

il che farà conoscere $\alpha = 14°.2'.10''$; questo è l'angolo che fa la catena alle sue due estremità A e B con l'orizzonte.

Conoscendo le lunghezze della catena e degli stipiti di sospensione, si determinerà, come vedremo in seguito, le altre dimensioni che bisogna dar loro, perchè possano sostenere senza rompersi il peso del pavimento. Si conoscerà mediante ciò il peso totale del ponte, e per conseguenza il carico per un metro di lunghezza, carico per mezzo dal quale si calcoleranno inseguito le tensioni estreme ai punti d'attacco delle catene, e conseguentemente le resistenze di cui questi punti debbono essere capaci. Ammettiamo che il carico totale per l'unità di lunghezza, vale a dire il carico permanente dovuto al peso del pavimento, aumentato del sopraccarico momentaneo dovuto al passaggio delle vetture e pedoni, sia stato trovato di 4522 chilogrammi, si farà

$$p = 4522,$$

e la formula (i) darà

$$Q = \frac{4522.(32)^2}{2 \times 4} = 578816^{ch.}.$$

Questo valore e quello di $\tang \alpha$, sostituiti nella formula (n), danno per la tensione delle catene all'estremità superiori, ossia per la loro tensione maximum

$$578816\sqrt{\left[1 + \left(0, 25\right)^2\right]} = 596630 \text{ chilog.}$$

Finalmente la tensione verticale ai punti d'attacco sarà, mediante la formula (o),

$$pa = 4522 \times 32 = 144704 \text{ chilog.}$$

Nel caso in cui il pavimento non fosse sostenuto che da due catene, il carico totale dividendosi ugualmente tra esse, la tensione maximum di ciascuna sarebbe

$$\frac{1}{2}.596630 = 298315^{ch}.$$

Ciascun punto d'attacco subirebbe una tensione orizzontale di

$$\frac{1}{2}.578816 = 289408^{ch},$$

e una pressione verticale di

$$\frac{1}{2} \cdot 144704 = 72352^{ch}.$$

Se vi fossero due catene da ciascuna parte del ponte, le loro tensioni rispettive ai loro punti d'attacco sarebbero la metà delle precedenti.

10. Abbiamo supposto fin qui che i punti d'appoggio A e B avessero lo stesso livello, e conseguentemente che la curva fosse composta di due parti simmetriche. Questo caso non è il più generale, e dobbiamo indicare le modificazioni che si debbono far subire alle precedenti formule, per renderle immediatamente applicabili a tutte le posizioni possibili dei punti d'attacco.

Siano A ed E (*Tav.* CLXXXVIII, *fig.* 2) questi punti d'attacco, dei quali si conosca la distanza orizzontale AD $=k$ e la differenza di livello DE $=d$. La porzione AOE dell'arco parabolico AOB, non potendo evidentemente cangiare di natura, per il trasporto del punto d'appoggio B in E, poichè questo trasporto non fa che rendere fisso il punto E senza alterare in niente la relazione degli altri punti, l'equazione della curva AOE, riportata al vertice O, sarà sempre, astrazione fatta dagli accenti, (k),

$$y = \frac{f}{a^2} x^2,$$

nella quale $f=$ OC e $a=$ AC. Ora, in questo caso si conosce bene OC $=$ AM, ma AC non è nel numero delle quantità date, e bisogna precedentemente determinarne il valore. Osserviamo che l'equazione (k) deve dare

$$x = \text{ON} = \text{AD} - \text{AC} = k - a,$$

quando ci facciamo

$$y = \text{EN} = \text{DN} - \text{DE} = f - d,$$

e che per conseguenza si ha

$$f - d = \frac{f}{a^2}(k - a)^2.$$

Sviluppando il quadrato e riducendo, otterremo l'equazione del secondo grado in a

$$a^2 - \frac{2fk}{d} a = -\frac{fk^2}{d},$$

le cui radici sono

$$\frac{fk}{d} + \frac{k}{d}\sqrt{f^2 - df},$$

$$\frac{fk}{d} - \frac{k}{d}\sqrt{f^2 - df},$$

a dovendo essere più piccola di k, la seconda radice soddisfà sola alla questione; così

$$a = \frac{k(f - \sqrt{f^2 - df})}{d}.$$

Possiamo mettere quest' espressione sotto una forma più semplice moltiplicando i due termini del secondo membro pel fattore $f+\sqrt{f^2-df}$; si ha allora

$$a=\frac{kf}{f+\sqrt{f^2-df}} \dots\dots (r),$$

per mezzo di questa formula il parametro $\frac{f}{a^2}$ della parabola si trova determinato.

11. La tensione orizzontale Q in ciascun punto della catena è sempre

$$Q=\frac{pa^2}{2f} \dots\dots (s),$$

e la tensione particolare al punto le cui coordinate sono x e y ha ugualmente, per espressione

$$T=Q\sqrt{\left[1+\frac{4f^2x^2}{a^4}\right]} \dots\dots (t).$$

La componente verticale di questa tensione particolare è

$$Q\frac{2fx}{a^2} \dots\dots (u),$$

ovvero semplicemente

$$px \dots\dots (v),$$

sostituendo invece di Q il suo valore (s).

Così, la tensione maximum o quella che ha luogo al punto A, dove abbiamo $x=a$, ha per espressione

$$T=Q\sqrt{\left[1+\frac{4f^2}{a^2}\right]} \dots\dots (x),$$

e la tensione all'altro punto d'attacco E, dove abbiamo $x=k-a$, ha per espressione

$$T'=Q\sqrt{\left[1+\frac{4f^2(k-a)^2}{a^4}\right]} \dots\dots (y).$$

Le componenti verticali di quest' ultime tensioni, ovvero gli sforzi esercitati verticalmente sopra i ponti d' attacco A ed E, sono respettivamente

$$pa \quad e \quad p(k-a) \dots\dots (z).$$

12. Finalmente, per determinare la lunghezza AOE della catena, si calcolerà separatamente l'arco AO mediante la formula (q), poi l'arco OE con la serie

$$s = x + \frac{a^2}{2f}\left[\frac{1}{3.2}\left(\frac{2fx}{a^2}\right)^3 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2fx}{a^2}\right)^5 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2fx}{a^2}\right)^7 - \frac{5}{9.128}\left(\frac{2fx}{a^2}\right)^9 + \text{ec.} \ldots\right] \ldots (z),$$

nella quale si farà $x = k - a$. La somma dei resultamenti $c + s$, sarà la lunghezza totale AOE.

13. Applichiamo queste diverse formule ai dati

$$k = 75 \text{ metri}, \quad f = 6 \text{ metri}, \quad d = 4^m,5.$$

La prima cosa da fare è di calcolare il valore di a o di AC, mediante la formula (r), la quale in questo caso dà

$$a = \frac{75 \times 6}{6 + \sqrt{36 - 27}} = 50 \text{ metri.}$$

Sostituendo questo valore di a, come pure il valore dato di f nella formula (k), avremo l'equazione

$$y = \frac{6}{(50)^2} x^2,$$

ovvero

$$y = \frac{3}{1250} x^2,$$

che si riferisce alla parabola particolare AOE, il cui vertice O è situato sopra l'orizzontale MN ad una distanza di 50 metri dall'estremità M, e conseguentemente ad una distanza di 25 metri dall'altra estremità N.

Se il pavimento MN dev'essere sospeso con stipiti distanti tra loro di un metro a partire dal punto O, si farà successivamente

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \text{ ec.}$$

e si troverà per le lunghezze di questi stipiti

$$y_1 = \frac{3}{1250}(1)^2 = 0^m,0024,$$

$$y_2 = \frac{3}{1250}(2)^2 = 0,\ 0096,$$

$$y_3 = \frac{3}{1250}(3)^2 = 0\ ,0216,$$

$$\text{ec.} = \text{ec.} = \text{ec.}$$

È evidente che i 25 stipiti che debbono sostenere la parte ON del pavimento,

hanno respettivamente le stesse lunghezze che i 25 primi dei 50 stipiti che debbono sostenere l'altra parte OM.

Si troverà la lunghezza della parte AO della catena per mezzo dei due primi termini della serie (q), facendoci

$$2f = 12, \quad a = 50;$$

il calcolo darà

$$c = 50\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{12}{50}\right)^2\right] = 50^m,48.$$

Per avere l'altra parte OE, si farà nella serie (α)

$$x = K - a = 25^m,$$

e si otterrà, contentandoci di due termini,

$$s = 25 + \frac{(50)^2}{12} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{12 \times 25}{(50)^2}\right)^3 = 25^m,06.$$

Così,

$$AOE = c + s = 75^m,54.$$

Nel caso di un carico di 5500 chilogrammi per l'unità di lunghezza, si avrebbe per la tensione orizzontale delle catene

$$Q = \frac{5500 \times (50)^2}{12} = 1145833 \text{ chil.}$$

Poi, per mezzo di questo valore, si troverebbe per la tensione estrema in A, mediante la formula (x),

$$T = 1145833 \sqrt{\left[1 + \frac{4 \times 36}{2500}\right]} = 1178371 \text{ chil.}$$

e, per la tensione estrema in E, mediante la formula (y),

$$T' = 1145833 \sqrt{\left[1 + \frac{4 \times 36 \times 25}{6250000}\right]} = 1156164 \text{ chil.}$$

Le tensioni verticali in questi punti estremi sarebbero, mediante le formule (z),

$$pa = 5500 \times 50 = 275000 \text{ chil.}$$

$$p(k - a) = 5500 \times 25 = 137500 \text{ chil.}$$

14. Gli sforzi esercitati dalle catene di sospensione contro i loro punti di attacco trovandosi sufficientemente determinati da ciò che precede, ci rimane solamente da esaminare le diverse disposizioni che possono presentare questi punti. Tutte le volte che le località non offrono punti fissi ad un'altezza conveniente, divien necessario di elevare dei sostegni per attaccarci le catene. In diversi ponti della Scozia questi sostegni sono semplici pali di legno o colonne di ferro fuso, le quali non presentano che una debolissima resistenza agli sforzi orizzontali, dimodochè è essenziale sostenergli mediante una catena di ritenuta, la cui azione orizzontale distrugge quella della catena di sospensione. Sia AM (*Tav.* CLXXXI, *fig.* 5) un tal sostegno, AB la catena di sospensione del pavimento, e

AD la catena di ritenuta attaccata al terreno per la sua estremità inferiore, e supposta tesa in modo da mantenere AM nella posizione verticale. Indichiamo con ω l'angolo che forma la catena AD con l'orizzonte, e con R la sua tensione. La componente orizzontale di questa tensione, sarà espressa da $R\cos\omega$, e sarà lo sforzo esercitato dalla catena di ritenuta contro il sostegno AM per rovesciarlo nel senso MD. Ma Q rappresenta lo sforzo orizzontale della catena di sospensione AB per rovesciare AM nel senso opposto MN, così, perchè questi due sforzi si distruggano, e che il sostegno AM non riceva alcuna azione trasversale, bisogna che si abbia

$$R\cos\omega = Q.$$

$\cos\omega$ diminuendo a misura che ω aumenta, e il suo valore maximum essendo l'unità, quest'equazione ci prova che la tensione R della catena di ritenuta non può mai essere più piccola della tensione orizzontale Q della catena di sospensione, e che essa dev'essere tanto più grande quanto l'angolo ω è più grande, o che la direzione della catena di ritenuta si avvicina alla verticale.

Si fa ordinariamente l'angolo ω uguale all'angolo α della curva con l'orizzonte al punto A; allora

$$R = \frac{Q}{\cos\omega} = \frac{Q}{\cos\alpha},$$

vale a dire che la tensione della catena di ritenuta è uguale alla tensione maximum della catena di sospensione.

15. Qualunque sia l'angolo ω, se ammettiamo che la tensione della catena di ritenuta sia regolata in modo che si abbia

$$R = \frac{Q}{\cos\omega},$$

il sostegno AM non riceverà alcuno sforzo orizzontale, e si tratta solamente di dargli la solidità necessaria perchè possa resistere alla pressione verticale che sostiene. Ora, questa pressione, che chiameremo P, è evidentemente uguale alla somma delle componenti verticali delle tensioni delle due catene

$$R\,\text{sen}\,\omega \quad \text{e} \quad Q\,\text{tang}\,\alpha;$$

la sua espressione generale è dunque

$$P = R\,\text{sen}\,\omega + Q\,\text{tang}\,\alpha,$$

ovvero

$$P = Q\,(\text{tang}\,\omega + \text{tang}\,\alpha) \;.\;.\;.\;.\; (5),$$

a motivo di

$$R\,\text{sen}\,\omega = Q\frac{\text{sen}\,\omega}{\cos\omega} = Q\,\text{tang}\,\omega.$$

Resulta da ciò che la pressione P aumenta a misura, che la direzione della catena di ritenuta si avvicina alla verticale.

16. Proponiamoci di determinare la pressione verticale dei sostegni, nel caso dell'esempio del n.° 9, abbiamo i dati

$$\alpha = 14^\circ\ 2'\ 10'', \quad \text{tang}\,\alpha = 0,25; \quad AM = f = 4^m;$$
$$Q = 578816 \text{ chil.}$$

Se il ponte non è sostenuto che da due catene, la tensione orizzontale di ciascuna di esse è

$$\frac{1}{2} \cdot 578816 = 289408 \text{ chil.},$$

a ammettando che $\omega = \alpha$, la pressione verticale che tende a rompere ciascun sostegno, è

$$P = 289408 \left[0,25 + 0,25 \right] = 144704 \text{ chil.}$$

Sarebbe dunque necessario che la resistenza di ciascun sostegno fosse superiore a 144704 chilogrammi.

Possiamo diminuire la pressione diminuendo l'angolo ω e aumentando per conseguenza la lunghezza della catena di ritenuta. Ma le località non sempre permettono di dare una lunghezza arbitraria a questa catena. In questo caso supponendo l'angolo ω di 10°, il che dà $\tan g \omega = 0,1763$, si avrebbe

$$P = 289408 \times 0,4263 = 123375 \text{ chilog.}$$

17. La lunghezza della catena di ritenuta è data, in tutti i casi, dall' espressione

$$L = \frac{H}{\text{sen } \omega},$$

H indicando l'altezza AM del sostegno, ed L la lunghezza AD della catena.

18. Quando il sostegno è costruito in fabbricato o che esso è formato mediante un' armatura di legno o di ferro, avente una larga base, esso diventa capace di resistere ad un'azione orizzontale, e ne resulta una diminuzione nella tensione delle catene di ritenuta; allora, lo luogo di attaccare all' estremità dell' appoggio le estremità delle catene di ritenuta e di sospensione, queste due catene non ne formano che una sola, la quale riposa solamente sopra l' appoggio e può strisciare in un senso e nell' altro, senza che il sostegno prenda alcun movimento. In questa disposizione si presentano due casi: o la catena può strisciare senza attrito sopra l'appoggio la cui superficie superiore è circolare (*Tav.* CLXXXVIII, *fig.* 5), e allora la sua tensione è la stessa in tutte le sue parti e uguale a $\frac{Q}{\cos \omega}$; ovvero l' attrito è assai considerabile per impedire la tensione della parte AB di trasmettersi tutta intera alla parte AB. Nel primo caso, il pilastro sostiene uno sforzo orizzontale uguale a

$$Q\left(1 - \frac{\cos \omega}{\cos \alpha}\right),$$

e un carico verticale uguale a

$$Q\left(\frac{\text{sen } \alpha + \text{sen } \omega}{\cos \alpha}\right).$$

Nel secondo caso, lo sforzo orizzontale è

$$Q - R \cos \alpha,$$

e il carico verticale

$$Q \tang \alpha + R \sen \omega.$$

R rappresentando in questo caso la tensione della parte AD della catena, data dall' espressione

$$R = Q . \frac{e^{\frac{-\varphi . S}{\rho}}}{\cos \alpha}$$

nella quale e è la base dei logaritmi naturali, φ il rapporto dell'attrito alla pressione, ρ il raggio dell'arco di circolo AEC, ed S la lunghezza di quest' arco. Lo sviluppo di quest' espressione dà la serie

$$R = \frac{Q}{\cos \alpha}\left[1 - \frac{\varphi S}{\rho} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\varphi S}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\varphi S}{\rho}\right)^3 + \ldots\right],$$

e si ha generalmente, AEC supponendosi sempre un arco di circolo,

$$\frac{S}{\rho} 3,1416 . \frac{\alpha + \omega}{180^\circ}.$$

Si troverà la deduzione di queste formule nella memoria del Navier, alla quale rimanderemo per tutto quello che riguarda i mezzi di fissare nel terreno l'estremità delle catene di ritenuta.

19. Si determina il diametro delle catene di sospensione mediante la regola pratica di non farle sostenere che carichi inferiori a quelli, che comincerebbero ad alterare la loro elasticità. Questi carichi non debbono dunque mai superare il terzo dei carichi capaci di determinare la rottura (*Vedi* Resistenza); così ammettendo come la media dell' esperienze le più esatte, che una sbarra di ferro lavorato si rompe sotto un peso di $43^{ch.},83$ per un millimetro quadrato di superficie, la tensione maximum delle catene di sospensione non dovrà essere più grande di 13 o al più 14 chilogrammi per un millimetro quadrato della loro sezione trasversale, che conseguentemente si tratta di fissare in modo da non superare questo limite.

Indichiamo con Ω l' area della sezione trasversale delle catene e con π il peso dell' unità di volume del ferro lavorato; $\pi\Omega$ rappresenterà il peso dell' unità di lunghezza delle catene, e se ϖ rappresenta in particolare il peso del pavimento e degli stipiti di sospensione per l' unità di lunghezza, $\varpi + \pi\Omega$ sarà il peso totale dell' unità di lunghezza della costruzione o la quantità che sopra abbiamo indicata con p. Ora sostituendo a p il valore $\varpi + \pi\Omega$ nella formula (i), si ottiene, per l' espressione della tensione orizzontale,

$$Q = \frac{(\varpi + \pi\Omega)a^2}{2f},$$

e per conseguenza, per quella della tensione maximum (m)

$$\frac{(\varpi + \pi\Omega)a^2}{2f}\sqrt{\left[1 + \frac{4f^2}{a^2}\right]},$$

il che si riduce a

$$(\varpi+\pi\Omega)\frac{a\sqrt{(a^2+4f^2)}}{2f}\ldots\ldots(\delta).$$

Ma se μ indica la più gran tensione alle quale possa essera esposta l' unità di superficie della sezione trasversale delle catene, $\mu\Omega$ esprimerà il più gran carico che si possa far sostenere a queste catene, e siccome la tensione maximum (δ) non deve superare questo carico, avremo l' equazione

$$\mu\Omega=(\varpi+\pi\Omega).\frac{a\sqrt{(a^2+4f^2)}}{2f},$$

la quale pel valore di Ω dà l' espressione

$$\Omega=\frac{\varpi.a\sqrt{(a^2+4f^2)}}{\mu.2f-\pi.a\sqrt{(a^2+4f^2)}}\ldots\ldots(\varepsilon).$$

Quando le catene sono di ferro lavorato, sostenza che non si deve esporre ad una tensione maggiore di 14 chilogrammi per millimetro quadrato della sezione trasversale, si hanno i dati

$\pi=7788$ chilogrammi,

$\mu=14000000$ chilogrammi,

il metro essendo l' unità lineare.

20. Dobbiamo comprendere nel peso ϖ del pavimento e dei sostegni di sospensione i sopraccarichi momentanei, che le catene sono esposte a sopportare per l' effetto del passaggio delle vetture, degli uomini e degli animali. Mediante la valutazione del Navier, il limite superiore di questi sopraccarichi è di 195 chilogrammi per un metro quadrato di superficie del pavimento. Così L indicando la larghezza del pavimento che serve al passaggio, la quantità

$$195\,L\ldots\ldots(\mu),$$

esprime il sopraccarico per un metro di lunghezza, che bisogna aggiungere al peso del pavimento e degli stipiti.

21. Quanto agli stipiti di sospensione, se indichiamo con n il loro numero e con Π il peso del pavimento, compresoci quello del sopraccarico maximum, il peso sopportato da ciascuno di essi in particolare sarà evidentemente

$$\frac{\Pi}{n},$$

dimodochè chiamando ψ la loro sezione trasversale e ε il carico per un millimetro quadrato, avremo $\varepsilon\psi=\frac{\Pi}{n}$, donde

$$\psi=\frac{\Pi}{n.\varepsilon}\ldots\ldots(\nu).$$

Le scosse che provano gli stipiti di sospensione per l' effetto del passaggio delle vetture non permettono di esporgli ad un carico al di sopra di $1^{ch},50$ per un millimetro quadrato della loro sezione trasversale; si farà dunque $\varepsilon=1,50$, e la

formula (ν) farà conoscere l' area della sezione degli stipiti espressa in millimetri quadrati.

Conoscendo l' area della sezione, avremo facilmente il suo diametro rammentandoci che l' area ψ di un circolo è uguale al prodotto del quadrato del suo raggio per il rapporto della circonferenza al diametro o per il numero 3,1416. Si ha così, chiamando D il diametro

$$D = 2\sqrt{\left[\frac{\psi}{3,1416}\right]} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\xi).$$

22. Cercheremo di render più chiaro l' uso di quest' ultime formule applicandole all' esempio del n.° 9, pel quale abbiamo

$$a = 32 \text{ metri}, \quad f = 4 \text{ metri}.$$

Di più supporremo che la larghezza del ponte sia di 8 metri, e che il peso del suo pavimento solo ascenda a 166165 chilogrammi.

La lunghezza del ponte essendo di 64 metri e la sua larghezza di 8, la sua area è $64 \times 8 = 512$ metri quadrati, e, conseguentemente, il sopraccarico totale ha per valore

$$512 \times 195^{c} = 99840^{c},$$

donde si ricava

$$\Pi = 166165 + 99840 = 266005 \text{ chilogrammi}.$$

Gli stipiti di sospensione sono nel numero di 65 per ciascuna parte del pavimento; il loro numero totale è dunque di 130, e il peso sopportato da ciascuno di essi in particolare

$$\frac{266005}{130} = 2046^{c},19.$$

Ne resulta per la sezione dello stipite,

$$\psi = \frac{2046,19}{1,50} = 1364,13 \text{ millimetri quadrati}.$$

e per il suo diametro

$$D = 2\sqrt{\left[\frac{1364,13}{3,1416}\right]} = 42 \text{ millimetri}.$$

Si dovrà dunque dare a ciascuno stipite un diametro di $0^{m},042$.

La conoscenza della sezione degli stipiti ci conduce direttamente a quella del loro peso. Infatti, questa sezione riportata al metro quadrato per unità, essendo $0^{mq},00138544$, se la moltiplichiamo per 7788 chilogrammi, peso del metro cubo del ferro lavorato, otterremo il peso di un metro di lunghezza degli stipiti; e non rimarrà che da moltiplicare questo peso

$$0,00138544 \times 7788 = 10^{c},7898$$

per la somma delle lunghezze degli stipiti, per avere il loro peso totale. Ora, la somma delle lunghezze dei 32 stipiti y_1, y_2, y_3, ec., che abbiamo calcolati n.° 9 è $44^{m},6875$; così, astrazione fatta dagli stipiti del mezzo del ponte, i quali in questo caso sono perduti nella grossezza del pavimento, e fanno parte

del suo peso, la lunghezza totale dei 128 stipiti è

$$4 \times 44,6875 = 178^m,75,$$

e, per conseguenza, abbiamo pel loro peso totale

$$178,75 \times 10,7898 = 1929 \text{ chilogrammi.}$$

Trovato ciò, procediamo al calcolo dell'area delle catene di sospensione mediante la formula (ε).

Il peso del pavimento 166165^c aggiunto a quello delle catene 1929^c e al sopraccarico maximum determinato qui sopra 99840^c è uguale a 267934^c. Dividendo questo peso per la lunghezza del ponte $=64^m$, abbiamo il peso dell' unità di lunghezza, cioè:

$$\pi = \frac{267934}{64} = 4190 \text{ chilogrammi.}$$

Così, la sezione domandata Ω è

$$\Omega = \frac{4190 \times 32 \sqrt{[(32)^2 + 4 \times 16]}}{14000000 \times 8 - 7788 \times 32 \sqrt{[(32)^2 + 4 \times 16]}}.$$

Eseguendo i calcoli ed osservando che in questo caso l' unità di superficie è il metro quadrato, troveremo

$$\Omega = 0^{mq},042615.$$

Ma quest' area è quella della somma delle sezioni delle due catene tra le quali si divide il carico; così, la sezione di una sola catena è

$$0^{mq},0213075,$$

il che ci dà pel suo diametro

$$2 \sqrt{\left[\frac{0,0213075}{3,1416}\right]} = 0^m,165.$$

Se il ponte fosse sostenuto da una doppia catena da ciascuna parte, il che è sempre preferibile, la sezione di ciascuna catena semplice sarebbe il quarto di Ω, e così di seguito.

Per avere ora il peso delle catene, osserviamo che il peso di un metro di lunghezza sopra una sezione Ω è

$$0,042615 \times 7788^c = 331^c,886.$$

La lunghezza delle catene, trovata n.° 9, essendo di $64^m,66$, il loro peso totale è uguale a

$$331^c,886 \times 64,66 = 21460 \text{ chilogrammi.}$$

Così il peso di tutta la costruzione, compresovi il sopraccarico maximum, si eleva a 289394 chilogrammi, e il carico p sopra un metro di lunghezza del pavimento, è per conseguenza,

$$\frac{289394}{64} = 4522 \text{ chilog.}$$

questo è il dato che abbiamo preso n.° 9, e mediante il quale abbiamo trovato che la tensione maximum è equivalente a 596630 chilogrammi. Paragonando questa tensione maximum con la somma dell' aree delle sezioni delle catene = 42615 millimetri quadrati, si vede che il carico per un millimetro quadrato della sezione è

$$\frac{596630}{42615} = 14 \text{ chilogrammi.}$$

il che serve di verificazione agli ultimi calcoli.

23. L' ipotesi dell' uguale repartizione del carico sopra una linea orizzontale è la più semplice di tutte quelle, dalle quali possiamo partire per determinare la forma della curva delle catene; ma essa non è rigorosamente esatta, poichè, in realtà, il peso del pavimento è il solo che si possa considerare come distribuito uniformemente sopra la linea orizzontale legata alle catene, e l' unità di lunghezza di questa linea si trova tanto più caricata, quanto si prende più vicina alle estremità, dove gli stipiti di sospensione sono più lunghi, come anche le parti corrispondenti dalle catene. Ne resulta che se, costruendo un ponte, si fosse data la forma parabolica alle catene, questa forma si modificherebbe quando la costruzione fosse abbandonata a se stessa, e prenderebbe una figura intermediaria tra quelle della parabola e della catenaria, dimodochè la curvatura delle catene aumenterebbe alle estremità e diminuirebbe nel mezzo, il che farebbe elevare il mezzo del pavimento. Il Navier dà la formula seguente per calcolare la grandezza di quest' elevazione

$$f' = f\left(1 - \frac{3\tau a + 2\sigma f^2}{30(\pi + \tau)\,a^2}\right)$$

nella quale

- a è la semi-corda,
- f la freccia della curva parabolica,
- f' la nuova freccia o quella della curva modificata,
- τ il peso totale degli stipiti di sospensione,
- π il peso per un metro corrente del pavimento,
- σ il peso per un metro corrente delle catene.

Se prendiamo per esempio i dati del numero precedente, i quali sono

$$a = 32^m,\quad f = 4^m,\quad \tau = 1929^c,\quad \pi = \frac{166165}{64} = 2596^c,\quad \sigma = 332^c,$$

avremo

$$f' = 4\left(1 - \frac{3 \times 1929 \times 32 + 2 \times 332 \times 16}{30\,(2596 + 332)\,(32)^2}\right) = 3^m,991\,,$$

donde concluderemo per la differenza delle due freccie

$$f - f' = 4 - 3,991 = 0,009$$

Così, nel caso del nostro esempio, quando la costruzione fosse abbandonata a se stessa, il cangiamento subito dalla curvatura delle catene farebbe risalire il pavimento nel mezzo di $0^m,009$ solamente, il che sarebbe appena sensibile. È fa-

cile vedere, in generale, che la differenza tra f e f' sarà sempre piccolissima, e tanto più quanto l'apertura dell'arco sarà più grande.

24. Le lunghezze degli stipiti calcolate con l'equazione della parabola non corrispondendo esattamente con l'ordinate della curva modificata, resulterebbe ancora dall'uso esclusivo di quest' equazione che gli stipiti non si mantarrebbero verticali e ugualmente distanti, il che potrebbe avere degl' inconvenienti. Nella pratica, ancora conservandosi la facilità di regolare con delle viti la lunghezza degli stipiti, sarà sempre più prudente, dopo aver determinato provvisoriamente tutti gli elementi di un ponte sospeso mediante l'equazione della parabola

$$y=\frac{f}{a^2}x,$$

di ricominciare il calcolo della lunghezza degli stipiti per mezzo dell'equazione della curva modificata

$$y=\frac{\pi+\sigma}{2Q}x^2+\frac{3\tau a+2\sigma f}{12Qa^4}x^4,$$

la quale contiene le stesse quantità a ed f, e di cui le altre costanti hanno la significazione di sopra. Si deve consultare per quest' oggetto una memoria dell' ingegnere Stapfer inserita nella seconda edizione dell' opera del Navier.

25. Un' altra causa tende a modificare la curva delle catene, quando il ponte è abbandonato a se stesso; ma questa agisce in una maniera regolare e progressiva, e fa variare solamente la lunghezza degli stipiti, senza che essi cessino di essere verticali; questa è l' elasticità del ferro. » Poichè una sbarra di ferro, dice il Navier, si stende necessariamente quando essa è tirata dalle due estremità, l'effetto del carico del pavimento di un ponte sarà di allungare le catene che lo tengono sospeso, e per conseguenza di aumentare la freccia della curva che affetterebbero queste catene se esse fossero formate con verghe inestensibili. Dei carichi addizionali situati sul pavimento produrranno ancora nella freccia di curvatura nuovi aumenti, i quali cesseranno nello stesso tempo che l'azione di questi carichi. È necessario sottoporre questi effetti al calcolo, e di essere ancora nel caso di prevedere l'abbassamento durabile, che si manifesterà nell'istante in cui le catene si troveranno caricate per la prima volta del peso del pavimento, e gli abbassamenti momentanei prodotti dai carichi accidentali. » Ecco i resultamenti dell' analisi di questo sapiente. Sia c la lunghezza della semi-catena avanti la sua estensione, e c' la sua lunghezza dopo, si ha

$$c'=c+\frac{pa^2}{E.2f}\left(1+\frac{4f^2}{3a^2}\right)\ldots\ldots\ldots(1),$$

p essendo il peso totale della costruzione per un metro corrente di lunghezza, ed E una costante il cui valore è

$$E=20000^c.\Omega,$$

nella quale Ω indica l' area della sezione trasversale delle catene espressa in millimetri quadrati.

Per calcolare la nuova freccia f', si ha la formula approssimativa

$$f'=\sqrt{\frac{3}{2}\left(c'-a\right)a}\ldots\ldots(2),$$

della quale possiamo contentarci nel maggior numero di casi. Se vogliamo una maggiore esattezza, si deve impiegare la serie

$$f'^2 = \frac{3}{2} a^2 \left[\frac{c'-a}{a} + \frac{9}{10}\left(\frac{c'-a}{a}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(\frac{c'-a}{a}\right)^3 + \frac{306}{350}\left(\frac{c'-a}{a}\right)^4 - ec.\right].$$

La formola (1) può ugualmente servire per calcolare l'allungamento, resultante da un carico addizionale uniformemente repartito sul pavimento, considerando allora p come rappresentante il carico addizionale situato sopra ciascuna unità di lunghezza.

26. Una conseguenza importantissima di questi resultamenti, è che non bisogna, nel progetto di un ponte, dare alla freccia f la grandezza che si vuole che essa abbia quando la costruzione sarà terminata, questa freccia dovendo necessariamente aumentare per l'effetto dell'estensione delle catene sotto il carico permanente. Per esempio, il ponte del quale abbiamo calcolato gli elementi ni. 22 e 23, nell'ipotesi di una freccia $f = 4^m$, si troverebbe avere una freccia $f = 4^m, 112$ dopo l'ammucchiamento. Infatti, abbiamo trovato per il peso totale della costruzione 189554 chilogrammi. Questo numero, diviso per 64^m, lunghezza del pavimento, ci dà per il carico permanente, sopra un metro di lunghezza, 2962^c. Di più, l'area della sezione delle catene è di 42615 millimetri quadrati, donde

$$E = 20000 \times 42615 = 852300000.$$

Così, sostituendo questi valori nella formula (1) con gli altri dati, avremo

$$c' = 32,33 + \frac{2962 . (32)^3}{8 \times 852300000}\left[1 + \frac{4 \times 16}{3 \times 1024}\right]$$

il che ci darà, senza aver bisogno di tener conto dell'ultimo fattore,

$$c' = 32^m, 344;$$

l'allungamento della metà della catena sarà dunque $= 0^m, 014$, e quello della catena intera $= 0^m, 028$.

Questo valore di c, messo nella formula (2), dà

$$f' = \sqrt{\left[\frac{3}{2}\left(32, 344 - 32\right) 32\right]} = 4^m, 065,$$

donde vediamo che l'effetto dell'estensione delle catene è di dare alla freccia primitiva un accrescimento di $0^m, 065$. L'effetto della modificazione della curva parabolica, dovuta all'ineguale repartizione del carico (n.° 23) essendo, al contrario, di diminuire la freccia f della quantità di $0^m, 009$, la freccia reale avrà dunque definitivamente $4^m, 056$ di lunghezza, e non è che quando si fosse voluto dargli questa dimensione che sarebbe stato necessario d'impiegare il valore $f = 4^m$ nel calcolo degli elementi del ponte.

27. Non succede che nei ponti di una piccolissima lunghezza che il pavimento è orizzontale; quando questa lunghezza è un poco considerabile, gli si dà la forma di un arco di circolo o di un arco di parabola; dimodochè i sostegni di sospensione non sono più semplicemente le ordinate di una curva, ma

benaì le distanze di due punti situati sopra due curve differenti. Il calcolo della loro lunghezze si compone allora di due parti come ora vedremo. Sia AOB (*Tav.* CLXXXVIII, *fig.* 1) la curva delle catene, MON quella del pavimento, M'N' la linea orizzontale taogente comune alle due curve nel punto O. Ed è sopra questa linea che conteremo le ascisse a partire dal punto O. A ciascuna ascissa $Om=x$ corrisponderà un'ordinata mp appartenente alla curva delle catene, e un'ordinata mq appartenente alla curva del pavimento. La somma di queste ordinate $mp+mq=pq$ sarà la distanza dei due punti p e q delle curva, e, per conseguenza, la lunghezza dello stipite che lega questi punti. Così dopo aver calcolato, per mezzo dell'equazioni delle due curve, le due ordinate pm ed mq, corrispondenti ad un punto m dell'orizzontale, pel quale deve passare uno stipite, si formerà la loro somma, per avere la longhezza di questo stipite. Supponiamo la curva del pavimento circolare; si chiami γ la sua freccia $OD=M'M$, ed y' la sua ordinata mq. L'equazione del circolo riportata al punto O e all'asse M'N' essendo

$$x^2=2ry'-y'^2,$$

nella quale r indica il raggio, osserviamo che quest'equazione deve dare

$$x=OM'=a,$$

quando ci facciamo

$$y'=MM'=\gamma;$$

così,

$$a^2=2r\gamma-\gamma^2,$$

donde

$$2r=\frac{a^2+\gamma^2}{\gamma}.$$

Sostituendo questo valore in luogo di $2r$, l'equazione dell'arco MON diventa

$$x^2=\frac{a^2+\gamma^2}{\gamma}y'-y'^2,$$

e non contiene più che delle costanti date a e γ. Risolvendola rapporto ad y', si ottiene l'espressione

$$y'=\frac{a^2+\gamma^2}{2\gamma}-\sqrt{\left[\left(\frac{a^2+\gamma^2}{2\gamma}\right)^2-x^2\right]},$$

la quale servirà a calcolare le ordinate y' corrispondenti a delle ascisse date x. Nei casi ordinari, la freccia γ è piccolissima rapporto alla semi-corda a, e possiamo contentarci dei due primi termini dello sviluppo del radicale. Si ha allora semplicemente

$$y'=\frac{\gamma}{a^2+\gamma^2}x^2,$$

e ancora, con una esattezza sufficiente, poichè l'arco di circolo in questione non differisce sensibilmente da un arco di parabola,

$$y'=\frac{\gamma}{a^2}x^2.\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Avendo dunque calcolato la parte *pm* o y' dello stipite con quest' ultima formula, si aggiungerà alla parte *qm*, calcolata, come l' abbiamo insegnato sopra, per un pavimento orizzontale M'N'. Le prime valutazioni dovendo sempre esser fatte nell' ipotesi di una curva AOB parabolica, la cui equazione è

$$y=\frac{f}{a^2}x^2 \ldots\ldots\ldots (4),$$

f indicando la freccia CO, possiamo dispensarci di calcolare separatamente le due parti y' ed y, poichè la somma dell' equazioni (3) e (4) dà

$$y'+y=\frac{\gamma+f}{a^2}x^2.$$

Così, indicando con z la lunghezza *pq* dello stipite, si ha immediatamente

$$z=\frac{\gamma+f}{a^2}x^2 \ldots\ldots (5).$$

Supponiamo, per esempio, che si abbiano i dati

$$AC=a=8^m,5;$$
$$CO=f=1^m,4;$$
$$OD=\gamma=0^m,3;$$

e che il pavimento deva essere sostenuto da ciascuna parte con 18 stipiti distanti l' uno dall' altro di 1^m; dimodochè, per una metà AO della catena, il primo stipite sia a $0^m,50$ di distanza dal punto A, il secondo a $1^m,50$, il terzo a $2^m,50$, e così di seguito fino al nono ed ultimo AM, la cui lunghezza è fissata avanti dalla condizione

$$AM'+M'M=CO+OD=1^m,7.$$

Sostituendo i numeri invece delle lettere nella formula (5), essa diventa

$$z=\frac{1,7}{72,25}x^2, \quad \text{ovvero} \quad z=\frac{34}{1445}x^2.$$

Così, indicando gli stipiti successivi con z_1, z_2, z_3, e fino a z_9, si ha

$$z_1=\frac{34}{1445}\left(0,50\right)^2=0^m,006,$$

$$z_2=\frac{34}{1445}\left(1,50\right)^2=0\ \ ,053,$$

$$z_3=\frac{34}{1445}\left(2,50\right)^2=0\ \ ,147,$$

$$z_4=\frac{34}{1445}\left(3,50\right)^2=0\ \ ,288,$$

$$z_5=\frac{34}{1445}\left(4,50\right)^2=0\ \ ,476,$$

$$z_6 = \frac{34}{1445}\left(5,50\right)^2 = 0\ ,712,$$

$$z_7 = \frac{34}{1445}\left(6,50\right)^2 = 0\ ,994,$$

$$z_8 = \frac{34}{1445}\left(7,50\right)^2 = 1\ ,324,$$

$$z_9 = \frac{34}{1445}\left(8,50\right)^2 = 1\ ,700.$$

Questi valori essendo conosciuti, potremo inseguito determinare tutti gli altri elementi della costruzione, come il diametro e il peso degli stipiti e delle catene con i processi indicati.

Per tutto ciò che riguarda la teoria dei ponti sospesi, possiamo vedere la memoria del Navier già citata; e ancora l' opera sul medesimo soggetto, del signor Seguin primogenito. Ed è a quest' ultimo ingegnere che la Francia deve il suo primo ponte sospeso.

PORISMO (*Geom.*). Parola della quale si servivano gli antichi per indicare certe proposizioni geometriche, la significazione delle quali si è perduta. Secondo il Pappus, il *porismo* non è un *teorema* nè un *problema* propriamente detto, ma un' *invenzione*, come, per esempio di determinare il centro di un circolo dato. Il signor Wronski ha proposto (*Introd.*, pagina 220) di consacrare questa parola *porismo* alle proposizioni tecniche, i cui oggetti sono *necessari*, lasciando a quelli i cui oggetti sono solamente *possibili* il nome di *problemi*. Così, far passare una circonferenza di circolo per tre punti dati, è un problema, fintantochè l' oggetto di questa proposizione non è dimostrato come possibile; nel mentre che determinare il centro di un circolo è un *porismo*. Questa significazione dei *porismi* è perfettamente conforme alle definizioni che ci hanno lasciate gli antichi, definizioni delle quali i moderni hanno sì male conosciuto lo spirito, che il Simson confonde i porismi con i veri problemi, e il d' Alembert, cosa che è anche un poco più materiale, non gli distingue dai *lemmi*, con i quali essi non hanno niente di comune.

PORISTICO. Alcuni autori chiamano *metodo poristico* la maniera di determinare con quali mezzi, e in quante differenti maniere un problema può essere risoluto.

PORTA (Giovan Batista), nato a Napoli verso il 1550, è stato lungo tempo considerato come uno dei dotti più illustri che l' Italia abbia prodotti nel secolo celebre del rinascimento delle scienze e delle lettere. Ma un esame più scrupoloso dei suoi lavori e dei servigj che posson questi aver reso alle scienze ha dimostrato l' esagerazione degli elogi accordatigli da' suoi contemporanei, e tanto è bastato perchè i posteri non facessero niun conto dei suoi talenti, che oggi non sono più apprezzati al loro giusto valore. Questa circostanza ci sembra giustificare la rapida esposizione che siamo per presentare della sua vita e delle sue opere. Giovan Batista Porta apparteneva a un' antica e nobile famiglia, che nulla trascurò per isviluppare in lei le felici disposizioni di cui era dotato. I suoi progressi negli studi classici e nelle lingue antiche furono grandi e rapidi. Quando ebbe esauriti i mezzi che Napoli gli presentava per istruirsi, deliberò di viaggiare coll' unico scopo di acquistare nuove cognizioni e per fortificarsi in quelle che già possedeva. Al suo ritorno in patria divenne uno dei fondatori dell' accademia degli *Oziosi*, e poco dopo istituì nella sua casa un' altra accademia, cui no-

minò dei *Secreti*, nella quale niuno era ammesso se non se ne era fatto degno colla scoperta di qualche segreto utile alla medicina o alla filosofia naturale. Il nome misterioso della nuova accademia eccitò ingiusti sospetti che poco dopo furono causa della sua soppressione. Le ricerche intorno alle scienze fisiche alle quali applicavasi Porta, l'immaginazione viva, la penetrazione grande, ed un certo ardire di cui era dotato e che forse contribuiva ad inspirarli il suo ingegno non meno che la sua posizione sociale, la vasta erudizione finalmente che possedeva, furono motivi più che sufficienti, nei pregiudizj del suo tempo, per farlo accusare di occuparsi di scienze chimeriche o piuttosto impossibili. È dovuta a Porta, che spesso applicò con successo le estese cognizioni che possedeva in matematiche alla spiegazione dei grandi fenomeni della natura, la scoperta della camera oscura, non che un numero grande di esperienze di ottica sommamente curiose. Si approssimò più ancora del celebre Maorolico alla vera teoria della visione (*Vedi* la *Storia delle matematiche* di Montucla, Tom. I, pag. 698 e segg.). Scrisse molto sugli specchi piani, convessi, concavi, sui loro diversi effetti, e particolarmente sullo specchio ustorio, sperando di poterne fabbricare uno che ardesse a qualunque distanza. Wolf e parecchi altri scrittori contano nel numero delle sue scoperte quella del telescopio, ma non vi è ragione nessuna per dirlo inventore di questo potente strumento. L'onore di tale invenzione sublime gli è stato attribuito dietro un passo della sua *Magia naturale*, XVII, 10, nel quale Porta parla dell'effetto delle lenti concave e convesse, secondo la loro posizione; ma non indica in nessun luogo il modo di collocarle in un tubo, e non ha mai tentato di fabbricare questo strumento, di cui non può avere avuto che un'idea vaga, tolta forse a Ruggero Bacone, delle cui opera aveva troppa cognizione per ignorarne i segreti.

Porta, geometra e fisico, quantunque partecipasse della debolezza comune a non pochi degl'illustri suoi contemporanei, di credere cioè nelle chimere dell'astrologia giudiziaria e nella potenza degli spiriti; quantunque nelle sue opere s'incontrino tutte le puerilità bizzarre che peraltro si osservano con maraviglia negli scritti i più stimati del suo tempo, non ha per questo reso meno grandi servigj a quella parte delle scienze fisiche che ha per oggetto i fenomeni della visione. Ei morì a Napoli il 4 Febbrajo 1615. Noi citeremo dei suoi scritti quelli soltanto che si riferiscono alle scienze matematiche. I *Magiae naturalis libri XX*, Napoli, 1589, in-fol. È questa la più importante delle opere di Porta; ha avuto moltissime edizioni ed è stata tradotta in italiano, in francese e in tedesco. Tra molti fatti insignificanti, raccolti senza critica, vi si trovano osservazioni interessanti sulla luce, sugli specchi, sugli occhiali, di cui perfezionò la fabbricazione, sui fuochi d'artifizio, sulla statica, sulla idrostatica e sulla meccanica; II *De refratione optices libri IX*, Napoli, 1593, in-4: l'autore vi tratta di un gran numero di oggetti relativi all'ottica, come della refrazione in generale, di quella di un globo di vetro, dall'anatomia dell'occhio e delle sue diverse parti, ec. III *Pneumaticorum libri tres; cum duobus libris curvilineorum elementorum*, Napoli, 1601, in-4. Tale opera tratta specialmente delle macchine idrauliche e della loro costruzione: la seconda parte, consacrata alla geometria curvilinea, è stata ristampata coll'aggiunta di un terzo libro contenente alcune ricerche sul problema della quadratura del circolo, di cui Porta confidava di aver reso la soluzione più facile, col seguente titolo: *Elementorum curvilineorum et de circuli quadratura*, *libri tres*, Roma, 1610, in-4; IV *De munitione libri tres*, Napoli, 1608, in-4. È un trattato di fortificazione. Per maggiori particolarità biografiche si consulti la *Storia della letteratura italiana* di Tiraboschi, non che le fonti citate nell'articolo consacrato a Porta nella *Biografia universale*.

PORTA-VOCE (*Mec.*). Instrumento in forma di trombetta, in latta o in rame, con l'aiuto del quale si aumenta molto l'intensità del suono e si porta a grandi distanze.

Quantunque si riferisca che Alessandro faceva uso di un simile instrumento per parlare alla sua armata, si attribuisce generalmente al cavaliere Samuele Moreland l'invenzione del *porta-voce*.

Il Kircher ha preteso aver fatto del *porta-voce* avanti il Moreland; ma tutto ciò che esso dice e tutto ciò, che altri hanno riferito sopra instrumenti acustici anteriori a quello del Moreland, riguarda piuttosto i *cornetti acustici* che i *porta-voce*.

Secondo il Lambert (*Mèm. de Berlin*, 1763), la forma più conveniente da dare ad un *porta-voce* è quella di un cono troncato, perchè, secondo i principii della catottrica che possiamo applicare al *suono* per analogia, i raggi sonori sono reflessi dalle pareti, in modo che dopo una o più refrazioni essi diventano paralleli all'asse o almeno poco divergenti. Tutte le figure le quali allargandosi, volgono la loro convessità verso l'asse, debbono essere scartate, perchè spargono il suono per tutto un emisfero; questa sorte di figure sono buone per gl'instrumenti di musica, ove importa di spargere il suono tanto uniformemente quanto è possibile; ma i *porta-voce* sono destinati a dirigere il suono verso il luogo ove vogliamo farci intendere. Così la curvatura dev'esser tale che essa giri la sua concavità verso l'asse, ciò non ostante senza diventare parallela all'asse, o restringersi dopo essersi allargata fino da un certo punto. Poichè se la superficie diventa parallela all'asse, essa comincia a produrre l'effetto di un cilindro, e se essa converge verso l'asse, essa farà l'effetto di un cono rovesciato.

Un *porta-voce* parabolico, ove l'imboccatura dev'essere nel fuoco, farebbe meno effetto che un *porta-voce* conico della stessa grandezza.

Ciò non ostante resulta dall'esperienze del *Hassenfratz* (*journol de Physique*, tomo LVI, p. 18), che un *porta-voce* munito di una *tenda*, che è un piccolo pezzo che gira la sua convessità verso l'asse e che si pone alla sua estremità, porta il suono ad una distanza quasi doppia di quando esso non ha tenda.

Quanto ai tubi semplicemente cilindrici, è evidente che essi non possono servire da *porta-voce*, poichè i raggi sonori si dispardono in tutti i sensi uscendo per la loro estremità. Il solo effetto che possiamo ottenere con un tal tubo consiste a fare intendere ad una delle sue estremità il suono prodotto dall'altra senza il minimo indebolimento e ancora un poco più sonoro. Per mezzo di un tubo di un diametro da pertutto ugnale, due persone situate alle due estremità potranno trasmettere e ricevere delle parole ad una distanza considerabilissima. Ma per trasmettere il suono all'aria libera ad una grande distanza, è necessario che il tubo si allarghi dalla parte ove si dirige il suono.

L'applicazione delle leggi della catottrica agli effetti dei *porta-voce* non sembra rigorosamente esatta, poichè, come lo ha osservato il Chladni, la refrazione della luce dipende da ciascun punto della superficie, ma l'azione del suono dipende dalla forma generale delle superficie contro le quali esso si appoggia, e l'effetto non è cangiato da piccole inegnaglianze di queste superficie. La luce non si spande che per mezzo di linee rette, ma il suono, per nuovi centri dei raggi sonori, si spande in tutte le direzioni possibili. Sembra dunque che questi cangiamenti della direzione del suono rassomiglino piuttosto ai movimenti dell'onde sopra la superficie dell'acqua, che, dopo esser giunte ad un ostacolo, formano dell'onde secondarie, le quali si spandono finalmente sopra tutta la superficie dell'acqua, e il cui centro è alla medesima distanza al di là dell'ostacolo che il centro dell'onde prime è al di qua.

Si trovano alcune osservazioni interessanti dell'Eulero, sopra i *porta-voce*,

nella sua memoria. *De motu aeris in tubis*, inserita nel tomo XVI delle *Nov. act. ac. Petrop.*

POSIDONIO *Vedi* Possidonio.

POSITIVO (*Alg.*). Una quantità *positiva* è quella che si concepisce sempre con una funzione di aumentazione, si chiama così in opposizione con le quantità *negative*. (*Vedi* Negativo e Filosofia n°. 55).

POSIZIONE (*Astron.*). L'angolo di *posizione* di un astro è l'angolo formato al suo centro da' suoi circoli di latitudine e di declinazione. Quest'angolo entra come elemento in parecchi calcoli astronomici.

In aritmetica, si dà il nome di *falsa posizione* ad una regola di un uso molto generale. Noi l'abbiamo esposta all'articolo Falsa Posizione.

Posizione apparente. Non è il solo effetto della refrazione che fa comparire gli astri fuori del loro *luogo vero*; essi ne sono ancore allontanati per effetto dell'aberrazione, perchè vediamo i corpi celesti nella direzione della resultante di due celerità, di quella cioè della luce e di quelle della terra. Quando nelle tavole astronomiche si cerca l'ascensione retta e la declinazione di una stella, non vi si trova ordinariamente che la sua ascensione retta e la sua declinazione *media*, quali cioè si osserverebbero se non vi fosse nè l'aberrazione nè la nutazione. Questa posizione media si riferisca al 1 Gennajo dell'anno pel quale è stato fatto il *Catalogo*. Allora, per avere queste posizione in qualunque altra epoca, bisogna valutare il moto di precessione in ascensione retta e in declinazione nel tempo scorso dall'epoca del Catalogo a quella proposte; moto che per un breve intervallo è proporzionale al tempo, e che si calcola per mezzo delle variazione annua data dal Catalogo (*Vedi* Precessione). In seguito si determina la piccola quantità dovuta al fenomeno della nutazione, che si aggiunge all'ascensione retta e alla declinazione per avere il *luogo vero*. In fine si valutano i piccoli termini dipendenti dall'aberrazione, che egualmente si aggiungono al *luogo vero* per avere il *luogo apparente* e l'ascensione retta e la declinazione apparente.

Baily ha pubblicato, nel tomo II delle *Memorie* della Società astronomica di Londra, delle tavole assai semplici per un grandissimo numero di stelle; ma quelle inserite alla pag. 115 delle addizioni alla *Connaissance des temps* pel 1833, e calcolate colle formule che altrove abbiamo fatto conoscere, sono anco più comode in quanto che dispensano dall'uso dei logaritmi e si riferiscono alle stelle più comunemente osservate. Non occorre nemmeno far più alcun calcolo da che l'Ufizio delle longitudini, seguendo il sistema degli autori del *Nautical Almanac* e delle *Éphémérides* di Gotha, inserisce ogni anno nella *Connaissance des temps* le posizioni apparenti delle stelle principali. Queste posizioni entrano come elementi essenziali nel calcolo del tempo siderale, in quello della latitudine di un luogo della terra mediante l'osservazione dell'altezza delle stelle sopra l'orizzonte, ec. *Vedi* Ora, Latitudine, Azimut.

POSSIDONIO. Questo filosofo stoico, contemporaneo di Pompeo e di Cicerone, che stimaronsi onorati della sua amicizia, si rese celebre nell'antichità per le sue cognizioni e per le sue ricerche in geometria, in astronomia, in meccanica e in geometria. Sembra aver egli posseduto un sapere enciclopedico, poichè scrisse su tutte queste difficili materie. Sventuratamente le sue opere sono tutte perdute, e di lui non si sono potuti raccogliere che pochi frammenti sparsi nei libri di Cleomede e di Strabone. Si attribuisce a Possidonio una determinazione della grandezza della terra, che, tanto pel resultato che pel metodo col quale fu ottenuta, non può essere considerata che come uno dei primi tentativi della scienza per giungere alla soluzione di questo importante problema. Ecco come si racconta ch'egli ottenesse questa misura. Aveva osservato a Rodi, ove soggiornò alcun tempo, che la stella Canopo, invisibile nel rimanente della

Grecia, non faceva che radere l'orizzonte e tramontava quasi subito, mentre ad Alessandria compariva elevata 7 gradi e mezzo nell'istante del suo passaggio al meridiano. Da tali nozioni assai incerte, e che la refrazione alterava almeno di un mezzo grado, Possidonio inferì che le due città essendo sotto il medesimo meridiano, la differenza tra i loro paralleli fosse di 7 gradi e mezzo, ossia della 48ma parte della circonferenza, e che in tal modo il circuito del meridiano dovesse essere di 48 volte 5000 stadj, ossia 240000 stadj, che il grado fosse di 666 stadj, e che finalmente il diametro della terra dovesse essere di 80000 stadj. Ma le due città non erano sotto lo stesso meridiano; i passaggi al meridiano, in tempi in cui non si aveva idea nessuna della refrazione, non potevano dare che un'idea inesattissima dell'arco tra i paralleli; la distanza terrestre, cui Possidonio supponeva di 5000 stadj, non era neppure interamente di 4000 secondo Strabone; laonde da tale pretesa misura altri hanno dedotto un grado di 500 stadj. Dalla circostanza che sotto il tropico di estate a Siene, nel giorno del solstizio, lo spazio senz'ombra, a mezzodì, era di 300 stadj, quest'astronomo tentò altresì di dedurre il diametro del sole; e Cleomede, che sviluppa i ragionamenti del suo autore, termina con dire che il diametro del sole è almeno diecimila volte quello della terra; il che sarebbe assai esagerato, poichè converrebbe ridurre questo numero a 107 circa. Noi vogliamo credere o che questo cattivo calcolo appartenga unicamente a Cleomede, o che Possidonio abbia inteso di paragonare i dischi e non i contorni. Ai tempi di Possidonio si fa risalire la cognizione esatta del flusso e riflusso del mare. Fu questo geometra che riconobbe la legge di tale fenomeno, che coi suoi rapporti evidenti coi moti del sole e della luna appartiene all'astronomia, e di cui Plinio il naturalista ci ha lasciato una descrizione notabilissima per la sua esattezza.

Possidonio era nato in Apamea, avea studiato in Alessandria e aprì scuola a Rodi. Questo è tuttociò che si sa della sua vita. I biografi, senza alcuna ragione plausibile, distinguono due Possidoni, uno dei quali sarebbe stato filosofo e l'altro matematico; ma dietro la testimonianza degli antichi storici e tra gli altri di Cicerone, che nel libro primo della *Natura degli Dei* lo chiama suo maestro ed amico (*familiaris noster a quo instituti fuimus*), non possiamo dubitare che non vi sia stato che un solo personaggio celebre di questo nome. Ciò che ci resta di Possidonio è stato raccolto sotto questo titolo: *Posidonii Rhodii reliquiae doctrinae, collegit atque illustravit James Bake*; *accedit Wittembachii adnotatio*, 1810.

POTENZA. (*Alg.*). (*Vedi* Elevazione alla Potenza.)

POTENZA. (*Mec.*). Forza capace di sostenere o di vincere uno sforzo. Le parola *forza* e *potenza* hanno quasi lo stesso significato in meccanica, solamente la parola *forza* indica più generalmente qualunque causa di moto, nel mentre che le parola *potenza* indica una forza applicata ad una macchina. Le *potenze* sono ordinariamente uomini, cavalli, pesi, ec.

Una *potenza*, come qualunque forza in generale, si misura dal suo effetto o dalla quantità di moto che essa produce. (*Vedi* Forza, Moto e Macchina.)

Già si dava il nome di Potenze meccaniche alle sei macchine semplici, la *leva*, il *piano inclinato*, la *puleggia*, la *zeppa*, la *vite* e il *verricello*. Questa denominazione inesatta non è più adoprata nell'opere moderne.

PRECESSIONE DEGLI EQUINOZJ (*Astron.*). Si dà questo nome, o semplicemente quello di Precessione, al movimento insensibile in forza del quale i punti equinoziali variano continuamente di posto sull'ecclittica procedendo in senso inverso all'ordine dei segni.

Questo moto, che resulta dall'attrazione del sole e della luna sulla sferoide schiacciata della terra, si manifesta con un moto apparente di tutte le stelle

fisse, le cui longitudini crescono di circa 5o″ per anno. È dovute ad Ipparco la cognizione della Precessione, ma è Newton che ha avuto la gloria di scoprirne a di spiegarne le cause.

Se la terra fosse perfettamente sferica, l'attrazione del sole e della luna agirebbe egualmente sulle diverse parti della sua superficie, e non potrebbe esservi *precessione*. Gli equinozj corrisponderebbero sempre agli stessi punti dell'eclittica, e le longitudini delle stelle sarebbero invariabili, almeno non facendo attenzione alle altre cause di perturbazione. Ma la terra essendo rigonfia all'equatore, l'azione del sole e della luna agisce su questa parte con maggiore intensità che sulle altre, e tende continuamente a deviare il piano dell'equatore terrestre dalla sua direzione. I resultati di questa azione sono quelli d'imprimere all'equatore un moto circolare intorno all'asse dell'eclittica, il qual moto corrisponde nel tempo stesso un moto conico del suo proprio asse intorno a sè stesso: dimanierachè i poli dell'equatore girano intorno ai poli dell'eclittica, non descrivendo un circolo, ma bensì una curva ondulata o epicicloidale, perchè in questo movimento l'asse dell'equatore si avvicina e si allontana alternativamente da quello dell'eclittica.

Questa oscillazione dell'asse terrestre, il cui effetto è di far variare l'inclinazione dell'eclittica, dicesi Nutazione. Essa si manifesta mediante un aumento ed una diminuzione progressiva nelle declinazioni delle stelle, la cui quantità è di circa 9″ in più o in meno, e il cui periodo è di 18 anni. Questo periodo è anco quello della rivoluzione dei nodi della luna.

Newton aveva bene scorto l'esistenza dell'oscillazione dell'asse terrestre, ma non aveva considerato che l'azione del sole e la Nutazione che ne resulta, il cui periodo è di sei mesi ed è presso a poco insensibile. Bradley, che il primo osservò la variazione delle declinazioni delle stelle, ebbe l'idea felice di confrontare il periodo di queste variazioni con quello della rivoluzione dei nodi lunari e di far vedere così il legame che unisce questi fenomeni. Non fu che varj anni dopo la scoperta di questo illustre astronomo che d'Alembert ne diede la teoria, riducendo la *nutazione lunare* al principio dell'attrazione universale.

Il rapporto medio delle azioni solari e lunari nel fenomeno della *precessione* sembra esser quello di 2 a 5. Ciò non ostante rimane ancora qualche dubbiezza in questo particolare, a motivo dell'incertezza nella quale siamo tuttora rispetto alla massa esatta della luna. Si consulti la memoria di Poisson *sul moto della luna intorno alla terra*, nel tomo XII della *Raccolta* dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

La precessione degli equinozj ha per effetto generale di far descrivere al punto dell'Ariete preso per l'origine delle longitudini un arco dell'eclittica di 5o″,2 per anno; e siccome questo moto si effettua in senso inverso al moto apparente del sole, il punto equinoziale si muove incontro al sole, il quale perciò non deve fare che 359° 59′ 9″,9 sull'eclittica per ritrovarsi di nuovo all'equinozio.

L'equinozio viene dunque 20′ $\frac{1}{3}$ di tempo più presto di quello che avrebbe fatto senza questo moto del nodo, e per conseguenza l'*anno tropico*, ossia il ritorno del sole al medesimo nodo, è più corto dell'*anno sidereo*, cioè del ritorno dal sole alla stessa stella, di 20′ $\frac{1}{3}$.

Se il moto del nodo fosse uniforme, il punto equinoziale percorrerebbe il circolo intero dell'eclittica in un periodo di circa 25867 anni, ma la precessione prova delle ineguaglianze che nello scorrere dei secoli cangeranno la lunghezza

di questo periodo. Dall' epoca della invenzione dello zodiaco, i punti equinoziali hanno retrogradato di circa 30 gradi, cosicchè i *segni* non corrispondono più colle costellazioni di cui portano il nome. *Vedi* LIBRA.

La causa e gli effetti di questo fenomeno rimanendo così sufficientemente spiegati, termineremo questo articolo col richiamare alla memoria le formule che sono più in uso fra gli astronomi per assegnare le variazioni che provano le ascensioni rette e le declinazioni degli astri in conseguenza di questo moto retrogrado della linea degli equinozj.

Quando, nella teoria del moto della terra nella sua orbita, si considera lo spostamento lentissimo di questa curva, riferendola ad un' eclittica fissa, come quella del 1750, si trova che la sua obliquità sopra questa aumenta proporzionalmente al quadrato del tempo, ma di una quantità così piccola, che è affatto inutile il farne conto per l' oggetto che ci proponiamo. Non è però così della variazione secolare dell' angolo che l' equatore celeste fa col piano dell' eclittica variabile; perchè, dal 1750 fino ad oggi, è esso andato progressivamente diminuendo di 0'',48 l' anno. In generale, sia ω l' obliquità media; quella dell' anno 1750 essendo stata trovata di 23° 28' 18'', si ha, in capo a t anni,

$$\omega = 23° \; 28' \; 18'' - t.0'',48368,$$

trascurando però il termine dipendente dal quadrato del tempo, il cui coefficiente è estremamente piccolo.

Il moto della precessione annua *luni-solare*, calcolato sull' eclittica fissa, essendo indicato con dl', si ha, prendendo per punto di partenza l' anno 1750,

$$dl' = 50'',37572 - t.0'',000243589o,$$

mentre la precessione annua generale, misurata sull' eclittica attuale o variabile, è

$$dl = 50'',21129 + t.0'',0002442966.$$

Ora, se si ricorre alle formule differenziali esposte all' articolo NUTAZIONE, le quali esprimono in generale le variazioni in ascensione retta e in declinazione, quando la longitudine di un astro e l' obliquità dell' eclittica cambiano di una quantità piccolissima, si avrà, facendo $d\omega = 0$, poichè l' obliquità media può considerarsi come costante in un breve periodo di anni, si avrà, diciamo

$$dA = (\cos\omega + \operatorname{sen}\omega \operatorname{tang} D \operatorname{sen} A)\, dl,$$

$$dD = \operatorname{sen}\omega \cos A \,.\, dl.$$

Pure è da notarsi che la variazione dA essendo contata a partire dall' eclittica del 1750, è necessario farvi una leggera correzione per ridurla all' origine attuale delle ascensioni rette; il che si effettuerà diminuendo questa variazione della piccola quantità $\mu = 0'',17926.t$.

Da ciò resulta che se si fa

$$m = \cos\omega\, dl - \mu,$$

$$n = \operatorname{sen}\omega\, dl,$$

le formule di precessione in ascensione retta e in declinazione saranno respettivamente

$$dA = m + n \operatorname{sen} A \operatorname{tang} D,$$

$$dD = n \cos A.$$

I coefficienti m ed n diconsi le *costanti* della precessione, sebbene in realtà

variano anch'essi col tempo. Infatti, Bessel ha trovato che cominciando dal 1750 si ha

$$m = 46'',02824 + 0'',00030865 \,.\, t,$$
$$n = 20'',06442 - 0'',00009702 \,.\, t.$$

Vedasi la *Connaissance des temps* pel 1829.

Nel Catalogo che contiene le posizioni medie delle stelle, il moto di precessione è compreso sotto la denominazione di *variazione annua* a partire dal 1° Gennajo dell'anno al quale si riferisce il catalogo, ed è stato calcolato per ogni stella colle formule precedenti.

Terminando questo articolo faremo osservare che l'obliquità *apparente* dell'ecclittica è eguale alla obliquità media aumentata del termine $9'',426 \cos N$, chiamando N la longitudine media del nodo ascendente della luna. *Vedi* NUTAZIONE.

PRESSIONE (*Mec.*). S'indica con ciò la forza di un corpo, la quale agisce sopra un altro o sopra un ostacolo qualunque senza urto. Quest'azione s'indica sotto il nome di *forza morta*. (*Vedi* FORZA).

I metodi generali per determinare la pressione dei solidi contro le superficie che gli sopportano essendo stati esposti alla parola ATTRITO, ci occuperemo solamente in quest'articolo della pressione dei fluidi, la cui valutazione è importante per diverse questioni d'idraulica. Quanto all'uso delle pressioni come motori, ne è stato parlato alle parole FORZA, MOTO e MACCHINA.

1. Consideriamo un liquido omogeneo racchiuso in un vaso di forma qualunque e abbandonato a se stesso. È evidente che l'equilibrio non può esistere nella massa liquida che fintantochè ciascuna molecola in particolare subisce pressioni uguali in tutti i sensi per parte delle molecole circondanti; poichè, se la pressione fosse più forte in una data direzione che nella direzione opposta, la molecola si metterebbe necessariamente in moto. Ora, quando una massa liquida è in riposo, possiamo sempre supporre, senza niente cangiare alle condizioni dell'equilibrio, che una delle sue parti sia solidificata; così, ammettendo che tutta la massa divenga solida, ad eccezione di un piccolo canale verticale *cd* (*Tav.* CLXXXIX, *fig.* 1) il quale contiene un solo filo di molecole, le pressioni sopportate dall'ultima, *d*, di queste molecole, resteranno le medesime, ma la molecola *d* sopporta il peso totale del filo *cd* delle molecole, dunque, avanti la solidificazione, essa sopportava la stessa pressione verticale, e poichè allora essa restava in riposo, ciò dipende perchè essa era pressata dal liquido inferiore in modo da fare equilibrio alla pressione verticale. Immaginiamo, ora un piccolo canale *cde* sempre composto di un solo filo di molecole e che vada a terminare sopra una delle pareti laterali del vaso; la pressione delle molecole racchiuse nel braccio orizzontale *de* sopra la molecola *d* sarà evidentemente uguale al peso delle molecole racchiuse nel braccio verticale *cd*, e sarebbe ancora lo stesso se il braccio *de*, in luogo di essere orizzontale, fosse inclinato. Possiamo dunque concludere, che *una molecola qualunque di una massa liquida prova in tutti i sensi una pressione uguale al peso di una colonna verticale del liquido, che avrebbe per base questa molecola e per altezza la sua distanza alla superficie libera del liquido*. Resultano da questa proposizione più conseguenze osservabili:

1.° Tutti i punti di uno strato orizzontale qualunque di una massa fluida sopportano la medesima pressione.

2.° La somma delle pressioni sopportate da uno strato orizzontale è uguale al peso di un prisma liquido, che avrebbe per base la superficie dello strato e per altezza la distanza di questo strato al livello del liquido.

3.° La pressione normale *fg* esercitata dal liquido sopra un punto *g* di una parete inclinata BN è uguale al peso della colonna liquida verticale *hg*, che ha

per altezza la distanza del punto g al livello del liquido. Infatti questa pressione normale fg è quella che sopporta la molecola g in contatto con la parete, e alla quale la resistenza della parete fa equilibrio; e abbiamo veduto che le pressioni di una molecola, in tutti i sensi, sono le stesse che la sua pressione verticale.

Se la parete è orizzontale come AB, è evidente che la pressione esercitata in uno dei suoi punti b è sempre uguale al peso della colonna liquida verticale ab.

Chiamando ω l'area di una parete, $d\omega$ il suo elemento, z la distanza di quest'elemento al livello del liquido, e ϖ il peso dell'unità di volume di questo liquido, il peso della colonna verticale che ha per base $d\omega$ avrà per espressione

$$\varpi z d\omega;$$

e siccome, da quello che precede, questo peso è uguale alla pressione normale che il liquido esercita contro l'elemento $d\omega$ della superficie ω, la pressione totale sopportata dalla superficie ω sarà

$$\int \varpi z d\omega,$$

dimodochè indicando questa pressione totale con P, avremo l'espressione fondamentale

$$P = \varpi \int z d\omega \ldots . (a),$$

della quale in altra parte abbiamo dato la deduzione analitica. (*Vedi* IDROSTATICA).

3. Premesso ciò, è facile vedere che il problema di valutare la pressione di un fluido contro una superficie che ne è ricoperta si riduce a trovare il valore di $d\omega$ in funzione di z e ad effettuare l'integrazione indicata.

Cominciamo da esaminare il caso più semplice. Sia, la superficie compressa, il parallelogrammo ABCD (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 8) inclinato in un modo qualunque rapporto all'orizzonte, ma i cui due lati AB e CD sono linee orizzontali. Da un punto qualunque Q della base AB, conduciamo una perpendicolare QG, questa perpendicolare misurerà la distanza dei lati opposti AB e CD e l'angolo GQN che essa formerà con l'orizzontale MN; sarà l'inclinazione di ABCD sul livello inferiore del fluido. Si chiami

a il lato AB;

b la lunghezza GQ della perpendicolare;

x la distanza GO di un punto qualunque O della perpendicolare alla sua estremità superiore G;

z la distanza OE, di questo medesimo punto O al livello superiore mn del fluido;

α l'angolo GQN.

Se dividiamo il parallelogrammo ABCD in un'infinità di strati orizzontali di una larghezza infinitamente piccola, la pressione sarà la stessa sopra tutti i punti di un medesimo strato, e potremo, conseguentemente, considerare questi strati come gli elementi della superficie. Ora, lo strato $abcd$, che corrisponde al punto O, ha per area $ab \times Op$ ossia adx; poichè $ab = AB = a$, e Op è l'accrescimento infinitamente piccolo di $GO = x$; così

$$d\omega = adx.$$

Si chiami h la distanza FG della base superiore CD al livello superiore del fluido, e conducendo GH parallela ad mn, osserviamo che il triangolo rettan-

golo GHO, nel quale l'angolo $HGO=GQN=\alpha$, dà

$$HO=OG.\,\text{sen}\,\alpha=x\,\text{sen}\,\alpha,$$

donde resulta

$$EO=z=FG+HO=h+x\,\text{sen}\,\alpha.$$

Sostituendo questi valori di $d\omega$ e di a nell'equazione (a), essa diventa

$$P=\varpi\int\left(h+x\,\text{sen}\,\alpha\right)a\,dx,$$

e si ottiene, prendendo l'integrale da $x=0$ fino ad $x=b$,

$$P=\varpi\left(abh+\frac{1}{2}ab^2\,\text{sen}\,\alpha\right),$$

espressione nella quale non rimane che da sostituire i valori particolari delle quantità a, b, h, α e ϖ, per ottenere il valore numerico di P.

4. Se la superficie ABCD fosse orizzontale, l'angolo α sarebbe nullo e il valore di P diventerebbe

$$P=\varpi abh,$$

vale a dire che essa sarebbe uguale al peso del prisma del fluido che avrebbe ab per base, ed h per altezza; resultamento già ottenuto qualunque sia la forma della parete (*Vedi* IDROSTATICA) e della quale abbiamo indicato le conseguenze estremamente importanti.

5. Se la superficie fosse verticale, l'angolo α sarebbe di $90°$, e siccome $\text{sen}\,90°=1$, verrebbe

$$P=\varpi\left(abh+\frac{1}{2}ab^2\right).$$

Nel caso in cui il lato superiore CD fosse a fior d'acqua, vale a dire al livello della superficie superiore del fluido, si avrebbe $h=0$, e la pressione si ridurrebbe a

$$P=\frac{1}{2}\varpi ab^2.$$

Essa sarebbe dunque allora equivalente al peso della metà di un prisma di fluido, avente la superficie ab per base e b per altezza.

6. Proponiamoci, come applicazione, di determinare la pressione che ha luogo sopra le pareti rettangolari di un serbatojo di acqua ABCD (*Tav.* CLXXXIX, *fig.* 5); supponiamo che questo serbatojo, costantemente pieno, sia un parallelepipedo rettangolo avente 10 metri di lunghezza sopra 15 di larghezza e 8 di altezza. Le dimensioni delle due più piccole pareti saranno così $a=10$, $b=8$, e quelle delle due più grandi $a=15$ e $b=8$; il metro essendo l'unità lineare, abbiamo di più $\varpi=1000$ chilogrammi, e per conseguenza,

Pressione sopra la più piccola parete $=\frac{1}{2}.1000\times10\times8^2$

$=320000$ chilog.,

Pressione sopra la più gran parete $=\frac{1}{2}.1000\times15\times8^2$

$=480000$ chilog.

Nella costruzione di un simile serbatojo, bisognerebbe dunque dare ai muri che formano le pareti delle grossezze sufficienti per resistere a queste pressioni.

7. Si chiama *centro di pressione* il punto dove la resultante delle pressioni di tutti gli elementi della parete viene ad incontrarla, e dove, per conseguenza, la pressione totale può considerarsi applicata. Questo centro si confonde col centro di gravità per le pareti orizzontali, di cui tutti i punti sono ugualmente compressi; ma per le pareti laterali, siccome la pressione aumenta con la distanza al livello del fluido, il centro di pressione è sempre più basso del centro di gravità. Si determina la sua posizione per mezzo della teoria delle forze parallele, operando nella seguente maniera. Riprendiamo l'espressione generale

$$P = a\varpi \int (h + x \operatorname{sen} \alpha)\, dx,$$

di cui la differenziale

$$dP = a\varpi (h + x \operatorname{sen} \alpha)\, dx$$

rappresenta la pressione elementare che ha luogo sopra l'elemento *abcd* (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 8). Ora, se si moltiplica questa pressione elementare per la distanza x dell'elemento alla destra di CD, e che si faccia la somma dei prodotti simili per tutti gli elementi, questa somma sarà uguale alla pressione totale P moltiplicata per la distanza del suo punto d'applicazione alla stessa retta CD. Chiamando dunque t questa distanza incognita, avremo

$$a\varpi t \int (h + x \operatorname{sen} \alpha)\, dx = a\varpi \int (h + x \operatorname{sen} \alpha)\, x dx.$$

i due integrali essendo presi da $x = 0$ fino ad $x = b$. Sottraendo i fattori comuni a ed ϖ e integrando tra i limiti prescritti, si ottiene

$$t = \frac{3hb + 2b^2 \operatorname{sen} \alpha}{6h + 3b \operatorname{sen} \alpha}.$$

Conoscendo il valore di t, il centro di pressione si trova determinato; poichè questo centro dovendo necessariamente trovarsi sopra la linea RS che divide tutti gli elementi del parallelogrammo in due parti, se si prende $Gt = t$ e che si conduca to parallela a CD, il punto o dove questa parallela taglia RS è il centro di pressione.

8. Quando la parete è orizzontale, α è nullo e il valore di t si riduce a

$$t = \frac{1}{2} b.$$

È facile vedere che questo valore coincide col centro di gravità, il che doveva essere.

Se la base CD è *a fior d'acqua*, caso pel quale $h = 0$, si ha semplicemente, qualunque sia l'angolo α, il cui seno sparisce,

$$t = \frac{2}{3} b.$$

Così il centro di pressione di un parallelogrammo, di cui uno dei lati è a fior d'acqua, si trova ai due terzi della retta che unisce i mezzi delle due basi orizzontali, a cominciare dalla base superiore.

9. Se la superficie compressa avesse un'altra forma diversa da quella di un parallelogrammo, i processi generali della determinazione della pressione e del suo centro di pressione sarebbero sempre quelli che abbiamo indicati; non vi sarebbe differenza che nel calcolo relativo all'espressioni particolari di z e di $d\omega$ in funzioni di una variabile comune. Prendiamo per esempio il trapezio ABCD (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 1), di cui le due basi parallele AB e CD sono orizzontali. Facciamo

$$AB = m, \quad CD = n,$$

prolunghiamo i due altri lati AC e BD fino a tanto che essi s'incontrino in un punto Q, dal quale abbasseremo la perpendicolare QH sopra le due basi parallele. Immaginiamo per questa perpendicolare un piano verticale che tagli il fondo del vaso seguendo l'orizzontale MN, e il livello del liquido seguendo l'orizzontale *mn*. Finalmente, dividiamo il trapezio in un'infinità di strati paralleli e orizzontali di una larghezza infinitamente piccola; si chiami $d\omega$ uno di questi strati ab, z la sua distanza EO al livello del liquido, x la sua distanza OH alla base superiore CD, ed avremo come sopra (n.° 2) per l'area dello strato, $ab \times dx$, e per la pressione che essa sopporta

$$ab \times \varpi z dx.$$

Rimane dunque solamente da trovare il valore di ab. Ora, facendo $QH = y$, abbiamo

$$ab : CD = QO : QH,$$

ossia

$$ab : n = y - x : y,$$

il che dà

$$ab = \frac{n(y-x)}{y}.$$

Ma quando

$$x = CH = b,$$

si ha

$$ab = AB = m;$$

così

$$m = \frac{n(y-b)}{y},$$

donde

$$y = \frac{nb}{n-m}.$$

Sostituendo questo valore di y in quello di ab, viene

$$ab = \frac{nb - nx + mx}{b}.$$

Così la pressione sopra l'elemento ab è definitivamente

$$\frac{\varpi}{b}\left(nb - nx + mx\right) z dx,$$

e la pressione totale sul trapezio è l' integrale di questa quantità preso da $x=o$ fino ad $x=b$.

Per potere effettuare l' integrazione, bisogna ancora esprimere z in funzione di x. Conduciamo dunque HR parallela ad MN; indichiamo con α l'angolo RHO uguale all' angolo HGN d'inclinazione della parete, e con h la distanza FH della base CD al livello del liquido. Avremo

$$OR = OH . \text{sen}\,\alpha = x \,\text{sen}\,\alpha,$$
$$z = ER + OR = h + x \,\text{sen}\,\alpha,$$

donde, definitivamente, chiamando P la pressione totale

$$p = \frac{\varpi}{b}\int\left(ab - nx + mx\right)\left(h + x\,\text{sen}\,\alpha\right)dx.$$

Integrando tra i limiti o e b, si trova

$$P = \varpi\left(\frac{1}{2}\,bh\,(n+m) + \frac{1}{6}\,b^2(n+2m)\,\text{sen}\,\alpha\right) \ldots\ldots (b).$$

Indichiamo, avanti di passare più oltre, le conseguenze di questo risultamento. Se i due lati n ed m fossero uguali, il trapezio diventerebbe un parallelogrammo, e si avrebbe, come sopra (n.° 3), facendo $m=n=a$

$$P = \varpi\left(abh + \frac{1}{2}\,ab^2\,\text{sen}\,\alpha\right).$$

Se il lato $AB=m$ fosse nullo, il trapezio si cangerebbe in un triangolo di una base n e di un' altezza b, e la pressione diventerebbe

$$P = \varpi\left(\frac{1}{2}\,nbh + \frac{1}{6}\,nb^2\,\text{sen}\,\alpha\right).$$

Quest' ultima formula dà il mezzo di calcolare la pressione sopra una parete piana rettilinea qualunque; poichè tutte le figure rettilinee possono essere decomposte in triangoli.

Se ora vogliamo conoscere il *centro di pressione* del trapezio, bisogna osservare, come l' abbiamo fatto al n.° 7, che la somma delle pressioni elementari moltiplicate per le distanze respettive x degli elementi al lato CD, è uguale alla pressione totale P moltiplicata per la distanza del suo punto d' applicazione alla stessa retta; dimodochè chiamando t questa distanza incognita, si ha l'equazione

$$tP = \frac{\varpi}{b}\int\left(ab - nx + mx\right)\left(hx + x^2\,\text{sen}\,\alpha\right)dx,$$

ovvero, integrando il secondo membro tra i limiti $x=o$, $x=b$,

$$tP = \varpi\left(\frac{1}{6}\,b^2h\,(n+2m) + \frac{1}{12}\,b^3(n+3m)\,\text{sen}\,\alpha\right).$$

Sostituendo invece di P il suo valore (b) e ricavando il valore di t, fatte tutte le riduzioni, viene

$$t = \frac{2bh\,(n+2m) + b^2\,(n+3m)\,\text{sen}\,\alpha}{6h\,(n+m) + 2b\,(n+2m)\,\text{sen}\,\alpha}.$$

Così, prendendo sopra GH, a cominciare dal punto H, la parte $Ht = t$, e conducendo to parallela a CD, il punto o dove questa retta incontrerà la linea condotta per i mezzi dei lati opposti AB e CD sarà il *centro di pressione*; poichè questo centro deve trovarsi necessariamente sopra la linea dei mezzi e ad una distanza t da CD.

Quando il lato CD è *a fior d' acqua* o che $h = o$, si ha semplicemente

$$t = \frac{b(n+3m)}{2(n+2m)},$$

il che ci fa conoscere che la posizione del centro di pressione è allora indipendente dall'angolo d'inclinazione α del trapezio.

Se supponendosi il lato CD sempre a fior d'acqua, si avesse $m = o$, e in questo caso il trapezio diventerebbe un triangolo avente il suo vertice al fondo del vaso, il valore di t si ridurrebbe a

$$t = \frac{b}{2},$$

vale a dire che il centro di pressione occupa il mezzo della retta condotta dal vertice al mezzo della base.

Nel caso di $n = o$, dove il triangolo ha il suo vertice a fior d'acqua, si ha

$$t = \frac{3b}{4},$$

vale a dire che il centro di pressione è situato ai tre quarti, a cominciare dal vertice, della retta che unisce questo vertice al mezzo della base.

È facile vedere, che, in tutti i casi, il centro di pressione di una parete inclinata è più basso del centro di gravità di questa parete.

10. Si deduce facilmente da questi resultamenti che quando un liquido è racchiuso in un vaso prismatico a base orizzontale, i centri di pressione di tutte le pareti laterali sono situati sopra il poligono formato dall' intersezione di queste pareti e di un piano parallelo alla base distante dal livello del liquido dei $\frac{2}{3}$, a cominciare da questo livello, dell' altezza del liquido nel vaso. In un vaso cilindrico, la linea dei centri di pressione è un circolo.

Per un vaso conico il cui vertice sarebbe in basso, la linea dei centri sarebbe un circolo situato ad egual distanza dal livello dell' acqua e dal fondo. Se il vertice fosse in alto, la linea dei centri sarebbe situata ai $\frac{3}{4}$ dell' altezza a cominciare dal livello del liquido.

11. Le proprietà caratteristiche dei fluidi in riposo essendo di trasmettere in tutti i sensi le pressioni che si esercitano sopra essi, se la superficie libera di un liquido provasse una pressione qualunque, il centro di pressione di una parete non cangerebbe; ma bisognerebbe aggiungere alla pressione dovuta al peso del liquido e considerata come applicata a questo centro la totalità della pressione estranea. (*Vedi* Idrostatica, *vedi* ancora le parole Reazione e Resistenza.)

PRIMAVERA (*Astron.*). Una delle quattro stagioni dell' anno. Comincia essa quando il sole, avvicinandosi sempre più allo zenit, è giunto ad un' altezza meridiana media tra la sua massima e la sua minima; vale a dire quando è giunto al punto

in cui l' ecclittica taglia l'equatore, ossia al punto dell' equinozio, e finisce quando il sole continuando ad approssimarsi allo zenit è giunto alla sua massima altezza meridiana, cioè quando è giunto al punto del solstizio ove comincia l'estate. Nel nostro emisfero, la primavera comincia verso il 21 Marzo, quando il sole entra nel segno dell' Ariete; allora è *autunno* per l' emisfero australe. Reciprocamente, quando comincia per noi l'*autunno*, entra la *primavera* nell'emisfero opposto. I giorni, che sono eguali alle notti nel momento dell' equinozio, crescono da questo momento fino all'ultimo giorno della primavera, che è il più lungo dell' anno. Questa stagione è più lunga circa 4 giorni dell' autunno e dell' inverno, perchè il sole impiega un tempo più lungo a percorrere i segni settentrionali che i segni meridionali. *Vedi* Stagione.

PRIMO. Parola che esprime la stessa cosa di *minuto*, vale a dire, in *geometria*, la sessantesima parte di un grado. I minuti *primi* s'indicano col segno ($'$), così $45'$ significa 45 *primi*.

Molto spesso ci serviamo ancora dei segni ($'$), ($''$), ($'''$), ec., i quali indicano i *minuti primi*, *secondi*, *terzi*, per far rappresentare ad una stessa lettera quantità differenti; per esempio a, a', a'', a''', ec., che si pronunziano *a*, *a prima*, *a seconda*, ec., indicano semplicemente quantità differenti tra loro.

PRIMO. Vien dato il nome di numeri primi a quelli i quali non sono composti di fattori, ovvero che nòn possono esser divisi che per se stessi e per l' unità. Tali sono i numeri 1, 3, 5, 7, 11, ec.

Questi numeri sono stati l'oggetto di molte ricerche dai tempi più antichi fino ai nostri giorni, ma tutti i tentativi fatti per trovare una legge o espressione che possa abbracciarli generalmente sono rimasti inutili; si sono solamente scoperte molte particolarità curiose, per le quali si deve consultare la *Teoria dei numeri* del Legendre. Eratostene ha immaginato un processo semplicissimo, per mezzo del quale si riconoscono i numeri primi; l'abbiamo esposto alla parola Crivello. Eccone un altro non meno generale.

Se A è un numero primo non esiste che il quadrato di $\frac{A-1}{2}$ che, essendogli aggiunto, dà per somma un quadrato perfetto. Per esempio:

$$5+\left(\frac{5-1}{2}\right)^2=5+4=9=3^2,$$

$$7+\left(\frac{7-1}{2}\right)^2=7+9=16=4^2,$$

$$11+\left(\frac{11-1}{2}\right)^2=11+25=36=6^2,$$

$$13+\left(\frac{13-1}{2}\right)^2=13+36=49=7^2,$$

ec. = ec. — . . . . . .

Così, per riconoscere se un numero A è primo bisogna aggiungergli successivamente i quadrati di tutti i numeri naturali da 1 fino ad $\frac{A-1}{2}$, e se alcuna delle somme, all'eccezione dall'ultima, non è un quadrato perfetto, saremo assicurati che questo numero è primo.

Ecco un esempio di calcolo pel numero 17.

quadrati		Somme
$17+1$	$=$	18
$17+4$	$=$	21
$17+9$	$=$	26
$17+16$	$=$	33
$17+25$	$=$	42
$17+36$	$=$	53
$17+49$	$=$	66
$17+64$	$=$	$81=9^2$.

Così nessuna delle somme, eccettuata l'ultima, quella di $17+\left(\frac{17-1}{2}\right)^2$, non essendo un quadrato perfetto, 17 è un numero primo.

Possiamo rendere più semplice il calcolo aggiungendo successivamente alla prima somma la differenza dei quadrati o il seguito dei numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, ec. si otterrà con questo metodo:

$$17+1=18$$
$$18+3=21$$
$$21+5=26$$
$$26+7=33$$
$$33+9=42$$
$$42+11=53$$
$$53+13=66$$
$$66+15=81=9^2.$$

Il che riduce l'operazione ad un'addizione successiva.

Proponiamoci di determinare se 91 è un numero primo. Operando come sopra, avremo

$$91+1=92$$
$$92+3=95$$
$$95+5=100=10^2.$$

Non vi è bisogno di proseguire il calcolo, poichè la terza somma essendo un quadrato perfetto, quello di 10, 91 non può essere un numero primo.

L'ultima uguaglianza, la quale equivale a

$$91+9=100, \quad o \quad 91+3^2=10^2$$

può servire a determinare i fattori di 91, poichè se ne deduce

$$91=10^2-3^2=(10+3)(10-3)=13\times 7.$$

Possiamo renderci conto della proprietà sulla quale è fondato questo metodo, osservando che se si ha

$$A+B^2=C^2,$$

si deve avere ancora

$$A=C^2-B^2=(C+B)(C-B).$$

Così, C e B essendo numeri interi, C+B e C−B sono ancora numeri interi, ed A trovandosi formato dal prodotto di quest'ultimi, non può essere un

numero primo ehe nel caso in cui $C - B = 1$, il che dà $C + B = A$ e $B = \frac{A-1}{2}$;

il quadrato di $\frac{A-1}{2}$ è dunque il solo la cui somma con A possa essere un quadrato perfetto, quando A è un numero primo.

È evidente, inoltre, che $\frac{A-1}{2}$ è il *più gran* quadrato che, aggiunto ad A, possa formare un quadrato perfetto, e, per conseguenza, che non si ha bisogno nell'operazione precedente, di tentare i quadrati dei numeri al di sopra di $\frac{A-1}{2}$.

Il Fermat ha lasciato molti teoremi curiosi sopra i numeri primi; ecco il principale: *Se* n *è un numero primo ed* x *un numero qualunque non divisibile per* n, *la quantità* $x^{n-1} - 1$ *sarà divisibile per* n.

Un altro teorema non meno celebre è quello del Wilson: *se* n *è un numero primo, il prodotto* $1.2.3.4.5\ldots\ldots(n-1)$ *aumentato dell'unità sarà divisibile per* n. Esso è stato pubblicato dal Waring, nelle sue *Meditazioni algebr.*; ma nè egli nè il Wilson avevano potuto dimostrarlo; ed è il Lagrange ehe ne ha dato la prima dimostrazione. (*Nuove Memorie di Berlino*, 1771).

Se i prodotti della forma $1.2.3.4.5.6\ldots(n-1)$ non aumentassero con un'estrema rapidità, a misura che il numero dei fattori aumenta, il teorema del Wilson offrirebbe il processo il più semplice e il più diretto per riconoscere se un numero è primo o se non lo è. Basta aggiungere un' unità al prodotto $1.2.3.4.5\ldots\ldots(n-1)$ e dividere quindi per n; quando la divisione può effettuarsi esattamente, n è un numero primo: nel caso contrario n è composto; ma il prodotto $1.2.3.4.5\ldots(n-1)$ giunge tanto prontamente ad una grandezza enorme che questo processo diventa bentosto impraticabile. Infatti, per i numeri 13 e 17, che sono numeri piccolissimi, bisogna già formare i prodotti

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 = 479001600$$

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16 = 20922789888000.$$

Si deduce da questo teorema i due seguenti, ugualmente osservabili:

I. Qualunque numero primo n, compreso sotto la forma $4m+1$, divide esattamente la quantità

$$\left(1.2.3.4\ldots\ldots\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1.$$

II. Qualunque numero primo n, della forma $4m+3$, divide esattamente la quantità

$$\left(1.2.3.4\ldots\ldots\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1.$$

Così n deve dividere esattamente l'una o l'altra delle due quantità

$$1.2.3.4\ldots\ldots\frac{n-1}{2}+1, \text{ ovvero } 1.2.3.4\ldots\ldots\frac{n-1}{2}-1.$$

Siccome molto spesso si ha bisogno di conoscere se un numero è primo, soprattutto nella ricerca dei fattori numerici, la tavola seguente, la quale contiene i numeri primi da 2 fino a 5009, non può mancare di essere utile in molti casi.

TAVOLA

DEI NUMERI PRIMI FINO A 5009.

2	239	563	887	1259	1619	2027	2411
3	241	569	907	1277	1621	2029	2417
5	251	571	911	1279	1627	2039	2423
7	257	577	919	1283	1637	2053	2437
11	263	587	929	1289	1657	2063	2441
13	269	593	937	1291	1663	2069	2447
17	271	599	941	1297	1667	2081	2459
19	277	601	947	1301	1669	2083	2467
23	281	607	953	1303	1693	2087	2473
29	283	613	967	1307	1697	2089	2477
31	293	617	971	1319	1699	2099	2503
37	307	619	977	1321	1709	2111	2521
41	311	631	983	1327	1721	2113	2531
43	313	641	991	1361	1723	2129	2539
47	317	643	997	1367	1733	2131	2543
53	331	647	1009	1373	1741	2137	2549
59	337	653	1013	1381	1747	2141	2551
61	347	659	1019	1399	1753	2143	2557
67	349	661	1021	1409	1759	2153	2579
71	353	673	1031	1423	1777	2161	2591
73	359	677	1033	1427	1783	2179	2593
79	367	683	1039	1429	1787	2203	2609
83	373	691	1049	1433	1789	2207	2617
89	379	701	1051	1439	1801	2213	2621
97	383	709	1061	1447	1811	2221	2633
101	389	719	1063	1451	1823	2237	2647
103	397	727	1069	1453	1831	2239	2657
107	401	733	1087	1459	1847	2243	2659
109	409	739	1091	1471	1861	2251	2663
113	419	743	1093	1481	1867	2267	2671
127	421	751	1097	1483	1871	2269	2677
131	431	757	1103	1487	1873	2273	2683
137	433	761	1109	1489	1877	2281	2687
139	439	769	1117	1493	1879	2287	2689
149	443	773	1123	1499	1889	2293	2693
151	449	787	1129	1511	1901	2297	2699
157	457	797	1151	1523	1907	2309	2707
163	461	809	1153	1431	1913	2311	2711
167	463	811	1163	1543	1931	2333	2713
173	467	821	1171	1549	1933	2339	2719
179	479	823	1181	1553	1949	2341	2729
181	487	827	1187	1559	1951	2347	2731
191	491	829	1193	1567	1973	2351	2741
193	499	839	1201	1571	1979	2357	2749
197	503	853	1213	1579	1987	2371	2753
199	509	857	1217	1583	1993	2377	2767
211	521	859	1223	1597	1997	2381	2777
223	523	863	1229	1601	1999	2383	2789
227	541	877	1231	1607	2003	2389	2791
229	547	881	1237	1609	2011	2393	2897
233	557	883	1249	1613	2017	2399	2701

2803	3089	3371	3631	3911	4177	4463	4751
2819	3109	3373	3637	3917	4201	4481	4759
2833	3119	3389	3643	3919	4211	4483	4783
2837	3121	3391	3659	3923	4217	4493	4787
2843	3137	3407	3671	3929	4219	4507	4789
2851	3163	3413	3673	3931	4229	4513	4793
2857	3167	3433	3677	3943	4231	4517	4799
2861	3169	3449	3691	3947	4241	4519	4801
2879	3181	3457	3697	3967	4243	4523	4813
2887	3187	3461	3701	3989	4253	4547	4817
2897	3191	3463	3709	4001	4259	4549	4831
2903	3203	3467	3719	4003	4261	4561	4861
2909	3209	3469	3727	4007	4271	4567	4871
2917	3217	3491	3733	4013	4273	4583	4877
2927	3221	3499	3739	4019	4283	4591	4889
2939	3229	3511	3761	4021	4289	4597	4903
2953	3251	3517	3767	4027	4297	4603	4909
2957	3253	3527	3769	4049	4327	4621	4919
2963	3257	3529	3779	4051	4337	4637	4931
2969	3259	3533	3793	4057	4339	4639	4933
2971	3271	3539	3797	4073	4349	4643	4937
2999	3299	3541	3803	4079	4357	4649	4943
3001	3301	3547	3821	4091	4363	4651	4951
3011	3307	3557	3823	4093	4371	4657	4957
3019	3313	3559	3833	4099	4391	4663	4967
3023	3319	3571	3847	4111	4397	4673	4969
3037	3323	3581	3851	4127	4409	4679	4973
3041	3329	3583	3853	4129	4421	4691	4987
3049	3331	3593	3863	4133	4423	4703	4993
3061	3343	3607	3877	4139	4441	4721	4999
3067	3347	3613	3881	4153	4447	4723	5003
3079	3359	3617	3889	4157	4451	4729	5009
3083	3361	3623	3907	4159	4457	4733	

PRISMA. (*Geom.*). Corpo compreso tra due facce poligonali uguali, e terminato lateralmente da facce parallelogramme (*Vedi* Nozioni Preliminari).

Le facce poligonali uguali e parallele si chiamano le *basi* del prisma, e la distanza di queste basi o la perpendicolare abbassata dall'una sopra l'altra è la sua *altezza*. Il prisma è *retto* o *obliquo* secondo che le sue costole laterali sono perpendicolari alle due basi, o che fanno un angolo obliquo con esse. Tutte le costole laterali sono uguali.

L'altezza del prisma retto è dunque uguale a ciascuna delle costole laterali, o uguale al *lato* del prisma. L'altezza del prisma obliquo è sempre minore del suo lato.

Un prisma ha tante facce laterali quanti lati hanno le sue basi. Se le basi sono poligoni di n lati, il numero totale delle sue facce sarà $n+2$, quello dei suoi vertici sarà $2n$, e quello delle sue costole sarà $3n$.

Un prisma dicesi *triangolare* (*Tav.* XXII, *fig.* 9), *quadrangolare*, *pentagonale*, *esagonale* (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 4), ec., secondo il numero dei lati di ciascuna delle sue basi. I suoi angoli solidi non sono mai composti che di tre angoli piani, qualunque sia il numero dei suoi lati.

Si dimostra che tutti i prismi delle stesse basi e della stessa altezza sono equivalenti tra loro, e che il volume di un prisma qualunque è uguale al prodotto dell'area di una delle sue basi per la sua altezza. (*Vedi* Solido).

PROBABILITA'. Se tutte le nostre cognizioni fossero accompagnate dalla *certezza*, come lo sono le proposizioni delle matematiche pure, i nostri giudizj determinerebbero sempre una convinzione piena ed intera intorno all'oggetto su cui versano, e questa convinzione sarebbe la stessa per tutti gli esseri ragionevoli. Ma ciò non ha luogo: la maggior parte della nostre cognizioni non sono che semplici opinioni più o meno fondate, più o meno *probabili*; donde nasce l'impossibilità in cui ci troviamo sì spesso di persuaderne gli altri.

Il primo grado della cognizione è la *congettura*: essa determina l'*opinione*; il secondo grado è la *convinzione*, che determina la *fede*; il terzo grado finalmente è la *certezza*, e questa determina la *scienza*. L'*opinione* spesso non è altro che un giuoco dell'immaginazione, senza il minimo rapporto colla verità e senza alcuna ragione sufficiente, nè obiettiva nè soggettiva, vale a dire nè nell'oggetto della cognizione, nè nel soggetto che conosce. La *fede* ha sempre una ragione sufficiente subiettiva. La *scienza* ha una ragione sufficiente subiettiva e obiettiva: essa è *certezza* per tutti.

Nelle questioni *speculative*, l'opinione ed anco la fede non meritano attenzione, perchè non possono esser comunicate agli altri colla stessa intensità. Sarebbe, per esempio, assurdo l'opinare in matematiche pure: bisogna o saperle o astenersene affatto. Ma, nelle questioni *pratiche*, la *fede* può raggiungere lo scopo più o meno felicemente. Per esempio, un medico esamina i sintomi di una malattia grave, giudica, poichè non può penetrare fino alla causa prima e nascosta, che questa malattia è una gastro-enterite o qualunque altro morbo, e sulla *fede* che in lui resulta dal suo giudizio ordina certi rimedj. Un altro medico avrebbe giudicato diversamente e forse meglio. Ma, qualunque sia il rapporto dei *mezzi* impiegati collo *scopo* reale da ottenersi, questo rapporto è sempre *fortuito*: la *fede* che serve di fondamento all'uso di questi mezzi è una *fede fortuita*: se lo scopo è raggiunto, ciò non avviene *necessariamente*, ma per Caso; il giudizio non ha determinata l'azione colla sua Certezza, ma unicamente colla sua Probabilità.

Ora, se la *certezza* non è suscettibile che di un grado, perchè essa o esiste o non esiste, la *probabilità* è suscettibile d'infiniti gradi, perchè può avvicinarsi o allontanarsi tanto maggiormente dalla certezza, secondochè il giudizio pratico si fonda sopra cognizioni più o meno reali: la *probabilità* può dunque *misurarsi*: come tale, le leggi dei numeri divengono ad essa applicabili, e questa applicazione forma l'oggetto di un ramo delle matematiche applicate che dicesi Calcolo delle Probabilità.

Il calcolo delle probabilità nacque nelle mani di Pascal e di Fermat nell'occasione di esaminare alcuni quesiti sui giuochi di azzardo; sviluppato poscia da Giacomo Bernoulli e da lui applicato agli eventi morali e politici, esteso da Montmort, Moivre e Daniele Bernoulli ad una moltitudine di questioni importanti, è divenuto finalmente pei lavori di Condorcet, di Lagrange e di Laplace una scienza feconda, i cui resultati non sono stati senza influenza sui progressi della civiltà. Noi esporremo primieramente le nozioni di questo calcolo, che illustreremo con alcuni esempj presi dai giuochi più conosciuti, e indicheremo quindi quali applicazioni importanti possano farsene.

1. Quando un avvenimento deve necessariamente accadere si dice che è *certo*. Quando al contrario esistono delle cause che possono impedire la sua apparizione, senza per altro che l'azione di queste cause sia necessaria, si dice che è soltanto *probabile*.

L'avvenimento è più o meno probabile secondo che il numero delle cause che possono produrlo supera quello delle cause che possono impedirlo.

2. Si dice *probabilità matematica* il rapporto che esiste tra il numero delle

cause che possono produrre l'avvenimento e il numero totale delle cause sì favorevoli che contrarie.

Se, per esempio, si trattasse di estrarre una palla bianca da un' urna che ne contenesse quattro di questo colore, è evidente che l'estrazione di questa palla bianca sarebbe *certa*; ma se l' urna non contenesse che una sola palla bianca e le altre tre fossero ognuna di un colore differente, l'estrazione della palla bianca non sarebbe più che *probabile*, e siccome allora vi sarebbero quattro avvenimenti egualmente possibili, ed uno solo di questi avvenimenti dà il resultato richiesto, la probabilità di ottenere questo resultato sarebbe dunque il *quarto* del numero degli avvenimenti possibili, e si esprimerebbe colla frazione $\frac{1}{4}$.

Parimente, se si trattasse di esprimere la probabilità di estrarre una palla bianca da un' urna che contenesse otto palle, sei delle quali bianche e le altre due nere, si osserverebbe che in otto avvenimenti tutti egualmente possibili sei producono il resultato richiesto, e si direbbe che la probabilità di prendere una palla bianca è eguale a $\frac{6}{8}$.

La certezza matematica è dunque espressa dall'*unità*, la probabilità da una *frazione*. Se questa frazione è maggiore di $\frac{1}{2}$, vi sono maggiori ragioni per credere all' apparizione dell' avvenimento che per dubitarne, e viceversa. Così, nel primo esempio, nel quale la probabilità è $\frac{1}{4}$, vi sono più casi contrarj che favorevoli all' estrazione della palla bianca, e nel secondo, nel quale la probabilità è $\frac{6}{8}$, sono più i casi favorevoli dei contrarj a questa estrazione. Pure, qualunque sia la probabilità, l'avvenimento rimane sempre indeterminato, e la sua apparizione non può dar luogo che ad una *scommessa* come si vedrà in seguito.

3. L' espressione fondamentale del calcolo delle probabilità, cioè il rapporto del numero dei casi favorevoli a quello di tutti i casi possibili, suppone necessariamente che i diversi casi siano tutti egualmente possibili, perchè se tali non fossero bisognerebbe prendere in considerazione ognuna delle loro possibilità respettive, ed allora la probabilità sarebbe la somma delle possibilità di ciascun caso favorevole.

Per esempio, per esprimere la probabilità di avere almeno una volta *arme* in due tiri nel giuoco del volgo detto *arme* o *testa*, si deve considerare che possono accadere quattro casi egualmente possibili, cioè:

Arme nel primo tiro e *Testa* nel secondo
Arme nel primo tiro e *Arme* nel secondo
Testa nel primo tiro e *Arme* nel secondo
Testa nel primo tiro e *Testa* nel secondo
} . . . . . (a).

Ora, i primi tre casi sono favorevoli all'avvenimento del quale si cerca la probabilità; perciò questa probabilità è eguale a

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Se nella stessa ipotesi si domandasse la probabilità di ottenere nei due tiri consecutivi prima *arme* e poi *testa*, siccome non vi ha che un caso solo che presenti questo resultato, la probabilità sarebbe espressa da $\frac{1}{4}$. Dicesi del volgo *giuoco di arme o testa*, quel giuoco che consiste nel gettare in aria una moneta, una delle cui facce presenta l'impronta d'un *arme* e l'altra quella di una *testa*; dopo la sua caduta, la faccia che rimane scoperta è quella che vince.

4. La probabilità del concorso di più avvenimenti dicesi *probabilità composta*, che si ottiene moltiplicando l'una per l'altra le probabilità semplici di ciascuno avvenimento. Per esempio, nel caso precedente, osservando che la probabilità di avere *arme* nel primo tiro è $\frac{1}{2}$, perchè non vi sono che due casi, e che in seguito la probabilità di avere *testa* nel secondo tiro è pure di $\frac{1}{2}$, perchè per questo secondo tiro vi sono egualmente gli stessi due casi, si concluderà che la probabilità composta di avere *arme* nel primo tiro e *testa* nel secondo è

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

come lo abbiamo già veduto dietro la semplice ispezione del quadro (a).

In generale, essendo $\frac{n}{m}$ la probabilità semplice di un avvenimento e $\frac{p}{q}$ la probabilità semplice di un altro avvenimento, la probabilità composta del loro concorso sarà $\frac{n}{m} \times \frac{p}{q}$.

Parimente, essendo sempre $\frac{n}{m}$ la probabilità semplice di un avvenimento, $\frac{n}{m} \times \frac{n}{m} = \frac{n^2}{m^2}$ sarà la probabilità che esso accada due volte di seguito, $\frac{n^3}{m^3}$ quella che accada tre volte di seguito, ec.

5. Qui fa d'uopo osservare che ogni avvenimento incerto dà luogo a due probabilità contrarie, cioè la probabilità che questo avvenimento accada, e quella che non accada. Per esempio, nel caso dell'urna contenente quattro palle di differenti colori, la probabilità di trovare la palla bianca in una sola estrazione è $\frac{1}{4}$, e la probabilità contraria a questo avvenimento è $\frac{3}{4}$, perchè vi sono tre avvenimenti contrarj all'estrazione particolare richiesta.

6. La somma delle probabilità contrarie e favorevoli di un avvenimento è dunque sempre eguale all'*unità*. Ed appunto perchè questa somma contiene tutti i casi possibili, si dice che la certezza matematica è espressa dall'unità (2).

7. Possiamo adesso riepilogare tutto ciò che precede nelle tre seguenti proposizioni, che contengono tutti gli elementi del calcolo delle probabilità.

I. *La probabilità semplice di un avvenimento si esprime con una frazione il cui numeratore è il numero dei casi favorevoli alla produzione di questo avvenimento, e il denominatore il numero di tutti i casi sì favorevoli che contrarj.*

II. *La probabilità composta del concorso di più avvenimenti è eguale al prodotto delle probabilità semplici di questi avvenimenti.*

III. *La somma della probabilità favorevole e della probabilità contraria ad un avvenimento è sempre eguale all' unità.*

Da quest' ultima proposizione resulta che essendo data una qualunque delle probabilità, favorevole o contraria, sottraendola dall' unità, si ottiene l' altra.

8. Se talvolta è alquanto difficile il valutare esattamente la probabilità semplice di un avvenimento, una difficoltà assai maggiore s' incontra nella valutazione della probabilità composta, nella quale è soprattutto importante il considerare il quesito in tutti gli aspetti, perchè il minimo errore nella valutazione della possibilità di ciascun resultato particolare ne trae seco necessariamente uno nel resultato finale. Per un errore di questo genere d' Alembert pretendeva che la probabilità di ottenere almeno una volta *arme* in due tiri fosse $\frac{2}{3}$, mentre al n.° 3 l' abbiamo trovata di $\frac{3}{4}$. Ecco su qual ragionamento fondava egli il suo calcolo: Se si ha *arme* al primo tiro, il giuoco è terminato; a se al contrario si ottiene *testa*, bisogna tirare una seconda volta, nella quale si avrà o *arme* o *testa*; così non si possono avere che questi tre avvenimenti

1 . . . . *Arme.*
2 . . . . *Testa* e *Arme.*
3 . . . . *Testa* e *Testa.*

E siccome va ne sono due che fanno vincere la scommessa, la probabilità è dunque $\frac{2}{3}$. L' errore consiste nell'attribuire la stessa possibilità a questi tre avvenimenti, e questo argomento vittorioso, col quale d' Alembert credeva di rovesciare da cima a fondo il calcolo delle probabilità, non prova che la sua precipitazione e la sua leggerezza abituale. Infatti, prima di cominciare il giuoco, la probabilità di avere *arme* nel primo tiro è $\frac{1}{2}$, e quella di avere *testa* nel primo tiro ed *arme* nal secondo è $\frac{1}{4}$ (3), così la probabilità di ottenere almeno una volta *arme* in due tiri è $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, come già avevamo trovato.

9. Se si cercasse qual sia la probabilità di fare almeno una volta il punto *sei* tirando due volte successivamente un dado ordinario, bisognerebbe parimente considerare tutti i casi possibili che possono resultare da questi due tiri, e la somma dei casi nei quali si trova il punto *sei* divisa per la somma totale dei casi sarebbe la probabilità cercata. Ora, i due tiri successivi possono dare indifferentemente una qualunque delle seguenti trentasei combinazioni dei punti del dado:

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

e siccome in questi trentasei casi, tutti egualmente probabili, ve ne sono 11 che contengono il punto 6, la probabilità è $\frac{11}{36}$.

Per calcolare questa probabilità senza essere obbligati a formare il quadro precedente, deve osservarsi che la probabilità semplice di avere il punto *sei* in un solo tiro essendo $\frac{1}{6}$, la probabilità contraria è $\frac{5}{6}$; così, se fosse proposto il problema inverso di trovare la probabilità di non fare il punto *sei* in due tiri successivi, si avrebbe questa probabilità formando (4) il prodotto delle due probabilità semplici $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Dunque essendo $\frac{25}{36}$ la probabilità di non fare il punto *sei* in due tiri successivi, quella di farlo sarà (7)

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

10. Il quadro di sopra riportato ci dimostra evidentemente quanto il numero dei casi aumenti col numero dei tiri, perchè tirando il dado una sola volta non si hanno che sei casi possibili, mentre tirandolo due volte di seguito se ne hanno 6 volte 6, ossia 36.

Si può colla stessa facilità vedere ancora che gettando il dado tre volte di seguito il numero dei casi possibili diverrà 6 volte 36 ossia 216, perchè ognuno dei 36 casi dei due primi tiri può combinarsi coi sei casi del terzo. Parimente il numero dei casi di quattro tiri sarà $6 \times 216 = 1296$; quello dei casi di cinque tiri $6 \times 1296 = 7776$, ec., e in generale il numero dei casi possibili che resultano da m tiri consecutivi sarà eguale a 6 moltiplicato m volte per sè stesso, ossia all' m^{sima} potenza di 6. Se s'indica con A il numero totale dei casi sì favorevoli che contrarj di un avvenimento in una sola prova, quello dei casi in m prove successive sarà eguale ad A^m.

11. Se si cercasse la probabilità di fare almeno una volta il punto *sei* in tre, quattro o cinque tiri successivi di uno stesso dado, ciò si otterrebbe facilmente calcolando queste probabilità, come abbiam fatto di sopra, per mezzo della probabilità contrarie.

In 3 tiri si avrebbe

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216},$$

In 4 tiri

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296},$$

In 5 tiri

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776}.$$

Ora, esaminando questi diversi resultati, si vede che la probabilità di fare il punto *sei*, che non è che $\frac{1}{6}$ in un solo tiro, diviene in cinque tiri $\frac{4651}{7776}$, cioè mag-

giore di $\frac{1}{2}$: dobbiamo dunque concludere che la probabilità aumenta col numero delle prove, e che è possibile l'avvicinarsi quanto si vuole all'unità, ossia alla certezza, aumentando sufficientemente il numero delle prove.

Così, per quanto sia poco probabile per sè stesso un avvenimento, quale sarebbe per esempio l'estrazione di una palla bianca da un'urna che ne contenga 40 nere ed una sola bianca, pure moltiplicando il numero delle estrazioni, gli si può dare quella probabilità che si vorrà: del resto s'intenda che dopo ogni estrazione si rimetta nell'urna la palla estratta per conservar sempre lo stesso numero dei casi primitivi. Infatti, se si cerca ciò che diverrà questa probabilità in una serie di 100 estrazioni, si trova, esprimendola frazione decimale, che è 0,91536, vale a dire un poco maggiore di $\frac{37}{41}$, e per conseguenza già assai vicina alla certezza. Infatti, la probabilità favorevole per l'estrazione della palla bianca e, in una estrazione, di $\frac{1}{41}$, e la probabilità contraria di $\frac{40}{41}$. In 100 estrazioni, la probabilità contraria (10) diviene $\left(\frac{40}{41}\right)^{100}$, e per conseguenza la probabilità favorevole

$$1-\left(\frac{40}{41}\right)^{100}=0,91526.$$

Aumentando ancora il numero delle estrazioni, si potrà rendere la probabilità di estrarre una palla bianca tanto poco diversa dalla certezza quanto possa desiderarsi.

12. Questa considerazione ha fatto nascere il seguente problema.

Determinare il numero delle prove necessarie perchè la probabilità di un avvenimento sia eguale ad una quantità data.

Per *prove*, intenderemo sempre i tiri successivi di uno stesso dado, o le estrazioni di numeri o di palle da un'urna nella quale si ripongano dopo ogni estrazione, onde le condizioni rimangano sempre le stesse.

Questo problema si risolve pure per mezzo della considerazione della probabilità contraria, poichè per ciò che precede la probabilità di non fare il punto *sei* in un solo tiro è eguale a $\frac{5}{6}$, e in un numero x di tiri diviene $\left(\frac{5}{6}\right)^x$, talchè la probabilità favorevole è allora

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^x,$$

e questa quantità che deve farsi eguale alla probabilità che si vuole avere, il che darà un'equazione dalla quale si trarrà il valore di x. Supponiamo, per esempio, che si cerchi quanti tiri occorrano per avere $\frac{1}{2}$ di probabilità; si porrà

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{1}{2},$$

donde si otterrà

$$\left(\frac{5}{6}\right)^x = \frac{1}{2}:$$

questa equazione, che non può risolversi che facendo uso dei logaritmi, darà

$$x = \frac{L2 - L1}{L6 - L5} = \frac{0,3010300}{0,0791813},$$

cioè presso a poco 4.

Perciò bisogna fare 4 tiri onde la probabilità di avere il punto *sei* almeno una volta sia eguale a $\frac{1}{2}$.

Se si volesse che questa probabilità fosse $\frac{2}{3}$, si farebbe

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x = \frac{2}{3},$$

donde si avrebbe

$$\left(\frac{5}{6}\right)^x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

e operando coi logaritmi

$$x = \frac{L3 - L1}{L6 - L5} = \frac{0,4771213}{0,0791813},$$

resultato un poco maggiore di 6.

In 7 tiri si avrà dunque una probabilità un poco maggiore di $\frac{2}{3}$ di ottenere almeno una volta il punto *sei*, e in 6 tiri si avrebbe per lo stesso avvenimento una probabilità un poco minore di $\frac{2}{3}$.

13. Per esporre in tutta la sua massima chiarezza il modo col quale il numero delle prove moltiplica i casi, consideriamo le disposizioni ossia le combinazioni di cui sono suscettibili varj oggetti. Tre oggetti, per esempio A, B e C, posson dare le nove seguenti disposizioni (*Vedi* Combinazione e Permutazione) combinandoli a due a due

AA,	BA,	CA
AB,	BB,	CB
AC,	BC,	CC

Ora, se questi tre oggetti fossero tre palle poste in un'urna e che se ne facessero due estrazioni successive, rimettendo nell'urna prima della seconda estrazione la palla estratta nella prima, è chiaro che le due estrazioni darebbero luogo ad una qualunque delle nove disposizioni accennate di sopra, e che la probabilità particolare di ognuna delle medesime sarebbe espressa dalla frazione $\frac{1}{9}$.

Si scorge egualmente che se si cercasse la probabilità di avere due palle dif-

ferenti A e B nelle due estrazioni, senza aver riguardo all' ordine nel quale esse vengono, questa probabilità sarebbe $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$, perchè vi sono due combinazioni AB e BA che soddisfanno a questa condizione.

Parimente, se si trattasse di esprimere la probabilità di ottenere in due estrazioni due palle differenti, senza indicare quali debbano essere, si vede che questa probabilità sarebbe

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9},$$

perchè vi sono sei combinazioni AB, BA, BC, CB, AC e CA che soddisfanno alla condizione richiesta.

Finalmente, tutti i problemi che possono proporsi tanto sulla probabilità assoluta di ciascun avvenimento, quanto sulla probabilità relativa di un avvenimento rispetto ad un altro, si trovano così risoluti mediante la semplice ispezione di queste combinazioni.

14. Se si trattasse di tre prove, bisognerebbe formare tutte le disposizioni a 3 a 3, e si avrebbe

AAA	BBB	CCC	
AAB	BBA	CCA	
AAC	BBC	CCB	
ABA	BAB	CAC	
ABB	BAA	CAA	. . . . . (*b*).
ABC	BAC	CAB	
ACA	BCB	CBC	
ACB	BCA	CBA	
ACC	BCC	CBB	

Per 4 prove si formerebbero le disposizioni a 4 a 4, e così di seguito. Ora, se si considera ognuna delle disposizioni precedenti come esprimente il prodotto di tre lettere, la loro somma non è evidentemente che lo sviluppo della potenza del trinomio A+B+C, perchè questo sviluppo (*Vedi* BINOMIO *ed* ELEVAZIONE) si compone di tutti i prodotti che si possono formare disponendo a 3 a 3 i termini A, B e C; e confrontando questo sviluppo

$$\begin{aligned}(A+B+C)^3 = A^3 &+ 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ &+ 3A^2C + 6ABC + 3B^2C \\ &+ 3AC^2 + 3BC^2 \\ &+ C^3\end{aligned}$$

col quadro (*b*), è chiaro che i suoi coefficienti numerici ci danno immediatamente il numero delle disposizioni particolari di ogni combinazione particolare. Così, i termini A^3, B^3, C^3 hanno l' unità per coefficiente, perchè ognuno dei gruppi AAA, BBB, CCC non ammette permutazione nessuna: il termine $3A^2B$ ha 3 per coefficiente, perchè il gruppo AAB ammette le tre permutazioni AAB, ABA, BAA, permutazioni che esprimono tutte lo stesso prodotto, ec. L' ispezione dei coefficienti dello sviluppo della potenza può dunque farci conoscere la probabilità di ognuna di queste disposizioni senza che sia necessario il formarle, il che

in molti casi riuscirebbe impraticabile. Così, il numero totale delle disposizioni essendo in questo caso 27, numero eguale alla somma dei coefficienti numerici,

$$1+3+3+1+3+6+3+3+3+1=27,$$

la probabilità di ciascuna disposizione particolare è $\frac{1}{27}$; quella di una combinazione in cui A si trovi due volte e B una volta, senza fare osservazione all'ordine di queste lettere è $\frac{3}{27}$; quella di una disposizione in cui si trovino tutte e tre le lettere A, B, C, senza egualmente aver riguardo all'ordine loro, è $\frac{6}{27}$, e così di seguito.

15. Da queste considerazioni resulta che se s' indica in generale con a il numero dei casi di un avvenimento A e con b il numero dei casi di un altro avvenimento B, in una sola prova, $(a+b)^m$ sarà il numero totale dei casi in un numero m di prove, e lo sviluppo di questa potenza offrirà tutti i casi che si riferiscono a ciascuna combinazione particolare. Così, in questo sviluppo

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+mab^{m-1}+b^m$$

il primo termine a^m indica il numero dei casi che in un numero m di prove danno m volte l'avvenimento A, il secondo termine $ma^{m-1}b$ indica il numero dei casi che danno $m-1$ volte il primo avvenimento A ed una volta l'avvenimento B, senza fare osservazione all'ordine della loro apparizione, e così di seguito.

Dividendo dunque ognuno di questi termini pel numero totale dei casi, che è $(a+b)^m$, si avranno le probabilità di ognuna delle successioni di avvenimenti semplici alle quali si riferiscono.

Quasi sempre basta considerare il termine generale dello sviluppo, che è

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots\ldots\mu}a^{m-\mu}b^{\mu}\ldots\ldots\ldots(c),$$

per risolvere i problemi che possono esser proposti; il che passeremo ora a schiarire con alcuni esempj.

16. *Problema I.* Determinare la probabilità di avere in 8 prove successive del giuoco di *arme* o *testa*, 5 volte *arme* e per conseguenza 3 volte *testa*.

In questo caso si ha $m=8$; facendo dunque $\mu=3$, il termine generale (c) diviene

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot}{1\cdot 2\cdot 3\cdot}a^5\cdot b^3=56a^5b^3,$$

perciò, siccome si ha $a=1$ e $b=1$, questo numero di casi è eguale semplicemente a 56; ma il numero totale dei casi è

$$(a+b)^8=2^8=256,$$

dunque la probabilità cercata è $\frac{56}{256}$.

Problema II. Determinare la probabilità di fare 8 volte di seguito *arme* in 8 prove.

In questa combinazione non dovendo trovarsi *testa*, si farà $\mu=0$; così, avendosi sempre $m=8$, il termine generale (c) diviene $a^8=1$, a motivo di $a=1$, e la probabilità cercata è $\frac{1}{256}$. È chiaro che nelle 256 combinazioni possibili non ve ne è che una sola che presenti l'avvenimento di cui si tratta.

Problema III. Trovare la probabilità di fare almeno una volta il punto *sei* tirando quattro volte un dado ordinario.

Il numero dei casi favorevoli al punto *sei* in ciascun tiro essendo 1, e il numero dei casi contrarj essendo 5, si avrà $a=1$ e $b=5$, e di più $m=4$. Ma in questo caso si debbono formare tutti i termini che contengono l'avvenimento a, perchè nell'enunziato del quesito si considerano non solo i casi che non presentano che una sola volta la faccia *sei*, ma quelli ancora che la presentano 2 volte, 3 volte, 4 volte. Questi termini sono

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3,$$

donde facendo il calcolo si ottiene

$$1+20+150+500=671.$$

Ora il numero totale delle combinazioni è

$$(1+5)^4=6^4=1296,$$

dunque la probabilità cercata è $\frac{671}{1296}$, vale a dire un poco maggiore di $\frac{1}{2}$.

In tutti i casi simili sarà assai più semplice il considerare la probabilità contraria, perchè nello sviluppo

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

che comprende tutti i casi possibili, si vede che il termine b^4, che non contiene a, esprime esattamente il numero dei casi contrarj alla combinazione che si considera, e che perciò

$$\frac{b^4}{(a+b)^4},$$

è la probabilità che questo caso non avvenga; dunque la probabilità favorevole (7) sarà data immediatamente dall'espressione

$$1-\frac{b^4}{(a+b)^4},$$

vale a dire nel nostro caso da

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$$

come erasi trovato col metodo diretto.

Se si fosse domandata la probabilità di avere una sola volta il punto *sei* in 4 tiri, non avrebbesi avuto bisogno che di considerare il termine dello sviluppo

che contiene una sola volta il caso che dà il punto *sei*. Così, facendo nell'espressione (*c*) $m-\mu=1$, donde $\mu=m-1=3$, si sarebbe avuto

$$\frac{4.3.2}{1.2.3}ab^3=4.1.5^3=500,$$

e per conseguenza la probabilità sarebbe $\frac{500}{1296}$.

Problema IV. Determinare la probabilità di fare precisamente due volte il punto *sei*, tirando cinque volte un dado ordinario.

Siccome in questo caso non dobbiamo considerare che le sole combinazioni che contengono 2 volte il punto *sei*, si farà nel termine generale (*c*) $a=1$, $b=5$, $m=5$ e $\mu=3$, e si troverà

$$\frac{5.4.3}{1.2.3}(1)^2(5)^3=1250.$$

La probabilità cercata è dunque $\frac{1250}{7776}$, perchè il numero totale dei casi è

$$(1+5)^5=7776.$$

17. Se si trattasse delle probabilità relative a più di due avvenimenti, s'indicherebbe con a, b, c, d, ec. il numero dei casi relativi a ciascuno avvenimento e con m il numero delle prove, e il termine generale dello sviluppo della potenza

$$(a+b+c+d+e+\text{ec.})^m$$

risponderebbe a tutti i quesiti che potessero farsi.

Questo termine generale, per ciò che abbiamo esposto all'articolo Elevazione, è

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\ldots\ldots 1}{(1.2\ldots n)(1.2\ldots p)(1.2\ldots q)(1.2\ldots r)\,\text{ec.}}\,a^n b^p c^q d^r \text{ ec.}$$

nel quale si ha

$$n+p+q+r+\text{ec.}=m.$$

18. Confrontando tra loro le probabilità respettive dei diversi avvenimenti composti che possono accadere in un numero dato di prove, si scorge senza difficoltà che il più probabile di questi avvenimenti è quello nel quale i numeri degli avvenimenti semplici stanno tra loro nel rapporto dei loro casi primitivi. Infatti, dal quadro (*b*) si vede che se i tre avvenimenti A, B, C hanno ognuno la stessa probabilità in una sola prova, in tre prove potranno formare uno qualunque dei 27 avvenimenti composti del quadro: ma tra questi 27 avvenimenti composti

1 soltanto si compone di tre volte A.
1 . . . . di tre volte B.
1 . . . . di tre volte C.
3 si compongono di due volte A e una volta B.
3 . . . . di due volte A e una volta C.
3 . . . . di due volte B e una volta A.
3 . . . . di due volte B e una volta C.
3 . . . . di due volte C e una volta A.
3 . . . . di due volte C e una volta B.
6 di una volta A, di una volta B e di una volta C.

Così, l'avvenimento il più probabile, relativamente ad ognuno degli altri, è quello che contiene A, B, C.

Per esporre questa proposizione importante in tutta la sua luce, consideriamo unicamente due avvenimenti A e B, i cui casi possibili siano respettivamente a e b: in forza del n.° 15, in m prove, il numero dei casi dell'avvenimento composto che contiene A $m-\mu$ volte, e B μ volte, è

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\mu}a^{m-\mu}b^{\mu}.$$

Ora, supponendo che il numero dei casi favorevoli a ciascun avvenimento semplice A e B sia lo stesso, vale a dire che si abbia $a=b$, la quantità precedente si riduce a

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\mu}a^{m-\mu}a^{\mu},$$

e siccome il fattore $a^{m-\mu}a^{\mu}=a^{m}$ è lo stesso in ogni termine, la grandezza dei termini dipende unicamente dal coefficiente

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\mu},$$

vale a dire che l'avvenimento composto che ha un maggior numero di casi favorevoli è quello il cui coefficiente è il maggiore.

Ma se si esamina la formazione dei coefficienti delle potenze successive del binomio $a+b$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

ec.

è facile il riconoscere che nelle potenze pari il termine di mezzo è quello che ha il massimo coefficiente, e che nelle potenze impari i due termini consecutivi del mezzo hanno coefficienti eguali e maggiori di tutti gli altri: sono dunque gli avvenimenti composti che corrispondono a questi coefficienti che hanno la massima probabilità relativa. Così, prendendo per esempio il giuoco di *arme* o *testa*, giuoco al quale possono ridursi tutti quelli che presentano due avvenimenti opposti di un numero eguale di casi possibili, gli avvenimenti composti i più probabili saranno, in due prove, una volta *arme* e una volta *testa*; in tre prove, 2 volte *arme* e una volta *testa*, ovvero 2 volte *testa* e una volta *arme*; in quattro prove, 2 volte *arme* e 2 volte *testa*, ec.; il che conduce alla proposizione del n.° 18 almeno nel caso in cui gli avvenimenti semplici hanno il medesimo numero di casi possibili.

19. Se, aumentando il numero delle prove, la probabilità dell'avvenimento composto che contiene ogni avvenimento semplice nel rapporto del numero dei suoi casi possibili è sempre, relativamente, più grande della probabilità di qualunque altro avvenimento composto, lo stesso non avviene della sua probabilità assoluta, perchè quest'ultima diminuisce a misura che il numero delle prove au-

meota, e può divenire piccola quanto si voglia moltiplicando sofficientemente il numero delle prove.

Per esempio, in 4 prove, il numero dei casi dell'avvenimento composto che contiene 2 volte *arme* e 2 volte *testa* essendo eguale a 6, la probabilità assoluta di questo avvenimento è $\frac{6}{(1+1)^4}=\frac{6}{16}$; in 6 prove, il numero dei casi dell'avvenimento composto che contiene 3 volte *arme* e 3 volte *testa* è eguale a 20, e la sua probabilità assoluta è $\frac{20}{(1+1)^6}=\frac{20}{64}$; in 8 prove, la probabilità di 4 volte *arme* e 4 volte *testa* è eguale a $\frac{70}{256}$; donde si vede che la probabilità assoluta di avere *arme* e *testa* un egual numero di volta diminuisce successivamente, perchè le frazioni $\frac{6}{16}$, $\frac{20}{64}$, $\frac{70}{256}$ ec. divengono sempre più piccole. Per 100 prove, questa probabilità si riduce a circa $\frac{1}{13}$.

Questa diminuzione della probabilità assoluta resulta dall'aumento del numero degli avvenimenti composti prodotto dall'aumento del numero delle prove: così, finchè si considera una sola classe di questi avvenimenti composti, non dobbiamo maravigliarci di vedere diminuire la sua probabilità. Cercare di avere, in 100 prove, 50 volte *arme* e 50 volte *testa* è lo stesso che cercare un solo avvenimento fra 101 che possono presentarsi. Gli altri 100 sono per verità meno probabili di questo, considerandoli ognuno in particolare, ma il loro complesso dà una probabilità contraria che supera di molto la probabilità favorevole all'avvenimento di 50 volte *arme* e 50 volte *testa*.

Se si considerano altre classi di avvenimenti composti, la loro probabilità assoluta si vedrà decrescere anco più rapidamente a misura che il numero delle prove aumenta. Infatti, la probabilità di avere *arme* un numero di volte doppio di *testa*, che in 3 prove è eguale a $\frac{3}{8}$, diviene $\frac{15}{64}$ in 6 prove, $\frac{84}{512}$ in 9 prove, ec. La probabilità di avere *arme* tre volte più di *testa* è, in 4 prove, eguale a $\frac{4}{16}$, in 8 prove a $\frac{28}{256}$, ec. In generale, quanto più il rapporto del numero delle *armi* a quello delle *teste* si allontana dall'unità, in un avvenimento composto, tanto più la probabilità assoluta di questo avvenimento decrescerà rapidamente all'aumentarsi del numero delle prove.

20. Tutto quello che fin qui abbiamo detto per la circostanza in cui gli avvenimenti semplici A e B hanno lo stesso numero di casi possibili, si estende alla circostanza che questi avvenimenti abbiano un numero diverso di casi; vale a dire che l'avvenimento composto più probabile relativamente a tutti gli altri è pure quello nel quale il numero degli avvenimenti A sta a quello degli avvenimenti B nel rapporto delle probabilità semplici di questi avvenimenti, e che la probabilità assoluta di un avvenimento composto decresce tanto più rapidamente, per l'aumento del numero delle prove, quanto più il rapporto degli avvenimenti semplici che vi sono combinati differisce dal rapporto delle loro probabilità respettive. Queste proposizioni si dimostrano coll'esame dei valori che prendono successivamente i termini dello sviluppo di $(a+b)^m$, dando all'esponente m dei valori sempre più

grandi. I limiti di questo Dizionario non permettono di fermarci più a lungo su questo particolare.

21. Torniamo un momento a fermare gli occhi sulle disposizioni delle quali sono suscettibili diversi oggetti, disponendoli in gruppi, perchè questo metodo semplicissimo è quello che può gettare maggior luce sulle probabilità composte. Da ciò che precede resulta che le disposizioni ad m ad m di due oggetti A e B rappresentano tutti gli avvenimenti che possono accadere in m prove, e che sono composti di due avvenimenti semplici aventi il medesimo numero di casi possibili. Per esempio, le disposizioni a 4 a 4

AAAA	AAAB	AABB	ABBB	BBBB
	AABA	ABAB	BABB	
	ABAA	BAAB	BBAB	
	BAAA	ABBA	BBBA	
		BABA		
		BBAA		

offrono i 16 avvenimenti composti, aventi ognuno $\frac{1}{16}$ per l'espressione della loro probabilità respettiva, che possono esser prodotti indifferentemente in quattro prove successive nel giuoco di *arme* o *testa*, indicando qui con A *arme* e con B *testa*, o più generalmente essendo A e B due avvenimenti semplici opposti egualmente probabili.

Ora, considerando isolatamente ognuno di questi avvenimenti composti, nessuno è più probabile degli altri, e quello che dà A quattro volte di seguito, AAAA, ha rigorosamente la stessa probabilità di quello che dà due volte A e poi due volte B, AABB; e lo stesso avviene di qualunque altro. Ma, se non si vuol considerare l'ordine nel quale possono presentarsi A e B, è chiaro che l'avvenimento composto che contiene 2 volte A e 2 volte B ha un numero di casi possibili 6 volte più grande di quello che contiene A quattro volte, il che significa che le probabilità respettive di questi avvenimenti stanno tra loro come $\frac{6}{16}$ a $\frac{1}{16}$.

Si possono dunque riunire in una sola classe più avvenimenti composti differentissimi, per confrontare la probabilità dell'apparizione di uno qualunque di questi avvenimenti con ognuno degli altri in particolare od anco colla probabilità del loro complesso. In tal guisa si trova che la probabilità di avere 2 volte A e 2 volte B sta a quella di avere tre volte A ed una volta B come 6 a 4, e che questa stessa probabilità sta a quella di un avvenimento qualunque che non contiene 2 volte A e 2 volte B come 6 a 10. Se non si formassero che due sole classi di avvenimenti, l'una contenente tutti quelli nei quali si trovano tutti e due gli avvenimenti semplici A e B, e l'altra quelli in cui non si trova che il solo avvenimento A o il solo avvenimento B, queste due classi opposte avrebbero per le loro probabilità respettive $\frac{14}{16}$ e $\frac{2}{16}$, vale a dire che starebbero tra loro come 14 a 2, o, il che è lo stesso, come 7 a 1. Per conseguenza si avrebbe una probabilità sette volte maggiore scommettendo per la prima classe che

per la seconda. Qui si tratta sempre di 4 prove, perchè se si aumentasse il numero delle prove, questo rapporto aumenterebbe in un modo rapidissimo. Per esempio, in cinque prove, il numero degli avvenimenti composti che non contengono che A o B è sempre 2, mentre quello di tutti gli altri diviene 30; per sei prove, quest' ultimo diviene 62, per 7 prove, 126, ec. Così la probabilità di un avvenimento qualunque della prima classe sta alla probabilità di un avvenimento qualunque della seconda

in 4 prove, come	7 : 1
5	15 : 1
6	31 : 1
7	63 : 1
ec.	ec.

La seconda classe di avvenimenti diviene dunque sempre meno probabile, e, moltiplicando sufficientemente il numero delle prove, si può sempre rendere la probabilità della prima prossima alla certezza quanto si voglie.

Si otterrebbe pure lo stesso resultato dando maggiore estensione alla seconda classe di avvenimenti; per esempio, facendole abbracciare tutti gli avvenimenti composti che contengono una sola volta A o una sola volta B. Avremmo allora due classi opposte, la prima delle quali contiene tutti gli avvenimenti nei quali si trova A e B almeno due volte, e la seconda contiene tutti quelli nei quali non si trova A o B, o non vi si trova che una sola volta.

Il numero dei casi possibili di ciascuno avvenimento composto essendo dato dal coefficiente del termine che rappresenta questo avvenimento (15), nello sviluppo del binomio $(a+b)^m$, si vede immediatamente che in quattro prove tutti i casi possibili essendo

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

la prima classe ne comprende 6 e la seconda 10.

Che in 5 prove i casi possibili divenendo

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

la prima classe ne comprende 20 e la seconda 12.

Che in 6 prove tutti i casi possibili divenendo

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6,$$

la prima classe ne comprende 50 e la seconda 14.

La probabilità di un avvenimento qualunque della prima classe sta dunque alla probabilità di un avvenimento qualunque della seconda

in 4 prove, come	3 : 5
5	5 : 3
6	25 : 7
ec.	ec.

donde si scorge che la probabilità della prima classe di avvenimenti diviene sempre più grande comparativamente a quella della seconda, e che moltiplicando sufficientemente il numero delle prove possiamo renderla grande quanto si vuole.

22. In generale, qualunque estensione possa darsi alla seconda classe di avvenimenti, siccome il numero dei casi che sono in esse compresi è dato dalla som-

ma dei coefficienti dei primi e degli ultimi termini delle potenze del binomio, mentre il numero dei casi della prima classe è dato dalla somma dei coefficienti dei termini del mezzo; che inoltre il numero dei termini della seconda classe rimane sempre lo stesso, mentre quello dei termini della prima classe cresce continuamente mediante l'aumento del numero delle prove, è evidente che la probabilità assoluta della prima classe potrà sempre divenire tanto grande quanto si voglia aumentando il numero delle prove.

Non si deve perder di vista che la prima classe degli avvenimenti composti della quale adesso parliamo è formata dalla riunione dei termini il cui valore è il più grande prima e dopo il termine di mezzo, che è il più grande di tutti nelle potenze di esponente pari, e prima e dopo i due termini eguali del mezzo, che sono i più grandi di tutti nelle potenze di esponente impari.

23. Le considerazioni precedenti ci conducono all'importante proposizione di Giacomo Bernoulli, della quale è questo l'enunciato:

Si può sempre assegnare un numero tale di prove che dia una probabilità prossima alla certezza quanto si voglia, che il rapporto del numero delle ripetizioni dello stesso avvenimento a quello delle prove non si allontanerà dalla probabilità semplice di questo avvenimento al di là di certi limiti dati, per quanto ristretti vogliano supporsi questi limiti.

Per ischiarire questa proposizione, supponiamo che l'avvenimento di cui si tratti sia quello di avere *arme* nel giuoco di *arme o testa*: la probabilità semplice di questo avvenimento essendo $\frac{1}{2}$, dobbiamo dimostrare che aumentando successivamente il numero m delle prove, vi è una probabilità sempre crescente, che è quella di avere *arme* un numero n di volte tale che $\frac{n}{m}$ differisca da $\frac{1}{2}$ quanto poco si voglia.

Prendiamo per limiti $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$. In cinque prove, tutti i casi possibili sono espressi da

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

e siccome qui non hanno da considerarsi che gli avvenimenti che contengono *arme* almeno 2 volte e al più 3, il numero di questi avvenimenti è dato dalla somma dei termini

$$10a^3b^2+10a^2b^3=20,$$

poichè $a=1$ e $b=1$.

In 5 prove, la probabilità è dunque $\frac{20}{2^5}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$.

Consideriamo ora 10 prove: siccome i $\frac{3}{5}$ di 10 sono 6, e i $\frac{2}{5}$, 4, così si dovranno raccogliere tutti gli avvenimenti nei quali si trovano al più 6 *armi* e almeno 4 *armi*, avvenimenti il cui numero è dato dalla parte

$$210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6$$

dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$. Il numero di questi avvenimenti è dunque 672, e la probabilità cercata diviene $\frac{672}{2^{10}}=\frac{672}{1024}$, numero più grande di $\frac{5}{8}$.

In 20 prove, siccome i $\frac{3}{5}$ di 20 sono 12, e i $\frac{2}{5}$, 8, dovrà considerarsi, nello sviluppo di $(a+b)^{20}$, la parte

$$125970a^{12}b^{8}+167960a^{11}b^{9}+184756a^{10}b^{10}+167960a^{9}b^{11}$$
$$+125970a^{8}b^{12},$$

che ci dà 772616 pel numero dei casi. La probabilità cercata è dunque

$$\frac{772616}{2^{20}}=\frac{96577}{131072},$$

numero più grande di $\frac{672}{1024}$.

Per 100 prove, la probabilità diviene circa $\frac{96}{100}$, e può così approssimarsi sempre più quanto si vuole all' unità ossia alla certezza. Se si scegliessero dei limiti più ristretti di $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$, la probabilità crescerebbe meno rapidamente, ma si avvicinerebbe egualmente all' unità quanto si volesse.

La dimostrazione generale della proposizione di Bernoulli esige delle particolarità che non possono qui trovar luogo.

24. Prima che il calcolo delle probabilità formasse un corpo di dottrina, era generalmente ammesso nei giuochi di azzardo, che la messa di ciascun giuocatore fosse proporzionale al numero dei casi a lui favorevoli; vale a dire, per esempio, che un giuocatore che avesse scommesso per la presentazione di una determinata faccia nel tiro di un dado ordinario, contro un altro giuocatore che prendesse a suo favore le altre cinque facce, non doveva porre nel giuoco che la quinta parte di ciò che vi metteva il suo avversario. La giustizia di questa convenzione, che si presenta subito naturalissima, diviene assai più evidente quando il calcolo ci dimostra che, moltiplicando indefinitamente il numero delle prove, ogni avvenimento semplice deve verificarsi nel rapporto della sua probabilità, e che così quegli che scommette per una delle facce del dado, deve alla lunga ottenerla precisamente una volta in sei, il che finisce col compensare esattamente la perdita col guadagno, condizione necessaria in qualunque scommessa basata su termini giusti. Ma se il semplice buon senso è sufficiente per regolare la messa dei giuocatori, nei giuochi nei quali i casi possibili sono poco numerosi e facilmente determinabili, non è così pei giuochi complicatissimi ed anco per le diverse convenzioni di cui i giuochi semplici sono suscettibili. Siccome sono i quesiti di questo genere che hanno dato origine al calcolo delle probabilità, crediamo utile il consacrar loro alcune parole.

Si dice *regola dei partiti* la regola secondo la quale, se un giuoco rimane interrotto prima che sia terminato, deve farsi tra i giuocatori la divisione della somma da essi depositata in principio. Onde questa divisione si effettui in un modo giusto, ogni giuocatore deve necessariamente ricevere una somma proporzionale alla probabilità che ha di vincere la partita se questa si seguitasse fino al suo termine. Ecco il più semplice dei problemi al quale si applica la *regola dei partiti.*

In un giuoco d'azzardo composto di due casi perfettamente eguali, due giuocatori, che giuocano a chi avrà il primo guadagnato tre punti, si separano

senza terminare la partita quando il primo ha guadagnato due punti ed il secondo uno. Si domanda come debbono tra loro dividersi i denari messi al giuoco.

Questo problema fu proposto a Pascal e a Fermat dal cavaliere di Meré che non aveva potuto risolverlo. Roberval non vi riuscì, benchè fosse ben altro geometra che il cavaliere, dal quale non si conoscono oggi che i falsi ragionamenti sulle probabilità riportati in una delle lettere di Pascal. Ecco la soluzione di quest' ultimo.

Quando due giuocatori, dice Pascal, hanno posto al giuoco il loro danaro, vale a dire quando ne hanno abdicata la proprietà per rimetterne la decisione alla sorte, e che dopo alcuni tiri si voglion separare senza aspettare la fine del giuoco, è chiaro che se avessero un numero eguale di punti avrebbero l' uno e l' altro una eguale speranza di vincere, un diritto eguale sulla somma depositata; dovrebbero dunque dividerla egualmente. Ma se prima dell' ultimo tiro che gli ha posti a condizioni eguali avessero voluto separarsi, il giuocatore che ha un maggior numero di punti avrebbe potuto dire: Se io perdo nel tiro che siamo per fare, ci troveremo ambedue in condizioni eguali, e interrompendo allora il giuoco prenderò la metà della messa totale; ecco dunque intanto una metà di questa somma che mi appartiene, qualunque sia l' evento del tiro che siamo per fare; dunque non è che l' altra metà che vien rimessa alla decisione della sorte; perciò potendo il tiro che siamo per fare essermi sì favorevole che contrario, ho diritto alla metà di questa metà, che unita alla metà già acquistata forma i tre quarti della somma depositata.

La soluzione di Fermat è più diretta e dà un metodo per regolarsi in altri quesiti simili. Al punto nel quale trovasi ridotta la partita, dice egli, è evidente che deve esser decisa in due tiri al più. Vediamo dunque quali saranno tutte le differenze alternative di vincita o di perdita che possono aver luogo in due tiri; il primo giuocatore può in primo luogo vincerli tutti e due, o perdere il primo e vincere il secondo, o vincere il primo e perdere il secondo, o perderli tutti e due; così tutte queste alternative possono essere espresse dalle differenti combinazioni delle lettere a e b prese a due a due, e che sono aa, ab, ba, bb. Ora, tra tutti questi tiri o combinazioni di vincita e di perdita, ve ne sono tre favorevoli al giuocatore che ha più punti, e il loro numero totale non è che di quattro, così la probabilità che ha di vincere è $\frac{3}{4}$, mentre quella del suo avversario non è che di $\frac{1}{4}$; essi debbonsi dunque dividere la massa totale nel rapporto di 3 a 1, vale a dire che il primo ne prenderà i tre quarti e il secondo un quarto.

La considerazione delle probabilità composte, di cui Moivre fu il primo a fare uso in un modo generale nella sua *Doctrine of Chances*, risolve anco più facilmente questo quesito. Infatti, se fosse stato giuocato un tiro di più ed il primo giuocatore lo avesse vinto, avrebbe avuto la messa totale; così, siccome il giuoco è eguale, ha in primo luogo una probabilità di $\frac{1}{2}$: se poi non vincesse in questo tiro, ognuno dei due giuocatori avendo allora due punti, il tiro successivo deciderebbe della loro sorte; ma la probabilità che debba giuocarsi quest' ultimo tiro è $\frac{1}{2}$, così la probabilità di vincerlo pel primo giuocatore è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, e lo

stesso ha luogo per il secondo. Dunque il primo giuocatore ha per la sua probabilità totale di vincere $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, mentre il secondo ha soltanto $\frac{1}{4}$.

Se si supponessero tre giuocatori, e che al primo mancasse un punto, al secondo due, e al terzo tre; ragionando nella stessa maniera si troverebbe che la probabilità semplice per ognuno essendo di $\frac{1}{3}$ e la partita dovendo essere terminata in 4 tiri al più, la probabilità totale della vincita sarebbe

pel primo $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{19}{27}$,

pel secondo $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{27}$,

pel terzo $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$.

Perciò bisognerebbe dividere la messa in modo che il primo ne avesse i $\frac{19}{27}$, il secondo i $\frac{6}{27}$ e il terzo i $\frac{2}{27}$.

25. Fin qui abbiamo considerato come noto il numero dei casi che danno luogo ad un avvenimento, ed abbiamo determinato *a priori* la probabilità di questo avvenimento: supporremo ora che questo numero sia incognito, e che per determinare la probabilità dell'apparizione futura dell'avvenimento non si abbia che l'osservazione delle sue apparizioni precedenti.

Per rendere più chiaro questo nuovo punto di vista, prendiamo l'esempio proposto da Condorcet di un'urna contenente 4 palle, delle quali alcune siano bianche ed altre nere, ma che non si sappia quante ve ne siano di ciascuna specie. Supponiamo che in 4 prove, dopo ognuna delle quali la palla estratta sia stata sempre rimessa nell'urna, si siano avute tre palle bianche ed una nera, e proponiamoci di trovare la probabilità di avere una palla bianca in una quinta prova.

Ora, noi possiamo supporre che l'urna contenga o

3 palle bianche ed 1 nera, il che dà $a=3$, $b=1$
2 . . . . 2 . . . . $a=2$, $b=2$
1 . . . . 3 . . . . $a=1$, $b=3$

indicando con a il numero incognito delle palle bianche e con b quello delle nere.

Ora, si sa (15) che il numero dei casi possibili dell'avvenimento composto dell'estrazione di 3 palle bianche e di una palla nera è

$$4a^3b,$$

dunque, sostituendo in questa espressione i valori di a e di b relativi ad ognuna delle ipotesi, si otterrà il numero dei casi possibili che in ognuna di queste ipotesi appartiene all'avvenimento composto che si considera.

Così si avrà

27, 16, 3;

e l'ipotesi che dà il maggior numero di casi è pure quella che è più probabile delle altre, perchè meglio si accorda colla possibilità dell'avvenimento osservato.

Siccome le tre ipotesi abbracciano tutti i casi possibili, una di esse deve necessariamente aver luogo; perciò la somma delle loro probabilità deve essere eguale all'unità; e siccome, in quest'esempio, le probabilità sono proporzionali ai numeri 27, 16, 3, la cui somma è 46, così si trovano esse espresse dalle frazioni

$$\frac{27}{46},\ \frac{16}{46},\ \frac{3}{46}.$$

Osserviamo adesso che per estrarre una palla bianca, in una nuova prova, la probabilità della prima ipotesi essendo $\frac{27}{46}$, e quella di ottenere una palla bianca essendo in questa ipotesi $\frac{3}{4}$, la probabilità del concorso di questi due avvenimenti è $\frac{27}{46}\times\frac{3}{4}$. Parimente, per l'estrazione di una palla bianca nella seconda ipotesi si ha $\frac{16}{46}\times\frac{2}{4}$, e nella terza ipotesi $\frac{3}{46}\times\frac{1}{4}$. Queste tre probabilità $\frac{27}{46}\times\frac{3}{4}$, $\frac{16}{46}\times\frac{2}{4}$, $\frac{3}{46}\times\frac{1}{4}$ debbono sommarsi, perchè si riferiscono tutte alla stessa unità che rappresenta la certezza, e costituiscono per conseguenza tre parti della probabilità domandata.

Si ha dunque per la probabilità dell'apparizione di una palla bianca nella quinta estrazione

$$\frac{27}{46}\times\frac{3}{4}+\frac{16}{46}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{46}\times\frac{1}{4}=\frac{116}{184}.$$

Nella stessa guisa si troverebbe per la probabilità dell'uscita di una palla nera

$$\frac{27}{46}\times\frac{1}{4}+\frac{16}{46}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{46}\times\frac{3}{4}=\frac{68}{184}.$$

Analizzando l'andamento da noi tenuto è facile lo scorgere che esso riposa interamente sui tre seguenti principj.

I. *Le probabilità delle ipotesi stabilite sono proporzionali ai numeri dei casi che queste ipotesi danno per gli avvenimenti osservati.*

II. *Le probabilità delle diverse ipotesi si formano dividendo il numero dei casi possibili dell'avvenimento composto in ciascuna ipotesi per la somma dei casi in tutte le ipotesi.*

III *La probabilità di un nuovo avvenimento semplice si ottiene formando la somma dei prodotti delle probabilità delle ipotesi per quelle dell'avvenimento prese in ciascuna ipotesi.*

26. Dietro i principj precedenti si posson costruire delle formule generali applicabili a tutti i casi particolari, e dedur quindi da queste formule le leggi della probabilità *a posteriori*. Ma queste formule, d'altronde assai complicate, esigono l'uso del calcolo integrale, e la loro deduzione oltrepassa i limiti che ci sono assegnati. Noi possiamo soltanto accennare le loro principali conseguenze.

Supponiamo che, nel caso dell'urna contenente quattro palle, si siano fatte quattro nuove estrazioni e che si siano egualmente ottenute tre palle bianche ed una nera; allora i nostri dati sono un avvenimento composto dell'apparizione di sei palle bianche e di due nere, il numero di casi del quale è (15)

$$\frac{8.7}{1.2}a^6b^2.$$

Dando successivamante ad a e a b i valori corrispondenti ad ognuna delle ipotesi, si otterranno i tre numeri

$$729, \quad 256, \quad 9,$$

e siccome la somma di questi tre numeri è 994, le probabilità delle ipotesi divengono

$$\frac{729}{994}, \quad \frac{256}{994}, \quad \frac{9}{994}.$$

Confrontando questi valori con quelli resultanti dalle prime quattro prove

$$\frac{27}{46}, \quad \frac{16}{46}, \quad \frac{3}{46},$$

si vede che la probabilità della prima ipotesi, quella cioè di 3 palle bianche ed una nera, è divenuta assai più grande, mentre le altre sono diminuite.

Dodici estrazioni, che dessero nove palle bianche e tre nere, farebbero crescer di più la probabilità della prima ipotesi e diminuire quella delle altre; e finalmente, ammettendo che in un numero grandissimo di estrazioni il rapporto delle apparizioni delle palle bianche a quelle delle palle nere fosse quello di 3 a 1 o non ne differisse che pochissimo, l'ipotesi di tre palle bianche ed una nera nell'urna acquisterebbe un valore tanto più grande o differirebbe tanto meno dalla certezza quanto più grande fosse il numero delle prove.

Ciò resulta naturalmente dalla proposizione fondamentale di Bernoulli, perchè, siccome moltiplicando il numero delle prove la probabilità di ottenere ogni avvenimento semplice nel rapporto del numero dei suoi casi possibili può divenire tanto grande quanto si vuole, ne segue che in ogni serie data di avvenimenti semplici il rapporto del numero delle apparizioni di uno di questi avvenimanti al numero totale degli avvenimenti deve differire tanto meno dalla probabilità semplice di questo avvenimento quanto più grande è il numero degli avvenimenti. Così, ammettendo che in cento prove siano state estratte settantacinque palle bianche e venticinque nere, l'ipotesi che dà per la probabilità semplice della estrazione di una palla bianca $\frac{75}{100}$, o $\frac{3}{4}$, acquista un grado grande di probabilità: questo grado aumenta, se in dugento prove si ottengono centocinquanta palle bianche, e si finirebbe col giungere all'unità o alla certezza, se il numero delle prove divenendo infinito quello delle estrazioni delle palle bianche ne fosse sempre i tre quarti.

Questo risultato, che si dimostra in un modo rigorosissimo, è di una somma importanza nel calcolo delle probabilità *a posteriori*: esso prova che si può sempre determinare un numero tale di osservazioni che la probabilità semplice che ne resulta, per un avvenimento del quale non si conosca il numero dei casi possibili, non si allontani dalla probabilità esatta di questo avvenimento al di là di limiti determinati, per quanto ristretti vogliano questi supporsi: e su questo prin-

cipio riposano le teorie sulla vita umana, sulle tontine, sulle assicurazioni, sulle rendite vitalizie, sulla probabilità delle testimonianze, sui giudizj dei giurì, ec.

27. Il problema delle rendite vitalizie è quello che dimostra nel modo il più evidente l'utilità del calcolo delle probabilità, poichè il costituire una rendita vitalizia sulla testa di un uomo di una data età altro non è che stipulare con lui di ricevere il suo danaro colla condizione di pagargliene il frutto legale con un certo aumento da imputarsi in conto del capitale, e che sia tale che alla sua morte si trovi esso rimborsato interamente e del capitale *e* dei frutti. Così il problema si riduce alla determinazione del numero di anni di vita che probabilmente rimangono ad un uomo di una età nota: ma questa determinazione non può ottenersi che *a posteriori*, perchè non è che l'osservazione la quale possa farci conoscere quanti in un numero di uomini nati nel medesimo tempo giungano all'età più avanzata: e, perciò che precede, è necessario avere un numero grande di queste osservazioni per giungere a resultati di una probabilità sufficiente. *Vedi* Rendita vitalizia.

28. Le applicazioni del calcolo delle probabilità alle questioni giudiciarie e politiche sono state trattate da Condorcet nel suo *Essai sur l'application de l'analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix*. Questo scritto importante contiene delle conclusioni che i legislatori non potrebbero mai abbastanza meditare. Anco l'opera di Poisson, intitolata: *Recherches sur la probabilité des jugémens en matière civile et en matière criminelle*, Parigi, 1837, contiene vedute nuove e leggi importantissime. Nella impossibilità in cui siamo di dare una maggiore estensione a quest'articolo, dobbiamo almeno indicare ai lettori le sorgenti principali alle quali possono essi attingere maggiori cognizioni. Sono queste: l'*Ars conjectandi* di Bernoulli; l'*Essais d'analyse sur les jeux de hasard* di Montmort; la *Doctrine of Chances* di Moivre; l'*Essai sur la probabilité de la durée de la vie humaine* di Deparcieux; le *Recherches sur les rentes*, *les emprunts*, *les remboursements*, *ec.* di Duvillard; il *Traité élémentaire du calcul des probabilités* di Lacroix; e finalmente la *Théorie analytique des probabilités* di Laplace, opera la più completa e la più profonda che fino ad ora sia stata pubblicata su questo argomento.

PROBLEMA. Proposizione nella quale ci proponiamo uno scopo da raggiungere, come, in *geometria* di costruire una data figura, e, in *algebra*, di trovare un resultamento che soddisfaccia a certe condizioni. (*Vedi* Risoluzione.)

PROCLO, capo della setta neo-platonica, è celebre nella storia della scienza per aver trasportato ad Atene l'insegnamento superiore delle matematiche, che fino allora aveva avuto sede esclusiva in Alessandria. Tale avvenimento ebbe luogo verso la metà del quinto secolo dell'era nostra. Questo filosofo, che al pari dell'illustre suo maestro, del quale professava le dottrine, poneva con ragione le matematiche nel primo ordine delle umane cognizioni, non ha fatto scoperte notabili in tali scienze, ma coi suoi lavori e colle sue lezioni contribuì almeno in un'epoca di decadenza a continuarne la luce ancora per qualche tempo. Le opere di Proclo ci sono state tutte conservate: quelle che hanno per oggetto le matematiche non presentano oggi che un interesse secondario. Eccone l'elenco: I Due libri intitolati: *Del moto*, stampati la prima volta a Basilea nel 1531, in-8; e colla versione latina di Velsio nel 1545, in-8, nella stessa città: furono pure tradotti in francese da Forcadel e stampati a Parigi nel 1565. Quest'opera non è che la riproduzione delle teorie di Aristotile in fisica. II Degli scolj e commenti sul primo libro degli *Elementi* di Euclide: il testo greco comparve la prima volta nell'edizione di Euclide impressa a Basilea nel 1533, in-fol. Furono poscia tradotti in latino da Barocccio col seguente titolo: *Procli in primum*

Euclidis elementorum librum commentariorum libri IV, ex greco latine vertit et scholiis illustravit Franc. Boroccius, Padova, 1560, in-fol.; vennero pure tradotti in inglese da T. Taylor, Londra, 1788-89, 2 vol. in-4; III Un *Trattato della sfera*, che comparve unito ad altri antichi scritti di astronomia, nel volume in-foglio, stampato da Aldo a Venezia nel 1499: questo trattato, che altro non è che la riproduzione presso a poco letterale dell'opera di Gemino sullo stesso soggetto, è stato tradotto in italiano da Tito Giovanni Scandianese, Venezia, 1556, in-4, e da Egnazio Danti, Firenze, 1573, in-4; IV *Posizioni astronomiche*, o piuttosto *Esposizione delle ipotesi astronomiche di Tolomeo*, Basilea, 1540, in-4. In quest'opera, che è piuttosto un compendio che un commento dell'*Almogesto*, Proclo espone la dottrina di Tolomeo sulle parallassi, sugli ecclissi e sulle orbite dei pianeti, e vi parafrasa la descrizione che Tolomeo lasciò de' suoi strumenti: l'abate Halma ne ha pubblicata nel 1820 una edizione in greco, accompagnandola con una traduzione francese. Gli viene pure attribuito un libro sugli ecelissi che fu pubblicato soltanto in latino in seguito alle *Tavole astronomiche* di Giovanni Schroeter, Vienna, 1551, in-4. Le opere filosofiche di Proclo sono più importanti ed hanno un carattere più pronunziato di originalità e di talento.

È comune opinione che Proclo nascesse a Xanto o a Costantinopoli l'8 Febbrajo 412 e morisse il 17 Aprile 485 in Atene, ove ricevè onori funebri che rammentano l'entusiasmo che sempre aveva avuto l'antica Grecia per gli uomini d'ingegno.

PROCIONE (*Astron.*). Nome di una stella di prima grandezza contenuta nella costellazione del Cane minore.

PRODOTTO. (*Alg.* e *Arit.*). Risultamento di una moltiplicazione. (*Vedi* QUESTA PAROLA.)

PROFONDITA'. (*Geom.*) Una delle tre dimensioni dei solidi; si chiama ancora ALTEZZA. (*Vedi* QUESTA PAROLA.)

PROGRESSIONE. (*Alg.*) Serie di numeri in proporzione continua, vale a dire, di cui ciascuno è medio proporzionale tra quello che lo precede e quello che lo segue. (*Vedi* MATEM. a PROPORZIONE.)

Una progressione dicesi *aritmetica* o *geometrica* secondo che il rapporto che regna tra i suoi termini è aritmetico o geometrico. Esamineremo queste due classi di progressioni.

PROGRESSIONE ARITMETICA. Un seguito di termini come:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \text{ ec.}$$

i quali crescono con *differenze uguali* si chiama *progressione crescente*; e un seguito come

$$27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, \text{ ec.}$$

i quali *diminuiscono* con *differenze uguali*, si chiama *progressione decrescente*.

1. Rappresentiamo con

$$\div a, b, c, d, e, f, g, h, \text{ ec.}$$

una progressione aritmetica qualunque crescente o decrescente. Se δ rappresenta la differenza costante, avremo

$$a - b = \delta,$$

se la progressione è decrescente,

$$b - a = \delta,$$

se essa è crescente. Nell' ultimo caso al quale possiamo riportare il secondo rovesciando l' ordine dei termini, si ha dalla natura della progressione

$$b-a=\delta$$
$$c-b=\delta$$
$$d-c=\delta$$
$$e-d=\delta$$
$$\text{ec.}=\text{ec.}$$

ovvero ancora

$$a+\delta=b$$
$$b+\delta=c$$
$$c+\delta=d$$
$$d+\delta=e$$
$$\text{ec.}=\text{ec.}$$

Si deduce da quest' ultime:

$$b=a+\delta$$
$$c=a+\delta+\delta$$
$$d=a+\delta+\delta+\delta$$
$$e=a+\delta+\delta+\delta+\delta$$
$$\text{ec.}=\text{ec.},$$

vale a dire, che ciascun termine è uguale al primo più tante volte la differenza, quanti termini ci sono meno uno avanti di esso.

Una progressione crescente può dunque esprimersi in generale con

$$\div a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ a+3\delta,\ a+4\delta,\ \text{ec.}\ldots\ a+(n-1)\delta\ \ldots\ (a),$$

n essendo il numero dei termini. Quest' espressione ha il vantaggio di rendere sensibile la costruzione dei termini.

2. Quanto alle progressioni decrescenti, vediamo facilmente che possiamo ancora dar loro la forma generale

$$\div a,\ a-\delta,\ a-2\delta,\ a-3\delta,\ a-4\delta,\ \text{ec.}\ \ldots\ a-(n-1)\delta.$$

Così la forma (a) può abbracciare i due casi facendo δ positivo o negativo.

3. In una progressione aritmetica qualunque, crescente o decrescente, che indicheremo con

$$\div a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \text{ec}\ \ldots\ldots\ a_m,$$

due termini qualunque a_n, a_{m-n} presi ad uguali distanze dai due termini estremi a_0 e a_m, formano con questi estremi la proporzione

$$a_n-a_0=a_m-a_{m-n}.$$

Infatti si ha

$$a_n=a_0+n\delta$$
$$a_{m-n}=a_0+(m-n)\delta$$
$$a_m=a_0+m\delta$$

donde

$$a_n-a_0=a_0+n\delta-a_0=n\delta$$
$$a_m-a_{m-n}=a_0+m\delta-a_0-(m-n)\delta=n\delta$$

e per conseguenza

$$a_n - a_0 = a_m - a_{m-n}.$$

4. Si deduce da quest' eguaglianza

$$a_0 + a_m = a_n + a_{m-n},$$

vale a dire che la somma di due termini qualunque di una progressione aritmetica, presi a uguali distanze dagli estremi, è sempre uguale alla somma di questi estremi.

Se la progressione avesse un numero impari di termini, quello del mezzo sarebbe medio proporzionale tra gli estremi, e la somma degli estremi sarebbe il doppio di questo termine medio.

5. Resulta da questa proprietà che la somma di tutti i termini di una progressione aritmetica è uguale alla metà del prodotto della somma degli estremi moltiplicata per il numero dei termini.

Poichè, rovesciando l' ordine dei termini della progressione

$$\div a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \text{ec.} \ldots\ldots a_{m-1},\ a_m$$

si ha

$$\div a_m,\ a_{m-1},\ a_{m-2},\ \text{ec.} \ldots\ldots a_1,\ a_0,$$

e aggiungendo i termini corrispondenti di queste due serie, si hanno le somme uguali

$$a_0 + a_m = a_1 + a_{m-1} = a_2 + a_{m-2} = \text{ec.} = a_{m-1} + a_1 = a_m + a_0.$$

Ora, addizionando tutte queste somme, si avrebbe evidentemente per resultamento due volte la somma di tutti i termini della progressione: così, poichè queste somme sono uguali e che esse sono nel numero di $m+1$, moltiplicando per $m+1$ una qualunque tra esse, si avrà la somma generale.

Dunque $(a_0 + a_m).(m+1)$ essendo questa somma generale, si ha per quella della progressione, indicandola con S, l' espressione

$$S = \frac{1}{2}\left(m+1\right)\left(a_0 + a_m\right) \ldots\ldots (b),$$

che è la proposizione enunciata.

6. Applichiamo questa formula a trovare la somma dei sedici numeri in progressione aritmetica,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.

Abbiamo in questo caso $a_0 = 1$, $a_m = 31$, $m+1 = 16$ e $\delta = 2$. Sostituendo in (b), otterremo

$$S = \frac{1}{2}.16\left(1+31\right) = \frac{16.32}{2} = 256,$$

opereremo ugualmente in tutti i casi particolari.

7. Se nell' espressione (b) si sostituisce invece di a_m il suo valore $a_0 + m\delta$, essa diventa

$$S = (m+1)a_0 + \frac{m(m+1)}{2}\delta,$$

formula che dà la somma dei termini di una progressione aritmetica per mezzo del primo termine, della differenza e del numero dei termini.

8. Le tre formule

$$a_m = a_0 + m\delta,$$

$$S = \frac{1}{2}\left(m+1\right)\left(a_0 + a_m\right),$$

$$S = \left(m+1\right)a_0 + \frac{1}{2}m\left(m+1\right)\delta,$$

contengono la soluzione di tutte le questioni che possiamo proporci sopra le progressioni aritmetiche.

Indicando con n il numero dei termini che in questo caso è $m+1$, l'ultimo termine ha $n-1$ per indice, e possiamo dare a queste espressioni le forme seguenti, se non più semplici almeno più caratteristiche

$$a_{n-1} = a_0 + \left(n-1\right)\delta \ldots\ldots (c),$$

$$S = \frac{1}{2}n\left(a_0 + a_{n-1}\right) \ldots\ldots (d),$$

$$S = na_0 + \frac{1}{2}n\left(n-1\right)\delta \ldots\ldots (e).$$

9. Si deduce dall' espressione (c) le tre uguaglianze

$$a_0 = a_{n-1} - \left(n-1\right)\delta,$$

$$\delta = \frac{a_{n-1} - a_0}{n-1},$$

$$n = \frac{a_{n-1} - a_0}{\delta} + 1,$$

la prima delle quali dà il primo termine di una progressione per mezzo dell'ultimo, della differenza e del numero dei termini; la seconda delle quali dà la differenza per mezzo del primo e dell'ultimo termine, e del numero dei termini; e di cui, finalmente, la terza dà il numero dei termini per mezzo del primo e dell' ultimo termine, e della differenza.

10. Le applicazioni di queste formule non presentando alcuna difficoltà, ci contenteremo di presentarne un solo esempio.

Si domanda d' inserire cinque medj proporzionali aritmetici tra i due numeri 2 e 14, ovvero, ciò che equivale allo stesso, si domandano cinque numeri u, v, x, y, z, *tali che si abbia la progressione*

$$\div 2,\ u,\ v,\ x,\ y,\ z,\ 14.$$

È evidente che la questione si riduce a trovare la differenza della progressione, poichè se si conoscesse questa differenza, si formerebbero i termini domandati, u, v, x, y, z, aggiungendola successivamente una volta, due volte, ec., al

primo termine 2. Così, il primo e l'ultimo termine essendo conosciuti come pure il numero 7 dei termini, sostituendo questi valori nella seconda espressione del n.° 9, troveremo

$$\delta=\frac{14-2}{7-1}=2.$$

La progressione sarà dunque

$$\div 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,$$

e, per conseguenza, i cinque medj proporzionali domandati sono 4, 6, 8, 10, 12.

11. Si ricavano ugualmente dalla formula (*d*) le tre espressioni

$$a_{n-1}=\frac{2S-na_0}{n},$$

$$a_0=\frac{2S-na_{n-1}}{n},$$

$$n=\frac{2S}{a_{n-1}+a_0},$$

le quali servono respettivamente a trovare il numero dei termini, il primo e l'ultimo termine, quando si conoscono due qualunque di queste quantità e la somma.

12. La formula (*e*) somministra ancora le tre espressioni

$$a_0=\frac{1}{n}S-\frac{1}{2}\left(n-1\right)\delta,$$

$$\delta=\frac{2(S-na_0)}{n(n-1)},$$

$$n=-\frac{2a_0-\delta}{2}\pm\sqrt{\left[2S+\left(\frac{2a_0-\delta}{2}\right)^2\right]},$$

per mezzo delle quali possiamo ottenere il primo termine, la differenza o il numero dei termini con l'aiuto di due qualunque di queste quantità e della somma.

13. Ciò che precede contiene la teoria completa delle progressioni aritmetiche semplici; ma si dà ancora il nome di *progressioni aritmetiche* a delle serie di termini crescenti o decrescenti per differenze ineguali, la cui considerazione è importantissima. Ecco la generazione di queste serie. Sia

$$\div A,\ A+D,\ A+2D,\ A+3D,\ \text{ec.}\ldots\ldots A+(n-1)D$$

una progressione aritmetica ordinaria, formando le somme successive di due, tre, quattro, ec., dei suoi termini, si ottiene un seguito di numeri di cui le seconde differenze sono costanti, cioè:

termini	1° *diff.*	2° *diff.*
A		
2A+ D,	A+ D,	
3A+ 3D,	A+2D,	D.
4A+ 6D,	A+3D,	D.
5A+10D,	A+4D,	D.
ec.	ec.	ec.

Questa serie di termini si chiama *progressione aritmetica del secondo ordine*.

Ugualmente, prendendo le somme successive di due, tre, quattro, ec., termini di una progressione del second' ordine, si ottiene un seguito di termini di cui le terze differenze sono costanti:

termini	1ª *diff.*	2ª *diff.*	3ª *diff.*
A,			
3A+ D,	2A+ D,		
6A+ 4D,	3A+ 3D,	A+2D,	
10A+10D,	4A+ 6D,	A+3D,	D,
15A+20D,	5A+10D,	A+4D,	D,
ec.	ec.	ec.	ec.,

e che si chiama *progressione aritmetica del terz' ordine*. Possiamo, proseguendo nella stessa maniera, formare delle progressioni di ordini continuamente più elevati, e in generale si chiama *progressione dell' ordine n*, quella le cui differenze costituiscono *una progressione dell' ordine n—1*, ovvero le cui ennesime differenze sono uguali.

14. Partendo dalla progressione ordinaria, ovvero del prim' ordine

$$\div 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \text{ ec.}$$

formata dal seguito dei numeri naturali, si ottiene per le progressioni degli ordini seguenti:

2.° *ordine* 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ec.
3.° *ordine* 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, ec.
4.° *ordine* 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, 495, ec.

I numeri di queste serie prendono il nome di *numeri figurati*. (*Vedi* QUESTA PAROLA).

Se indichiamo con m il posto o l'indice di un termine, si trova per l'espressione generale del termine di questo posto, vale a dire, per ciò che si chiama il *termine generale* della serie,

Numeri naturali . . . . m,

Figurati del 2.° *ordine* . . . . $\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$,

Figurati del 3.° *ordine* . . . . $\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

Figurati del 4.° *ordine* . . . . $\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,

ec. ec.

In generale, il termine del posto m nelle serie dei numeri figurati dell' ordine n è

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3) \ldots\ldots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots n},$$

vedremo in altra parte come si ottengono questi termini generali. (*Vedi* SOMMATORIO).

Dalla formazione di queste serie, è evidente che il termine generale di una qualunque tra esse esprime la somma degli m primi termini della serie precedente. Per esempio:

$$\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2},$$

è la somma degli m primi termini della progressione dei numeri naturali;

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

è la somma degli m primi termini della progressione dei numeri figurati del second' ordine, e così di seguito. Siccome si chiama *termine sommatorio* di una serie di termini l' espressione generale della somma di un numero qualunque di questi termini, possiamo dire che il *termine generale* di una serie di numeri figurati è nello stesso tempo il *termine sommatorio* della serie dell' ordine immediatamente inferiore.

L' espressione (e)

$$S = na_0 + \frac{1}{2}n(n-1)\delta,$$

può chiamarsi il *termine sommatorio* di una progressione del prim' ordine, il di cui primo termine è a_0 e la differenza δ. Facendo in quest'espressione $a_0 = 1$ e $\delta = 1$, otteniamo per il termine sommatorio delle serie dei numeri naturali

$$S = n + \frac{1}{2}n\left(n-1\right) = \frac{2n+n(n-1)}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

il che è identico col termine generale dei numeri figorati del second' ordine. Poichè m ed n indicano ugualmente in questo caso il numero dei termini. Queste osservazioni erano indispensabili per quello che segue.

16. Indichiamo con A_1, A_2, A_3, A_4, ec. . . . A_m, una serie di numeri che formano una progressione aritmetica del second' ordine; indichiamo ancora con D_1, D'_1, D''_1, ec. le differenze consecutive A_2-A_1, A_3-A_2, ec., e finalmente con D_2, la differenza costante delle prime differenze D_1, D'_1, D''_1, ec. ossia D'_1-D_1, $D''_1-D'_1$, ec. avremo in questo modo le tre serie di numeri

$$\begin{array}{l} A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ \text{ec.}, \\ \quad D_1,\ D'_1,\ D''_1,\ D'''_1,\ D''''_1,\ \text{ec.}, \\ \qquad D_2,\ D_2,\ D_2,\ D_2,\ \text{ec.}, \end{array}$$

legate tra essa dalla legge di formazione del n.° 13.

Ora, in virtù della costruzione stessa della progressione del second' ordine, si hanno le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1+D_1 \\ A_3 &= A_2+D_1' = A_2+D_1+D_2 = A_1+2D_1+D_2 \\ A_4 &= A_3+D_1'' = A_3+D_1+2D_2 = A_1+3D_1+3D_2 \\ A_5 &= A_4+D_1''' = A_4+D_1+3D_2 = A_1+4D_1+6D_2 \\ A_6 &= A_5+D_1'''' = A_5+D_1+4D_2 = A_1+5D_1+10D_2 \\ &\text{ec.} \ldots\ldots, \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ec.} \ldots\ldots \end{aligned}$$

È evidente che il termine A_m avrà per espressione generale

$$A_1+(m-1)D_1+\frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}D_2\,.\,.\,.\,.\,.\,(f),$$

poichè, nel seguito dei valori dei termini A_2, A_3, A_4, ec., i coefficienti numerici di D_1, sono i numeri naturali 1, 2, 3, 4, ec., e siccome questa serie non comincia che al secondo termine della progressione, il coefficiente di D_1, nell'm simo termine, è il termine $m-1$ della serie dei numeri naturali. Inoltre i coefficienti numerici di D_2 sono formati dall'addizione successiva di quelli di D_1; questi coefficienti sono dunque la serie dei numeri figurati del second' ordine; ma essi non cominciano a comparire che al terzo termine della progressione, vale a dire che il coefficiente numerico del termine A_m è il numero figurato del second' ordine del posto $m-2$, bisogna dunque sostituire $m-2$ ad m nell'espressione generale di questi numeri, e si ottiene infatti per il termine generale della progressione del second' ordine l' espressione di sopra.

16. La somma di un numero qualunque m di termini di una tale progressione essendo necessariamente uguale alla somma di tutte le quantità che compongono questi termini, si ha

$$\begin{aligned}&A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_3+\text{ ec. } \ldots\ldots\ldots\ldots +A_m\\&=(A_1+A_1+\text{ ec. } \ldots\ldots)+(1+2+\text{ ec. } \ldots\ldots +m-1)D_1\\&\quad+\left(1+3+6+\text{ ec. } \ldots\ldots \frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}\right)D_2,\end{aligned}$$

ma si comincia da avere $A_1+A_1+A_1+$ ec. . . . . . $=mA_1$. Di più la somma dei numeri naturali da 1 fino ad $m-1$ è il numero figurato del second' ordine del posto $m-1$, vale a dire, $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$; e la somma dei numeri figurati del second' ordine dal primo 1 fino al numero $m-2$ simo, $\frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}$, è il numero figurato del terz' ordine del posto $m-2$, vale a dire

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Così, indicando con S la somma degli m primi termini della progressione in questione, avremo

$$S=mA_1+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}D_1+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}D_2\,.\,.\,.\,.\,.\,(g).$$

17. Un metodo esattamente simile ci farebbe trovare per il termine generale di una progressione del terz' ordine l' espressione

$$\begin{aligned}&A_1+(m-1)D_1+\frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}D_2\\&+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3}D_3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(h),\end{aligned}$$

A_1 indicando il primo termine di questa progressione, D_1 la prima delle differenze prime, D_2 la prima delle differenze seconde e D_3 la terza differenza costante.

Si otterrebbe ugualmente per la somma di un numero m di termini di questa progressione il termine sommatorio

$$S = mA_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} D_1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} D_2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} D_3 \ldots\ldots (i).$$

La deduzione di queste formule non presenta alcuna difficoltà.

18. In generale, la progressione aritmetica dell' ordine n ha per *termine generale*,

$$A_1 + (m-1)D_1 + \frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} D_2 + \frac{(m-1)^{3|-1}}{1^{3|1}} D_3$$

$$+ \text{ec.} \ldots\ldots + \frac{(m-1)^{n|-1}}{1^{n|1}} D_n \ldots\ldots (k),$$

e, per termine sommaturio

$$mA_1 + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} D_1 + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} D_2 + \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} D_3 + \text{ec.} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m^{n+1|-1}}{1^{n+1|1}} D_n \ldots\ldots\ldots\ldots (l),$$

A_1 indicando sempre il primo termine, e D_1, D_2, D_3 le differenze successive.

Applichiamo queste formule ad alcune questioni.

19. *Si domanda la somma dei quadrati dei numeri impari* 1, 3, 5, 7, 9, 11; *questi quadrati sono*

1, 9, 25, 49, 81, 121.

Prendendo le differenze consecutive di questi numeri si trova la serie

8, 16, 24, 32, 40,

le cui differenze

8, 8, 8, 8,

sono uguali. I numeri proposti formano dunque una progressione del second' ordine. Così nella formula (g) n.°16, facendo $A_1 = 1$, $D_1 = 8$, $D_2 = 8$, otterremo

$$S = 6 \cdot 1 + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 8 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 = 286.$$

20. *Si domanda l'espressione generale della somma dei quadrati dei numeri naturali*: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ec. . . . . .

Abbiamo in questo caso $A_1 = 1$, $D_1 = 3$, $D_2 = 2$. Sostituendo questi valori nella formula (g), essa diventa

$$S = m + \frac{3m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{2m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left[2m(m-1)(m-2) + 9m(m-1) + 6m \right]$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Così, per avere, per esempio, la somma dei 10 quadrati

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

si farà $m=10$, e l'ultima espressione darà

$$S=\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3}=385,$$

385 è dunque la somma domandata.

21. *Trovare l'espressione generale della somma delle terze potenze dei numeri naturali*:

1, 8, 27, 64, 125, ec.

Le prime differenze sono

7, 19, 37, 61, ec.

le seconde

12, 18, 24, ec.

e le terze

6, 6, ec.

Le terze differenze essendo uguali, i numeri proposti formano una progressione del terz'ordine; così facendo $A_1=1$, $D_1=7$, $D_2=12$, e $D_3=6$, e sostituendo questi valori nella formula (i), avremo

$$S=m+\frac{7m(m-1)}{1 \cdot 2}+\frac{12m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+\frac{6m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Riducendo tutti i termini allo stesso denominatore 4, la somma dei numeratori può mettersi sotto la forma

$$m[4+14(m-1)+8(m-1)(m-2)$$
$$+(m-1)(m-2)(m-3)].$$

Sviluppando i prodotti e riducendo, si ottiene definitivamente

$$S=\frac{m^2 \cdot (m+1)^2}{4}=\left[\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\right]^2.$$

Così, mediante una particolarità assai osservabile, la somma delle terze potenze degli m primi numeri naturali è uguale al quadrato del numero figurato del second'ordine, del posto m.

Se si trattasse dunque della somma dei 6 cubi

1, 8, 27, 64, 125, 216

si farebbe $m=6$, e la formula darebbe

$$S=\left[\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2}\right]^2=(21)^2=441.$$

22. Il problema di trovare il numero delle palle che compongono un mucchio si riduce alla somma dei termini di una progressione del second' ordine. Questi mucchj hanno ordinariamente per basi un triangolo equilatero, un quadrato, o

un rettangolo. Se indichiamo con n il numero delle palle di un lato della base, la somma delle palle dei *mucchj triangolari* e *quadrangolari* è data dall'espressioni

$$\textit{Mucchio triangolare} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

$$\textit{Mucchio quadrangolare} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La somma delle palle dei *Mucchj rettangolari* è, indicando con m il numero delle palle della luoghezza della base, e con n quello delle palle della larghezza di questa base,

$$\textit{Mucchio rettangolare} = \frac{m(m+1)(3n-m+1)}{6}.$$

Progressione geometrica. Una progressione geometrica è, come l'abbiamo già detto, una serie di numeri di cui ciascuno è contenuto in quello che lo precede tante volte quante esso contiene quello che lo segue, o *vice-versa.* Tali sono le serie

$$\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \text{ec.}$$

$$\div\ 2187 : 729 : 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : \text{ec.}$$

La prima è una *progressione geometrica crescente*, e la seconda una *progressione geometrica decrescente.* S' indicano l' una e l' altra col segno $\div$.

Si chiama *rapporto della progressione* il rapporto, sempre lo stesso, di due termini che si seguono.

1. Sia

$$\div\ A_1 : A_2 : A_3 : A_4 : A_5 : A_6 : \text{ec.} \ldots\ldots A_m$$

una progressione geometrica qualunque. Il suo rapporto sarà

$$\frac{A_2}{A_1} = r,$$

ed essa sarà *crescente* se r è un numero intero, e *decrescente*, se è una frazione.

Si ha, dalla costruzione stessa di queste progressioni, il seguito dell' uguaglianze

$$A_2 = A_1 . r$$
$$A_3 = A_2 . r = A_1 . r . r$$
$$A_4 = A_3 . r = A_1 . r . r . r$$
$$A_5 = A_4 . r = A_1 . r . r . r . r$$
$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

e, in generale

$$A_m = A_{m-1} . r = A_1 . r . r . r . r \ldots\ldots r = A_1 . r^{m-1}.$$

Così la forma assolutamente generale di una progressione geometrica è

$$\div\ A_1 : A_1 . r : A_1 . r^2 : A_1 . r^3 : A_1 . r^4 \ldots\ldots A_1 . r^{m-1}.$$

sotto questa forma, tutte le proprietà di una tale progressione diventano sensibili.

2. In una progressione geometrica, due termini presi ad ugnali distanze dai due estremi A_1 e $A_1 . r^{m-1}$ formano con questi estremi una proporzione, dei quali essi sono i medj, vale a dire che, n essendo un numero intero più piecolo di m e, per conseguenza, $A . r^n$ e $A_1 . r^{m-n-1}$ due termini situati ad ugnali distanze dagli estremi, si ha la proporzione

$$A_1 : A_1 . r^n :: A_1 . r^{m-n-1} : A_1 . r^{m-1};$$

infatti si ha

$$\frac{A_1 r^n}{A_1} = r^n, \quad e \quad \frac{A_1 r^{m-1}}{A_1 r^{m-n-1}} = r^n.$$

Ma in una proporzione (*Vedi*, QUESTA PAROLA) il prodotto degli estremi essendo uguale a quello dei medj, si ha in questo caso

$$A_1 \times A_1 r^{m-1} = A_1 r^n \times A r^{m-n-1},$$

donde possiamo concludere che *il prodotto dei due termini estremi di una progressione geometrica è uguale a quello di due termini qualunque presi a distanze uguali da questi estremi*. Proprietà analoga a quella delle progressioni aritmetiche del prim' ordine (4).

3. Il rapporto del primo termine di una progressione geometrica ad un altro termine di un posto n è lo stesso di quello delle potenze $n-1$ dei due primi termini. Così il termine del posto n essendo $A_1 . r^{n-1}$, si ha

$$A_1 : A_1 r^{n-1} :: \left(A_1\right)^{n-1} : \left(A_1 r\right)^{n-1}.$$

Questa proprietà è ancora evidente, poichè

$$\frac{A_1 r^{n-1}}{A_1} = r^{n-1}, \quad e \quad \frac{(A_1 r)^{n-1}}{A_1^{n-1}} = r^{n-1}.$$

Così facendo successivamente $n = 1, 2, 3, 4$, ec., e indicando, come in primo luogo, il posto dei termini con indici, avremo

$$A_1 : A_3 :: A_1^2 : A_2^2$$

$$A_1 : A_4 :: A_1^3 : A_2^3$$

$$A_1 : A_5 :: A_1^4 : A_2^4$$

$$A_1 : A_6 :: A_1^5 : A_2^5$$

ec. ec.

$$A_1 : A_m :: A_1^{m-1} : A_2^{m-1}$$

4. Proponiamoci di trovare l' espressione generale della somma di un numero qualunque di termini di una progressione geometrica.

Una tale progressione

$$\div A_1 : A_2 : A_3 : A_4 : A_5 : \ldots . : A_m,$$

non è che l' espressione abbreviata della serie dei rapporti uguali

$$A_1 : A_2 = A_2 : A_3 = A_3 : A_4 = A_4 : A_5 = \text{ec.}$$

Ora, in una serie di rapporti uguali, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti in questo medesimo rapporto comune (*Vedi* PROPORZIONE); si ha dunque in questo caso:

$$\left(A_1+A_2+\text{ec.}\ldots\ldots+A_{m-1}\right) : \left(A_2+A_3+\text{ec.}\ldots\ldots+A_m\right) :: A_1 : A_2;$$

ma $A_1+A_2+A_3+$ ec. . . . . . $+A_{m-1}$ è la somma dei termini della progressione meno l' ultimo A_m, e $A_2+A_3+A_4+$ ec. . . . . . $+A_m$ è la somma dei medesimi termini meno il primo A_1. Indicando dunque questa somma con S, la proporzione di sopra diventa

$$\left(S-A_m\right) : \left(S-A_1\right) :: A_1 : A_2,$$

donde si deduce

$$S=\frac{A_2 \cdot A_m - A_1 \cdot A_1}{A_2 - A_1}.$$

Per rendere quest' espressione indipendente dal secondo termine A_2, faremo osservare che $A_2 = A_1 r$, e sostituendo otterremo

$$S=\frac{A_1 \cdot A_m r - A_1 A_1}{A_1 r - A_1}=\frac{A_1(A_m r - A_1)}{A_1(r-1)},$$

e definitivamente

$$S=\frac{A_m r - A_1}{r-1} \ldots\ldots (a).$$

Dunque, per trovare la somma dei termini di una progressione geometrica, *bisogna moltiplicare l' ultimo termine per il rapporto, sottrarre da questo prodotto il primo termine e dividere il resto per il rapporto diminuito di un' unità.*

5. Per esempio, per avere la somma dei dieci termini della progressione crescente,

$$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512,$$

il cui rapporto è 2, si farà nell' espressione (a), $A_1=1$, $A_m=512$, $r=2$, e si troverà

$$S=\frac{512 \cdot 2-1}{2-1}=1023.$$

Se la progressione fosse decrescente, si potrebbe considerare il primo termine come essendo l' ultimo, e l' ultimo come essendo il primo: allora la formula non cangia, poichè è evidente che bisogna sempre prendere per A_m il più grande degli estremi e per A_1 il più piccolo. Solamente diventa necessario di rovesciare il rapporto, vale a dire di fare $\frac{A_1}{A_2}=r$, invece di $\frac{A_2}{A_1}=r$.

Così, se si domandasse la somma degli otto termini

$$\div\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128} : \frac{1}{256},$$

si farebbe $A_m = \frac{1}{2}$, $A_1 = \frac{1}{256}$, $r = 2$, e si avrebbe

$$S = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{256}}{2-1} = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}.$$

6. L'espressione (a) ci dà il mezzo di sommare qualunque serie indefinita i cui termini formano una progressione geometrica decrescente. Infatti, per avere la somma della serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{ec.} \ldots\ldots \textit{all' infinito}$$

si osserverà che l' ultimo termine dovendo essere infinitamente piccolo, basta di fare $A_m = \frac{1}{2}$; $A_1 = \frac{1}{\infty}$, e $r = 2$; sostituendo questi valori si ottiene

$$S = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{\infty}}{2-1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

facendo sparire $\frac{1}{\infty}$, il quale non ha alcun valore davanti $\frac{1}{2} \cdot 2$ (*Vedi* DIFFERENZA, n.° 116).

Nel caso in cui i termini delle serie fossero alternativamente positivi e negativi, come

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \text{ec.} \ldots\ldots \textit{all' infinito},$$

si potrebbe sempre considerarla come la differenza di due serie geometriche,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \text{ec.} \ldots\ldots \textit{all' infinito}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \text{ec.} \ldots\ldots \textit{all' infinito}\right).$$

Ora la somma della prima è

$$S' = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{\infty}}{4-1} = \frac{2}{3},$$

quella della seconda

$$S'' = \frac{\frac{1}{4}\cdot 4 - \frac{1}{\infty}}{4-1} = \frac{1}{3}\,;$$

così, la somma domandata diventa

$$S = S' - S'' = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

7. Se, nell' espressione

$$S = \frac{A_m r - A_1}{r-1},$$

si sostituisce in luogo di A_m il suo valore $A_1 r^{m-1}$, essa diventerà

$$S = \frac{A_1 r^m - A_1}{r-1} \ldots\ldots (b),$$

ossia

$$S = \frac{A_1 (r^m - 1)}{r-1} \ldots\ldots (b).$$

Per mezzo di quest' ultima possiamo trovare la somma di una progressione geometrica della quale si conosce il primo termine, il rapporto e il numero dei termini.

Quando la serie è decrescente, il rapporto è una frazione più piccola dell'unità, e si dà all' espressione (b) la forma

$$S = \frac{A_1 (1 - r^m)}{1-r} \ldots\ldots (c),$$

queste due forme sono d' altra parte identiche, poichè $\frac{1-r^m}{1-r} = \frac{r^m - 1}{r-1}$.

8. La divisione di $r^m - 1$ per $r - 1$ riproduce i termini di cui S esprime la somma, e in caso di bisogno può servire di dimostrazione all' espressione (b). Infatti, si trova, eseguendo la divisione

$$\frac{r^m - 1}{r-1} = r^{m-1} + r^{m-2} + r^{m-3} + \text{ec.} \ldots + r^3 + r^2 + r + 1,$$

donde

$$\frac{A_1 (r^m - 1)}{r-1} = A_1 + A_1 r + A_1 r^2 + A_1 r^3 + \text{ec.} \ldots\ldots + A_1 r^{m-1}.$$

9. Proponiamoci di trovare la somma di un numero qualunque di termini della progressione geometrica decrescente

$$\div\div \frac{1}{3} : \frac{1}{6} : \frac{1}{12} : \frac{1}{24} : \frac{1}{48} : \frac{1}{96} : \text{ec.} \ldots\ldots$$

Il rapporto essendo

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

faremo

$$A_1 = \frac{1}{3} \quad e \quad r = \frac{1}{2},$$

e sostituendo in (c), otterremo

$$S = \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right).$$

Per avere, per esempio, la somma di 8 termini, faremo $m = 8$, e troveremo

$$S = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{256}\right) = \frac{510}{768}.$$

In questo caso si vede facilmente che più termini si prendono e più $\frac{1}{2^m}$ diminuisce, e che facendo $m = \infty$, la somma della serie, continuata all' infinito, è rigorosamente uguale a $\frac{2}{3}$.

10. Le tre formule

$$A_m = A_1 \cdot r^{m-1} \quad \ldots . (a),$$

$$S = \frac{A_m r - A_1}{r - 1} \quad \ldots \ldots (b),$$

$$S = \frac{A_1 (r^m - 1)}{r - 1} \quad \ldots \ldots (c),$$

contengono la soluzione di tutti i problemi che si possono proporre sopra le progressioni geometriche.

Si deduce dalla prima: 1°

$$A_1 = \frac{A_m}{r^{m-1}},$$

espressione, la quale serve a calcolare il primo termine per mezzo dell' ultimo, del rapporto e del numero dei termini; 2°

$$r = \sqrt[m-1]{\frac{A_m}{A_1}};$$

espressione che serve a calcolare il rapporto mediante il primo termine, l' ultimo e il numero dei termini. E, 3°

$$m = \frac{\text{Log}\, A_m - \text{Log}\, A_1}{\text{Log}\, r} + 1;$$

espressione che fa conoscere il numero dei termini per mezzo dei logaritmi del primo termine, dell' ultimo e del rapporto.

L' applicazione di queste formule non presentando veruna difficoltà, ci contenteremo di darne un solo esempio.

Inserire tra 2 *e* 128 *cinque medj proporzionali geometrici*, *ossia trovare cinque numeri* u, v, x, y, z, *tali che si abbia*

$$\div 2 : u : v : x : y : z : 128 \ldots\ldots (d).$$

È evidente che se il rapporto della progressione fosse conosciuto, si otterrebbero i termini domandati moltiplicando successivamente il primo termine 2 per questo rapporto, è dunque necessario di trovare questo rapporto. Ora, in questo caso si conosce il primo termine $A_1 = 2$, l' ultimo termine $A^m = 128$ e il numero dei termini $m = 7$; così, sostituendo questi valori nella seconda delle tre precedenti espressioni, verrà

$$r = \sqrt[6]{\frac{128}{2}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Avremo dunque

$$u = 2.2, \quad v = 2.2^2, \quad x = 2.2^3, \quad y = 2.2^4, \quad z = 2.2^5,$$

e, per conseguenza la progressione è

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128.$$

La proprietà che abbiamo dimostrata al n.° 3 ci offre, per risolvere lo stesso problema, un mezzo che dobbiamo indicare. Mediante questa proprietà, la progressione (*d*) somministra la proporzione

$$2 : 128 :: 2^6 : u^6,$$

dalla quale

$$2u^6 = 2^6 . 128, \quad \text{e} \quad u^6 = \frac{2^6 . 128}{2} = 4096,$$

il che dà

$$u = \sqrt[6]{4096} = 4.$$

Così il primo medio è 4. Ma conoscendo il primo e il secondo termine, si conosce il rapporto che è $\frac{4}{2} = 2$, così possiamo formare gli altri termini come l' abbiamo fatto sopra.

11. La formula (*b*) ci somministra ugualmente le tre espressioni

$$A_1 = A_m . r - S(r-1),$$

$$A_m = \frac{S(r-1) + A_1}{r},$$

$$r = \frac{S - A_1}{S - A_m},$$

le quali servono a trovare respettivamente il primo termine, l'ultimo, o il rapporto quando due di queste quantità sono date con la somma. La deduzione di queste formule è evidente.

La terza formula (*c*) risponde ancora a quattro differenti questioni, poichè essa contiene ancora quattro indeterminate; ma all'eccezione del caso nel quale si domanda S, caso che è quello della formula (*c*) essa stessa, e del caso nel quale si domanda A_1, il quale somministra l'espressione

$$A_1 = \frac{S(r-1)}{r^m - 1},$$

le applicazioni di questa formula presentano delle difficoltà che non s'incontrano nelle precedenti; per esempio, se si trattasse di trovare il rapporto r, non si potrebbe giungerci che risolvendo l'equazione

$$A_1 r^m - Sr = A_1 - S \;.\;.\;.\;.\; (e),$$

ovvero

$$r^m - \frac{S}{A_1} r + \frac{S}{A_1} - A_1 = 0,$$

la quale è del grado m. Supponiamo che si domandi il rapporto di una progressione, il cui primo termine è 1 e la somma dei dieci primi termini è uguale a 1023, si avrebbe da risolvere l'equazione

$$r^{10} - \frac{1023}{1} r + \frac{1023}{1} - 1 = 0,$$

ossia

$$r^{10} - 1023r + 1022 = 0.$$

In questo caso possiamo facilmente, col metodo delle *radici commensurabili* (*Vedi* Radica), trovare la radice $r = 2$, che soddisfà alla questione; ma se il rapporto non fosse una quantità razionale, il che può succedere, prendendo una somma e un primo termine arbitrario, l'equazione (*e*) non potrebbe ammettere che una soluzione approssimata.

Nel caso in cui si domandasse il numero m dei termini, bisognerebbe risolvere l'equazione esponenziale (*Vedi* questa parola.)

$$r^m = \frac{S(r-1) + A_1}{A_1},$$

il che darebbe, impiegando i logaritmi,

$$m = \frac{\operatorname{Log}[S(r-1) + A_1] - \operatorname{Log} A_1}{\operatorname{Log} r}.$$

Sia, per esempio: $S = 1023$, $r = 2$, $A_1 = 1$, si avrà

$$m = \frac{\operatorname{Log}[1023 \cdot 1 + 1] - \operatorname{Log} 1}{\operatorname{Log} 2} = \frac{\operatorname{Log} 1024}{\operatorname{Log} 2}.$$

$$= \frac{3,010300}{0,301030} = 10.$$

52. Per dare un esempio dell' accrescimento rapido che riceve la somma dei termini di una progressione geometrica crescente, quando si aumenta il numero di questi termini, si racconta il seguente aneddoto, che dà almeno un fatto di calcolo assai osservabile. L' inventore del giuoco degli scacchi, invitato dal suo re a chiedere una ricompensa degna della sua scoperta, dopo di essersene astenuto lungo tempo, si fece portare una scacchiera e disse al principe di ordinare che gli fosse dato un granello di grano per il primo scacco, due per il secondo, quattro per il terzo, e così di seguito raddoppiando sempre fino al sessantaquattresimo. Questa domanda parve in principio troppo modesta al re, ma quando fu calcolato il numero totale dei granelli di grano, vide con gran sorpresa che i suoi tesori e ancora quelli di tutti i re della terra non erano sufficienti per adempire la sua promessa. Infatti, si trattava in questo caso di avere la somma dei 64 primi termini della progressione crescente

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \text{ec.},$$

si ha dunque

$$A_1 = 1, \quad r = 2 \quad \text{e} \quad m = 64;$$

sostituendo questi valori in (*c*) si trova

$$S = \frac{1\,(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1,$$

elevando 2 alla sessantaquattresima potenza e sottraendo l' unità dal resultamento si ha

$$S = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Ora, per contenere un simil numero di granelli di grano bisognerebbero circa 91522 granaj, aventi ciascuno una lega quadrata di superficie sopra 20 piedi di altezza. Non elevando che a 2 franchi il prezzo del piede cubo del grano, il valore di ciascun granajo sarebbe di 518400000 franchi, e il loro valore totale

47 445 004 800 000 franchi;

somma che tutti gli stati di previsione di Finanza moderni riuniti sono lontani dal raggiungere.

PROJETTILE (*Mec.*). Nome che si dà a qualunque corpo lanciato da una potenza qualunque, e in una direzione qualunque. Una pietra che si getta con la mano o con una fionda, una bomba o una palla lanciata dallo sforzo della polvere, sono *projettili*.

La teoria del moto dei *projettili* è la base di quella parte dell' arte militare alla quale si è dato il nome di *Balistica* (*Vedi* QUESTA PAROLA.)

PROJEZIONE (*Mec.*). Si chiama così l' azione d' imprimere del moto ad un projettile. Per lungo tempo si è discusso sopra gli effetti della forza di *projezione*, e gli antichi filosofi non sapevano come spiegare la continuazione del moto in un projettile, dopo che la causa la quale lo ha messo in moto ha cessato di agire. Cartesio, pel primo, ha fatto conoscere che questa continuazione di moto è un seguito dell' *inerzia* della materia, la quale, non avendo veruna determinazione o forza interna, non può da se stessa cangiare il suo stato e rimane tanto in riposo quanto in moto, fintantochè una causa esterna non venga ad agire sopra di essa. (*Vedi* NATURA.)

PROJEZIONE (*Geom.*). Si chiama così il modo di rappresentare sopra un piano, dato di posizione, una figura situata nello spazio fuori di questo piano. Ed è la traccia determinata dall' intersezioni delle rette, che si possono condurre da tutti i punti della figura sopra al piano.

Se tutte le rette, condotte dai diversi punti della figura sul piano, sono perpendicolari a questo piano, la projezione dicesi *ortogonale*. Se tutte queste rette concorrono al contrario verso uno stesso punto, la projezione dicesi *centrale*. *ab* (*Tav.* XLV, *fig.* 3) è la *projezione ortogonale* della retta AB sul piano MN, e *cd* (*Tav.* XLV, *fig.* 4) è la *projezione centrale* della retta CD sul piano MN. In quest' ultimo caso, il punto O ove concorrono tutte le rette le cui intersezioni col piano MN determinano *cd*, si chiama il *centro di projezione*. La teoria delle projezioni è l'oggetto generale della Geometria descrittiva. (*Vedi* questa parola.) Le *projezioni centrali* sono il fondamento della Prospettiva. (*Vedi* questa parola.)

La Projezione *della sfera sopra un piano* è una rappresentazione dei differenti punti della sfera e dei circoli tracciati sopra la sua superficie, che è principalmente in uso nella costruzione dei mappamondi e delle carte geografiche. Ordinariamente si divide in *projezione ortografica* e in *projezione stereografica*.

La Projezione ortografica è quella che si fa sopra un piano il quale passa pel centro della sfera, l'occhio, o il punto di concorso delle rette projettive, supponendosi ad una distanza infinita sopra la retta la quale passa pel centro perpendicolarmente al piano.

La Projezione Stereografica è quella che si fa sul piano di un gran circolo della sfera, l'occhio supponendosi al polo di questo circolo.

A queste due specie di projezioni possiamo aggiungere la *projezione gnomonica* che è quella quando si suppone l'occhio al centro della sfera. (*Vedi* Gnomonica.)

Nella *projezione ortografica*, le rette projettive non concorrendo che ad una distanza infinita, sono parallele tra esse, e siccome il punto di concorso è sopra una perpendicolare al piano di projezione, tutte queste rette sono ancora perpendicolari a questo piano. Le leggi di questa specie di projezione sono dunque le stesse di quelle delle *projezioni ortogonali*. (*Vedi* Descrittiva); così:

1.° Una retta perpendicolare al piano di projezione si projetta mediante un solo punto, che è quello dove essa taglia questo piano.

2.° Una retta obliqua al piano di projezione si projetta mediante una retta, le cui estremità sono determinate dalle perpendicolari abbassate dall' estremità di quest' obliqua sul piano.

3.° Se la retta projettata è parallela al piano di projezione, la sua projezione gli sarà uguale. In tutti gli altri casi, la sua projezione sarà una retta più piccola di essa.

4.° Una superficie piana perpendicolare al piano di projezione si projetta mediante una semplice linea retta, la quale è l'intersezione comune del piano di questa superficie e del piano di projezione. Per conseguenza qualunque circolo il cui piano è perpendicolare al piano di projezione, e che ha il suo centro sopra questo piano, si projetta mediante il suo diametro. Qualunque arco di un tal circolo, di cui una dell' estremità corrisponderebbe perpendicolarmente al centro comune della sfera e del piano di projezione, si projetta mediante il suo seno. Il complemento di quest' arco si projetta mediante il suo seno-verso.

5.° Un circolo parallelo al piano di projezione si projetta mediante un circolo uguale, e un circolo obliquo a questo piano si projetta mediante un' ellisse.

La projezione ortografica della sfera nell' astronomia è impiegata per costruire e risolvere i triangoli sferici con la riga e il compasso, quando non si ha bisogno di un' estrema esattezza; ne abbiamo dato un esempio alla parola Analemma. Il Cagnoli, nel suo *Trattato di trigonometria*, ha consacrato un capitolo a queste costruzioni.

Nella *projezione stereografica*, le rette projettive concorrendo a un punto della superficie della sfera, la projezione è *centrale*; essa è dunque sottoposta alle leggi della prospettiva; così:

1.° Qualunque gran circolo CABD (*Tav.* XLV, *fig.* 5) il quale passa pel centro O dell'occhio si projetta mediante una retta CD. Questa retta è il diametro della sfera, si chiama la *linea delle misure*.

2.° Qualunque piccolo circolo AGBH il cui piano è parallelo al piano di projezione si projetta mediante un circolo *agbh*.

3.° Qualunque piccolo circolo ABCD (*Tav.* XLV, *fig.* 4) obliquo rapporto al piano di projezione si projetta ancora mediante un altro circolo *abcd*.

4.° La projezione di un gran circolo obliquo ABCD (*Tav.* CLX, *fig.* 5) è un circolo BGFE, il cui centro si trova sopra la *linea delle misure*. La distanza di questo centro al centro della sfera è uguale alla tangente dell'angolo d'inclinazione del piano del circolo obliquo sul piano di projezione.

5.° I diametri dei circoli di projezione sono uguali alla metà della somma delle tangenti della più grande e della più piccola distanza dei circoli projettati al polo del piano di projezione, quando i circoli projettati circondano questo polo; ed essi sono uguali alla differenza di queste medesime tangenti, quando essi non contengono questo polo.

6.° Gli angoli che fanno sulla superficie della sfera i circoli projettati sono uguali a quelli, che fanno le loro projezioni respettive sul piano di projezione.

La projezione stereografica serve principalmente per la costruzione dei mappamondi o carte, le quali rappresentano la superficie di un emisfero intero del globo terrestre. Tali sono le carte eseguite nelle Tavole LV e LVI. Si prende ordinariamente per piano di projezione il piano di un meridiano, e allora i poli della terra sono i due punti del circolo principale di projezione, e i diversi meridiani sono rappresentati da archi di circolo che passano tutti per questi poli. Quando si prende il piano dell'equatore per piano di projezione, il polo è al centro del circolo principale di projezione che rappresenta l'equatore terrestre, e i diversi meridiani sono rappresentati dai raggi di questo circolo. Le carte costruite sopra questo principio si chiamano *mappamondi polari*. (*Vedi* Stereografico.)

La projezione *centrale* delle figure geometriche sopra un piano dà origine ad un gran numero di considerazioni importanti sopra le relazioni, che esistono tra queste figure e le loro rappresentazioni projettive. I nostri limiti non ci permettono di trattare questo soggetto, pel quale dobbiamo consultare l'opera: *Traité des propriétés projectives des figures*, del signor Poncelet.

PROJEZIONE DELLE SUPERFICIE PIANE. Il legame che esiste tra le proprietà dei *momenti* (*Vedi* questa parola) e quello delle projezioni fa sì che la considerazione di quest'ultime è utilissima nelle questioni dell'alta meccanica. In questo punto indicheremo le proposizioni le più importanti che le riguardano. Esse riposano sul seguente teorema fondamentale.

1. Teorema. *La projezione di una superficie piana, sopra un piano, è eguale all'area di questa superficie moltiplicata per il coseno della sua inclinazione sul piano di projezione.*

Una superficie piana qualunque, rettilinea, curvilinea o mistilinea, potendo sempre decomporsi in triangoli rettilinei finiti o indefinitamente piccoli, basta dimostrare che questo teorema ha luogo per un triangolo. Sia dunque ABC questo triangolo (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 7) e A'B'C' la sua projezione sopra un piano situato in un modo qualunque nello spazio. Si sa che l'area A'B'C' si trova determinata dai piedi delle perpendicolari AA', BB', CC' abbassate dai vertici del triangolo ABC sul piano di projezione; così questa projezione A'B'C' può

considerarsi come la base di un prisma triangolare troncato, le cui tre costole sono AA′, BB′, CC′. Ora, il volume di un prisma troncato (*Vedi* QUESTA PAROLA) è equivalente al terzo del prodotto della sua base per la somma delle perpendicolari abbassate dai tre vertici opposti sopra questa base; dunque, siccome in questo caso le costole sono perpendicolari alla base A′B′C′, abbiamo

$$\text{Volume} = \text{area } A'B'C' \times \frac{1}{3}(AA' + BB' + CC').$$

Ma se rovesciamo il prisma in modo che ABC diventi la sua base (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 4), avremo ancora, per l'espressione del suo volume,

$$\text{Volume} = \text{area } ABC \times \frac{1}{3}(A'a + B'b + C'c),$$

$A'a$, $B'b$, $C'c$ essendo le perpendicolari abbassate dai vertici A′, B′, C′ sopra la base ABC. Ne resulta evidentemente

$$\text{Area } A'B'C' \times \frac{1}{3}(A'A + B'B + C'C)$$

$$= \text{area } ABC \times \frac{1}{3}(A'a + B'b + C'c) \;\ldots\; (a).$$

Osserviamo ora che gli angoli respettivamente formati dalle costole AA′, BB′, CC′ e le perpendicolari $A'a$, $B'b$, $C'c$ sono i medesimi, e che uno qualunque di questi angoli, $aA'A$, misura l'inclinazione dei due piani ABC, A′B′C′ (*Vedi* APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA); dimodochè indicando con α quest'angolo d'inclinazione, abbiamo

$$\alpha = \text{angolo } aA'A = \text{angolo } bB'B = \text{angolo } cC'C.$$

Conducendo, nel piano ABC, le rette Aa, Bb, Cc, i triangoli $A'aA$, $B'bB$, $C'cC$, respettivamente rettangoli in a, in b e in c, daranno

$$A'a = AA' . \cos\alpha,$$
$$B'b = BB' . \cos\alpha,$$
$$C'c = CC' . \cos\alpha,$$

donde concluderemo

$$A'a + B'b + C'c = (AA' + BB' + CC')\cos\alpha.$$

Paragonando quest'uguaglianza con la formula (a), verrà

$$\text{area } A'B'C' \times \frac{1}{3}(AA' + BB' + CC')$$

$$= \text{area } ABC \times \frac{1}{3}(AA' + BB' + CC')\cos\alpha,$$

e sopprimendo i fattori comuni otterremo definitivamente,

$$\text{area } A'B'C = \text{area } ABC . \cos\alpha$$

che è il teorema in questione.

2. Si deduce immediatamente da questa proprietà un teorema degno di molta osservazione sopra le projezioni, e del quale ecco l'enunciato:

La projezione di una superficie piana sopra un piano è uguale alla somma delle projezioni di questa medesima superficie sopra tre piani coordinati, moltiplicate respettivamente per i coseni degli angoli che misurano l' inclinazioni del piano di projezione sopra i piani coordinati.

Infatti, indichiamo, per non confonderli, con A ed A′ due piani situati nello spazio, e chiamiamo α, β, γ gli angoli che il piano A fa con i tre piani rettangolari coordinati, ed α', β', γ' gli angoli che il piano A′ fa con i medesimi piani coordinati. Se dall' origine delle coordinate abbassiamo una perpendicolare sopra ciascuno dei piani A ed A′, l' angolo di queste due perpendicolari misurerà l' inclinazione dei due piani; e siccome, inoltre, gli angoli di un piano con gli assi sono i medesimi degli angoli della sua normale, avremo (Applicazione dell' Algebra alla Geometria), chiamando φ l' angolo d' inclinazione dei piani A ed A′,

$$\cos\varphi = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma'.$$

Ora, se rappresentiamo con λ l' area di una superficie piana contenuta nel piano A, e che si moltiplichino per λ i due membri dell' equazione precedente, verrà

$$\lambda\cos\varphi = \lambda\cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \lambda\cos\beta \,.\, \cos\beta' + \lambda\cos\beta \,.\, \cos\gamma' \;\ldots\ldots\; (b),$$

relazione che costituisce il teorema enunciato; poichè, in virtù del teorema fondamentale (1), $\lambda\cos\varphi$ è la projezione dell' area λ sul piano A′, e $\lambda\cos\alpha$, $\lambda\cos\beta$, $\lambda\cos\gamma$, le sue projezioni sopra i tre piani coordinati.

3. Per render più generale quest' ultimo teorema, si chiamino λ, λ' λ'' ec., dell' aree situate sopra diversi piani e projettate tutte sopra un piano che forma gli angoli α, β, γ con i piani coordinati, e indichiamo con

φ, l' inclinazione dell' area λ sul piano di projezione,
a, b, c, gli angoli dell' area λ con i piani coordinati,
φ', l' inclinazione dell' area λ' sul piano di projezione,
a', b', c', gli angoli dell' area λ' con i piani coordinati,
φ'', l' inclinazione dell' area λ'' sul piano di projezione,
a'', b'', c'', gli angoli dell' area λ'' con i piani coordinati,
ec. . . . . ec. . . . .

Avremo, in virtù della legge (*b*),

$$\begin{aligned}
\lambda\cos\varphi &= \lambda\cos a\,\cos\alpha + \lambda\cos b\,\cos\beta + \lambda\cos c\,\cos\gamma,\\
\lambda'\cos\varphi' &= \lambda'\cos a'\,\cos\alpha + \lambda'\cos b'\,\cos\beta + \lambda'\cos c'\,\cos\gamma,\\
\lambda''\cos\varphi'' &= \lambda''\cos a''\,\cos\alpha + \lambda''\cos b''\,\cos\beta + \lambda''\cos c''\,\cos\gamma,\\
\text{ec.} \ldots\ldots &= \text{ec.},
\end{aligned}$$

donde addizionando ne dedurremo

$$\begin{aligned}
&\lambda\cos\varphi + \lambda'\cos\varphi' + \lambda''\cos\varphi'' + \text{ec.} =\\
&= (\lambda\cos a + \lambda'\cos a' + \lambda''\cos a'' + \text{ec.})\cos\alpha\\
&+ (\lambda\cos b + \lambda'\cos b' + \lambda''\cos b'' + \text{ec.})\cos\beta\\
&+ (\lambda\cos c + \lambda'\cos c' + \lambda''\cos c'' + \text{ec.})\cos\gamma\\
&+ \text{ec.},
\end{aligned}$$

espressione che potremo mettere sotto la forma più semplice

$$P = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + \text{ec.} \ldots\ldots (c),$$

indicando con P la somma delle projezioni dell'aree λ, λ', λ'', ec., sul piano di projezione, e con A, B, C la somma delle projezioni di queste medesime aree sopra i tre piani coordinati. Così, qualunque sia il nomero dell'aree λ, λ', λ'', ec., e le loro posizioni nello spazio, la somma delle loro projezioni sopra un piano qualunque è equivalente alla somma delle loro projezioni sopra i tre piani coordinati, moltiplicate respettivamente per i coseni degli angoli che misurano le inclinazioni del piano di projezione sopra i piani coordinati.

4. Supponiamo, che senza niente cangiare alla posizione dei piani coordinati, si projettino ancora le aree λ, λ', λ'', ec., sopra due altri piani, formanti respettivamente con i piani coordinati degli angoli α', β', γ' e α'', β'', γ'', avremo evidentemente, chiamando P' P'' le somme delle projezioni sopra i nuovi piani

$$\left.\begin{aligned} P' &= A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' \\ P'' &= A\cos\alpha'' + B\cos\beta'' + C\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (c').$$

Unendo l'equazione (c) a queste due ultime, inalzandole tutte tre al quadrato e addizionando, verrà

$$\begin{aligned} P^2 + P'^2 + P''^2 = {} & A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'') \\ & + B^2(\cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'') \\ & + C^2(\cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'') \\ & + 2AB(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'') \\ & + 2AC(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'') \\ & + 2BC(\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'') \ldots\ldots (d). \end{aligned}$$

Premesso ciò, osserviamo che se i piani di projezione P, P', P'' fossero rettangolari, si potrebbero considerare le loro intersezioni come tre nuovi assi coordinati; ma allora gli angoli dei nuovi assi con gli antichi misurano le inclinazioni dei nuovi piani coordinati sopra gli antichi piani, e sono conseguentemente, mediante l'ipotesi α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', dimodochè

l'antico asse della x fa con i nuovi assi gli angoli α, α', α'',
l'antico asse delle y . . . . gli angoli β, β', β'',
l'antico asse delle z . . . . gli angoli γ, γ', γ'',

e si hanno (*Vedi* Applicazione dell'Algebra alla Geometria) le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' &= 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' &= 1 \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (e).$$

Di più, l'angolo formato da due qualunque dei nuovi assi essendo retto, si ha ancora (*Vedi* Applicazione dell'Algebra alla Geometria)

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' &= 0 \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' &= 0 \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (f).$$

Sostituendo questi valori nell' espressione (d), essa diventa

$$P^2+P'^2+P''^2=A^2+B^2+C^2 \; \ldots\ldots \; (g),$$

il che c' insegna che *la somma di projezione dell' aree* λ, λ', λ'', *ec.*, *sopra tre piani rettangolari è sempre la medesima.*

5. Quando si projettano successivamente le stesse aree λ, λ', λ'', ec., sopra diversi piani, la somma delle projezioni varia necessariamente di grandezza passando da un piano ad un altro, e deve conseguentemente trovarsi un piano sul quale essa sia la più grande possibile. L' equazione (g) dà i mezzi di determinare la posizione di questo piano della più gran projezione, e che si chiama il *piano principale*. Risolvendola rapporto a P, si trova

$$P=\sqrt{\left[A^2+B^2+C^2-P'^2-P''^2\right]}.$$

Ora, il più gran valore che possa avere la somma P delle projezioni è evidentemente quando P′ e P″ sono nulli: così questa più gran somma delle projezioni dell' aree λ, λ', λ'', ec., sarà data dall' espressione

$$P=\sqrt{\left[A^2+B^2+C^2\right]} \; \ldots\ldots \; (h),$$

e per determinare il piano sul quale essa ha luogo, non si tratta più che di conoscere i valori dell' inclinazioni α, β, γ del piano P corrispondente all' ipotesi (h). Osserviamo perciò che moltiplicando respettivamente i due membri dell' uguaglianze (c) e (c') per $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$, viene

$$P\cos\alpha=A\cos^2\alpha+B\cos\beta\cos\alpha+C\cos\gamma\cos\alpha,$$
$$P'\cos\alpha'=A\cos^2\alpha'+B\cos\beta'\cos\alpha'+C\cos\gamma'\cos\alpha',$$
$$P''\cos\alpha''=A\cos^2\alpha''+B\cos\beta''\cos\alpha''+C\cos\gamma''\cos\alpha'',$$

donde, prendendo la somma e riducendo mediante le relazioni (e) ed (f),

$$P\cos\alpha+P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''=A,$$

si troverebbe nella stessa maniera, moltiplicando l' espressioni (c) e (c') per $\cos\beta$, $\cos\beta'$, $\cos\beta''$,

$$P\cos\beta+P'\cos\beta'+P''\cos\beta''=B;$$

e moltiplicando le medesime espressioni per $\cos\gamma$, $\cos\gamma'$, $\cos\gamma''$,

$$P\cos\gamma+P'\cos\gamma'+P''\cos\gamma''=C.$$

Ma nell' ipotesi di $P'=o$, $P''=o$, quest' ultime uguaglianze si riducono a

$$\left.\begin{array}{l} A=P\cos\alpha \\ B=P\cos\beta \\ C=P\cos\gamma \end{array}\right\} \; \ldots\ldots\ldots \; (i).$$

Così,

$$\cos\alpha=\frac{A}{P}, \quad \cos\beta=\frac{B}{P}, \quad \cos\gamma=\frac{C}{P},$$

il che diviene, sostituendo in luogo di P il suo valore (h),

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (k).$$

Dunque, quando si conoscerà la somma delle projezioni A, B, C, sopra tre piani rettangolari qualunque, l'espressioni (*k*) determineranno immediatamente l'inclinazione del piano della più gran projezione, o del *piano principale*, rapporto a questi tre piani coordinati. Siccome questa determinazione del piano principale non dipende che dall'inclinazioni α, β, γ, si vede che esistono un'infinità di piani principali paralleli tra loro, e che in generale la somma delle projezioni di un numero qualunque di aree è la medesima sopra tutti i piani paralleli tra loro.

6. È ancora facile vedere, che la somma delle projezioni dell'aree λ, λ', λ'', ec., è la stessa sopra tutti i piani ugualmente inclinati sul piano principale; poichè, chiamando Q la somma delle projezioni sopra un piano qualunque le cui inclinazioni rapporto ai piani coordinati sono *a*, *b*, *c*, abbiamo, mediante la relazione (c),

$$Q = A\cos a + B\cos b + C\cos c.$$

Ma se α, β, γ indicano sempre l'inclinazioni del piano principale, si ha ancora

$$A = P\cos\alpha,\quad B = P\cos\beta,\quad C = P\cos\gamma,$$

donde, sostituendo questi valori nell'equazione precedente,

$$Q = P\Big(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma\Big).$$

Ora, la quantità $\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma$ è equivalente al coseno dell'angolo formato dal piano principale (α, β, γ) col piano qualunque (*a*, *b*, c); dunque, chiamando θ quest'angolo d'inclinazione, il valore di Q si riduce a

$$Q = P\cos\theta,$$

ovvero, sostituendo invece di P il suo valore (*h*),

$$Q = \cos\theta \,.\, \sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

quest'ultima espressione ci prova che la somma Q delle projezioni è la medesima per tutti i piani, che fanno uno stesso angolo θ col piano principale, e che questa somma diminuisce a misura che l'angolo θ aumenta. Quando $\theta = 90°$, si ha $\cos\theta = 0$, per conseguenza,

$$Q = 0;$$

vale a dire che la somma delle projezioni è nulla sopra tutti i piani perpendicolari al piano principale.

7. Esaminiamo come tutte le proprietà precedenti delle projezioni e del piano principale possono applicarsi ai momenti.

Sia R una forza rappresentata in grandezza e in direzione dalla retta AB (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 6); se da un punto qualunque O si abbassa sopra AB una perpendicolare $OA=r$, il prodotto

$$OA\times AB \text{ ovvero } rR$$

sarà il momento della forza R rapporto al punto O (*Vedi* Momento n.° 1); ma conducendo la retta OB si forma un triangolo rettangolo OAB, la cui area è uguale a $\frac{1}{2}OA\times AB$ ossia $\frac{1}{2}rR$; così l'area di questo triangolo è equivalente alla metà del momento della forza R, e ne resulta che un momento può sempre essere rappresentato dal doppio dell'area del triangolo che ha per base la forza e per vertice il centro dei momenti. Ora, la projezione del triangolo OAB sopra un piano condotto arbitrariamente pel centro O dei momenti è un altro triangolo OA'B' che ha lo stesso vertice del primo, e la cui base A'B', projezione della retta AB, può rappresentare una forza R' differente dalla forza rappresentata da AB; dunque la projezione del momento della forza AB è equivalente al momento della forza A'B'. Pel punto B', conduciamo B'a parallela ad AB, e supponiamo che la forza R sia trasportata parallelamente a se stessa nel punto B'; essa sarà allora rappresentata da B'a = AB; dimodochè, se si decompone in due altre forze, l'una perpendicolare al piano di projezione, e l'altra diretta in questo piano, l'ultima componente sarà evidentemente B'A', e potremo dire che la projezione del momento di una forza qualunque è equivalente al momento della sua componente seguendo il piano di projezione. È sopra questa proprietà che è stabilito il legame dei momenti con le projezioni delle superficie piane.

8. Infatti, siano R, R_1, R_2, R_3, ec., delle forze qualunque; prendiamo sopra le loro direzioni delle rette proporzionali alla loro intensità, e consideriamo queste rette come le basi di tanti triangoli aventi per vertice comune il centro O dei momenti, che prenderemo per origine delle coordinate, e per altezze le perpendicolari r, r_1, r_2, r_3, ec., abbassate dal centro sopra le basi R, R_1, R_2, ec.: le projezioni di questi triangoli sopra un piano che forma gli angoli α, β, e γ con gli assi, saranno altri triangoli aventi per basi le projezioni R', R'_1, R'_2, R'_3, ec., dei lati R, R_1, R_2, R_3, ec., e per altezze perpendicolari r', r'_1, r'_2, r'_3, ec., abbassate dal centro O sopra queste basi.

L'aree dei triangoli nello spazio saranno mediante ciò

$$\frac{1}{2}rR,\ \ \frac{1}{2}r_1R_1,\ \ \frac{1}{2}r_2R_2,\ \text{ ec. } \ldots\ldots (l),$$

e l'aree delle loro projezioni sul piano (α, β, γ) saranno respettivamente

$$\frac{1}{2}r'R',\ \ \frac{1}{2}r'_1R'_1,\ \ \frac{1}{2}r'_2R'_2,\ \text{ ec. } \ldots\ldots (m).$$

Ma, mediante il teorema del n.° 3, se indichiamo respettivamente con A, B, C le somme delle projezioni dell'aree (l) sopra i piani coordinati, avremo

$$\frac{1}{2}r'R'+\frac{1}{2}r'_1R'_1+\frac{1}{2}r'_2R'_2+\text{ ec.}$$
$$=A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma,$$

ovvero

$$r'R'+r'_1R'_1+r'_2R'_2+\text{ ec.}$$
$$=2A\cos\alpha+2B\cos\beta+2C\cos\gamma.$$

Così, osservando che i prodotti $r'R'$, $r'_1R'_1$, ec., sono i momenti delle forze R', R'_1, R'_2 ec., e che le quantità $2A$, $2B$, $2C$ rappresentano le somme del doppio delle projezioni dell' aree (l) sopra i piani coordinati, ne concluderemo che *la somma dei momenti delle projezioni delle forze sul piano* (α, β, γ), *che passa per l' origine, è eguale alle tre somme dei momenti delle projezioni delle stesse forze sopra i piani coordinati, moltiplicate respettivamente per i coseni dell' inclinazioni del piano di projezione.*

9. Si troverebbe con sostituzioni simili nell' equazioni (g) che

La somma dei quadrati dei momenti delle projezioni delle diverse forze rapporto a tre piani rettangolari è costante.

Finalmente l' equazioni (i) faranno conoscere la posizione del piano sul quale la somma dei momenti è la più grande, e l' equazione (h) darà il valore della somma dei momenti sul piano principale. Si chiama quest' ultima somma *momento principale.*

PROPORZIONALE dicesi di ciò che ha rapporto ad una proporzione; così dicesi parti *proporzionali*, scale *proporzionali*, ec. ec.

Il problema di trovare geometricamente due *medie proporzionali* tra due linee date, è celebre fino dalla più remota antichità, ed è lo stesso di quello della *duplicazione del cubo* (*Vedi* Questa parola), come lo faremo conoscere. Siano x ed y le medie proporzionali domandate tra un numero a e il suo doppio $2a$, ovvero fra la proporzione *continua*

$$a : x :: x : y :: y : 2a.$$

Dalle proprietà delle progressioni geometriche si ha (*Vedi* Progres. Geom. n.° 3)

$$a^3 : x^3 :: a : 2a$$

donde

$$\frac{x^3}{a^3}=2.$$

Così a ed x essendo respettivamente i lati di due cubi, siccome questi solidi stanno tra loro nel rapporto delle terze potenze dei loro lati (*Vedi* Solido), il cubo il cui lato è x sarà il doppio di quello il cui lato è a. Si tratta dunque di trovare il valore di x, ovvero della prima delle due medie proporzionali tra a e $2a$.

La soluzione geometrica di questo problema o la costruzione della linea x è impossibile sotto le condizioni volute dagli antichi, vale a dire con l' aiuto solamente della riga e del compasso, poichè il valore di x ricavato dall'espressione precedente è $x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}$, e non si saprebbero costruire delle quantità irrazionali del terzo grado senza ricorrere a curve differenti dal circolo, le cui intersezioni con linee rette non possono somministrare che la costruzione di ciò che si chiama *luogo del prim' ordine*. (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria). Dopo aver riconosciuto che la geometria elementare era insofficiente in questo caso, i matematici greci si sforzarono di cercare processi più elevati. Diversi trovarono delle curve ingegnosissime, come la *concoide* e la *cissoide* (*Vedi* Queste parole); altri immaginarono degl' instrumenti; e Platone, il primo istigatore di tutti questi lavori, si distinse particolarmente inventando l' instrumento semplicissimo che faremo conoscere. Questo consiste in una squadra GRM (*Tav.* CIII, *fig.* 8) la quale porta ad uno dei suoi bracci GR una riga mobile PS disposta in modo da potere strisciare lungo di questo braccio senza cessare di essergli perpendicolare.

Per trovare con quest'instrumento due medie proporzionali tra due linee qualunque date AB e BC, dopo aver messo queste due linee ad angolo retto nel punto B, si prolungano indefinitamente verso R e P. Essendo fatta questa preparazione, si pone l'angolo della squadra in un punto R, tale che il suo ramo RM passando per l'estremità A della linea AB, il suo altro ramo RG tagli il prolungamento BP in un punto P, ove la riga mobile PS essendo portata passa per l'estremità C della seconda linea BC, cosa che alcuni tentativi faranno scoprire; in questa posizione, le due linee BR e BP sono le due medie proporzionali domandate. Infatti, il triangolo ARP essendo rettangolo in R e la retta RB perpendicolare sopra l'ipotenusa PB di questo triangolo, si ha

AB : BR :: BR : BP.

Ugualmente, il triangolo RPC è rettangolo in P e la retta PB perpendicolare sopra la sua ipotenusa; si ha dunque ancora

BR : BP :: BP : BC

dunque

AB : BR :: BR : BP :: BP : BC.

Cartesio ha superato molto tutti gli antichi i quali si sono occupati della duplicazione del cubo; senza parlare dell'elegante soluzione che dà di questo problema nella sua geometria, descriveremo l'instrumento che ha inventato per trovare, senza alcun tentativo, non solamente due medie proporzionali, ma ancora qualunque numero che se ne voglia.

Quest' instrumento è una specie di compasso composto di due righe AB e BC mobili intorno di una cerniera B (*Tav.* CIII *fig.* 9). Sopra queste righe son disposte più squadre, secondo il numero delle medie proporzionali che si cercano: son necessarie tre squadre per due medie, quattro per tre, cinque per quattro e così di seguito. Ciascuna di queste squadre tocca l'angolo della sua vicina, come si vede, nei punti f, g, h, m, o. I rami dp, fs, gt, hx, my, ou, ec., possono strisciare sopra le righe AB e BC; per conseguenza gli altri rami df, fg, dg, hm, ec., essendo forzati a muoversi, se si arresta la prima squadra fdp nel punto d sopra la riga BC, aprendo l'angolo o il compasso ABC, la squadra pdf farà strisciare la sua vicina gfs sopra la riga AB; la squadra gfs scacciata scaccerà la squadra hgt sopra la riga BC, e così di seguito; dimodochè con lo stesso movimento tutte queste squadre si spingono e si scacciano nello stesso tempo, e quando si chiude interamente il compasso, vale a dire quando le due righe AB e BC si toccano, tutti i punti o, m, g, h, f, d, vengono a riunirsi al punto a.

Per ottenere con l'aiuto di quest' instrumento due medie proporzionali tra le rette date BD e BH, basta trasportare la più piccola BD sopra la riga BC da B in d, e la più grande BH, sopra la riga AB da B in h; ciò fatto, si pone l'angolo della prima squadra al punto d ove si fissa, quindi si apre il compasso fino a tanto che la terza squadra hgt passi per l'estremità h della più grande delle due linee date; in questa posizione l'instrumento fa conoscere le due linee Bf, Bg, le quali sono le due medie proporzionali domandate. È facile vedere dall' inspezione dei triangoli rettangoli formati dai lati delle squadre e quelli del compasso che si ha

Bd : Bf :: Bf : Bg :: Bg : Bh.

Se si dumandassero tre medie proporzionali alle due linee BD e BM, bisognerebbe impiegare quattro squadre; allora si trasporterebbe la più piccola linea

da B in d, e la più grande da B in m; si fisserebbe la prima squadra in d, e si aprirebbe il compasso fino a tanto che la quarta squadra passi per l'estremità m della più grande Bm delle due linee date. In questa posizione, le tre linee Bf, Bg, Bh, sarebbero le tre medie proporzionali domandate. È evidente che quest' instrumento si estende a qualunque numero di medie proporzionali che si vorrà.

PROPORZIONE. (*Alg.*). Uguaglianza di due rapporti. (*Vedi* NOZIONI PRELIMINARI n.° 16 e RAPPORTO).

La proporzione si chiama *aritmetica* o *geometrica* secondo, che i rapporti che la compongono sono *aritmetici* o *geometrici.*

1. PROPORZIONE ARITMETICA. Se due numeri A e B hanno la stessa differenza di due altri numeri C e D, l'espressione di questa relazione di uguaglianza

$$A-B=C-D \;.\;.\;.\;.\;.\; (a),$$

che già si scriveva

$$A.B:C.D,$$

è una *proporzione aritmetica.*

Il primo e l'ultimo termine della proporzione prendono il nome di *estremi*, e il secondo e il terzo quello di *medj.*

Aggiungendo ai due membri dell'uguaglianza (a) la quantità B+D, essa diventa

$$A+D=C+B \;.\;.\;.\;.\;.\; (c),$$

vale a dire che *in ogni proporzione aritmetica la somma degli estremi è uguale alla somma dei medj.*

2. Questa proprietà fondamentale dà il mezzo di calcolare uno dei termini della proporzione con l'aiuto dei tre altri, poichè da (c) si deduce:

$$A=C+B-D, \qquad C=A+D-B,$$
$$B=A+D-C, \qquad D=C+B-A,$$

il che c'insegna: *1.*° che uno qualunque dei *medj* è eguale alla somma degli *estremi* diminuita dall'altro medio; 2.° che uno qualunque degli *estremi* è uguale alla somma dei *medj* diminuita dell'altro estremo.

3. In una proporzione aritmetica, la *differenza* degli antecedenti è uguale a quella dei conseguenti, vale a dire, che *se* si ha la proporzione

$$A-B=C-D,$$

si ha ancora

$$A-C=B-D,$$

il che è evidente. In generale, tutte le proprietà delle proporzioni aritmetiche si deducono dalle semplici leggi dell'uguaglianza, e sono identiche con queste leggi.

4. Quando in una proporzione aritmetica i *medj* sono uguali come

$$A-B=B-C \;.\;.\;.\;.\;.\; (d),$$

la quantità B prende il nome di *media proporzionale.*

Si ottiene il valore di una media proporzionale tra due numeri dati, prendendo la metà della somma di questi numeri. Infatti dall'uguaglianza (d) si deduce

$$2B=A+C,$$

donde

$$B=\frac{A+C}{2}.$$

5. Proporzione Geometrica. Queste proporzioni hanno delle proprietà consimili a quelle delle proporzioni aritmetiche. Avanti di darne la deduzione, dobbiamo fare osservare che i termini *rapporto* e *proporzione* si applicano più particolarmente ai rapporti e alle proporzioni per *quoziente*; dimodochè quando si parla di una proporzione senza specificarne la sua natura, s'intende sempre parlare di una proporzione *geometrica*. Di già è stato proposto di sostituire le denominazioni di *proporzione per differenza* e di *proporzione per quoziente* a quelle di *proporzione aritmetica* e di *proporzione geometrica*, le quali sono veramente inesatte per motivo che esse non si riferiscono alla definizione del loro oggetto; ma senza niente pregiudicare sopra i cambiamenti che diventano necessari nella nomenclatura delle matematiche, indicheremo semplicemente in questo punto una proporzione geometrica con la sola parola *proporzione*.

6. Quando il rapporto di due numeri A e B, vale a dire il quoziente della divisione di uno di questi numeri per l'altro, è uguale al rapporto di due altri numeri C e D, l'espressione di questa relazione di uguaglianza

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

che ancora abitualmente si scrive

$$A : B :: C : D \; . \; . \; . \; . \; . \; (d),$$

e che si pronunzia A *sta a* B *come* C *sta a* D, è una *proporzione*.

Il primo e l'ultimo termine A e D si chiamano gli *estremi*, e i due altri i *medj*. A è il *primo antecedente*, C il secondo; B è il *primo conseguente*, D il secondo.

7. Riducendo i due membri dell'uguaglianza

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

allo stesso denominatore, essa diventa

$$\frac{A\times D}{B\times D}=\frac{C\times B}{B\times D},$$

il che dà, sottraendo il denominatore comune,

$$A\times D=C\times B.$$

Quest'ultima uguaglianza c'insegna che *in qualunque proporzione il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medj*.

8. Si deduce immediatamente da quest'uguaglianza le quattro seguenti espressioni:

$$A=\frac{C\times B}{D}, \qquad C=\frac{A\times D}{B},$$

$$B=\frac{A\times D}{C}, \qquad D=\frac{C\times B}{A},$$

dalle quali resulta: 1.° che uno qualunque degli *estremi* è uguale al prodotto

dei *medj* diviso per l' altro *estremo*; 2.° che uno qualunque dei *medj* è uguale al prodotto degli *estremi* diviso per l' altro *medio*.

La regola del *tre*, in aritmetica, è fondata sopra queste relazioni. (*Vedi* TRE).

9. In qualunque proporzione

$$A : B :: C : D$$

il rapporto degli antecedenti è uguale a quello dei conseguenti; vale a dire che si ha

$$A : C :: B : D.$$

Poichè la proporzione essendo messa sotto la forma

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

se si moltiplicano i due termini di quest' uguaglianza per la quantità $\frac{B}{C}$, si ottiene

$$\frac{A \,.\, B}{B \,.\, C} = \frac{C \,.\, B}{D \,.\, C}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{A}{C} = \frac{B}{D}.$$

In qualunque proporzione, si può dunque cangiare i medj di posto, ovvero ancora mettere gli estremi in luogo dei medj senza distruggerla. I quattro termini sono sempre in proporzione, solamente il rapporto non è più lo stesso.

I matematici indicavano già questi cangiamenti nell' ordine dei termini di una proporzione con nomi particolari; così, essi chiamavano *alternando* o *permutando* la trasposizione dei medj tra loro, e *invertendo*, il rovesciamento dei rapporti che ha luogo quando si mettono gli estremi in luogo dei medj. In questo modo, la proporzione essendo

$$A : B :: C : D,$$

Si ha: *alternando* . . . . $A : C :: B : D$,
e *invertendo* . . . . $B : A :: D : C$.

10. Combinando queste proprietà generali con quelle dei rapporti (*Vedi* RAPPORTO), si ottengono facilmente tutti i cangiamenti che si possono far subire ai quattro termini di una proporzione fondamentale senza distruggerla. Ecco questi cangiamenti: M essendo un numero qualunque e

$$A : B :: C : D$$

essendo sempre la proporzione primitiva, si ha

componendo . . . $A+B : B :: C+D : D$,
dividendo . . . . . $A-B : B :: C-D : D$,
$A \times M : B :: C \times M : D$,
$\frac{A}{M} : B :: \frac{C}{M} : D$,
$(A+B \,.\, M) : B :: (C+DM) : D$,
$(A-B \,.\, M) : B :: (C-DM) : D$,
$(A+C) : (B+D) :: C : D$,
$(A+C) : (B+D) :: (A-C) : (B-D)$,
ec. . . . . ec. . . . .

Si prova che la proporzione sussiste sempre mediante l' uguaglianza del prodotto degli estremi a quello dei medj, che ha luogo in queste diverse modificazioni della proporzione fondamentale.

11. I prodotti dei termini corrispondenti di due proporzioni formano una nuova proporzione, vale a dire che avendo le due proporzioni

$$\left.\begin{array}{l} A : B :: C : D \\ E : F :: G : H \end{array}\right\} \ldots\ldots (m),$$

si ha ancora

$$A\times E : B\times F :: C\times G : D\times H.$$

Infatti, R essendo il rapporto della prima proporzione, e R′ quello della seconda, si ha evidentemente

$$A\times E : B\times F = R\times R'$$
$$C\times G : D\times H = R\times R'.$$

L' ultima proporzione ha dunque un rapporto composto di quello delle due proposte. Se si avessero tre, o in generale un numero qualunque di proporzioni

$$A : B :: C : D,$$
$$E : F :: G : H,$$
$$I : K :: L : M,$$
$$N : O :: P : Q,$$
$$\text{ec.} \ldots \text{ ec.} \ldots,$$

si avrebbe ugualmente

$$A\times E\times I\times N\times \text{ ec.} : B\times F\times K\times O\times \text{ ec.}$$
$$:: C\times G\times L\times P\times \text{ ec.} : D\times H\times M\times Q\times \text{ ec.}$$

Nel caso dell' uguaglianza di tutti i fattori che entrano in ciascun prodotto, si avrebbe, indicando con m il numero delle proporzioni,

$$A^m : B^m :: C^m : D^m.$$

Così, quando quattro numeri sono in proporzione, tutte le *potenze* dello stesso grado di questi numeri sono ancora in proporzione. È evidente che possiamo dire altrettanto delle *radici*.

Paragonando le due proporzioni primitive (m), si vede facilmente che si ha ancora

$$\frac{A}{E} : \frac{B}{F} :: \frac{C}{G} : \frac{D}{H},$$

donde segue che i quozienti dei termini corrispondenti di due proporzioni sono ancora in proporzione.

12. Quando i due *medj* sono uguali, come nella proporzione

$$A : B :: B : C$$

la quantità B si chiama *media proporzionale* tra A e C. Il suo valore è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi. Infatti si ha

$$B\times B = A\times C \ldots\ldots (q).$$

e, per conseguenza

$$B = \sqrt{A \times C}.$$

Si chiama *proporzione continua* quella nella quale ciascun *medio* è una quantità media proporzionale ai due termini tra i quali esso è situato. Per esempio

$$2 : 4 :: 8 : 16$$

è una proporzione *continua*, perchè si ha

$$2 : 4 :: 4 : 8 \quad \text{e} \quad 4 : 8 :: 8 : 16.$$

13. Se si ha un seguito di proporzioni che abbiano un rapporto comune, come

$$\begin{array}{l} A : B :: M : N, \\ C : D :: M : N, \\ E : F :: M : N, \\ G : H :: M : N, \\ \text{ec.} \ldots \text{ ec.} \ldots, \end{array}$$

il che dà

$$A : B :: C : D :: E : F :: G : H :: \text{ec.} \ldots\ldots :: M : N,$$

la somma di tutti i primi antecedenti e la somma di tutti i primi conseguenti avranno tra loro questo stesso rapporto comune.

Infatti da

$$A : B :: C : D$$

si deduce

$$(A+C) : (B+D) :: C : D,$$

invece del rapporto $C : D$, sostituendo in quest' ultima proporzione il rapporto $E : F$ che gli è uguale, essa diventerà

$$(A+C) : (B+D) :: E : F$$

e se ne dedurrà ancora

$$(A+C+E) : (B+D+F) :: E : F,$$

sostituendo in questa invece del rapporto $E : F$ il rapporto uguale $G : H$ si troverà ugualmente

$$(A+C+E+G) : (B+D+F+H) :: G : H$$

e così di seguito. Si ha dunque in generale

$$(A+C+E+G+ \text{ cc}) : (B+D+F+H+ \text{ ec.}) :: M : N.$$

14. Si dà il nome di Proporzione Armonica a quella che ha luogo fra tre numeri, tali che il rapporto del primo al terzo è uguale al rapporto delle differenze che vi è tra il secondo e i due altri. Per esempio i tre numeri 2, 3, 6, sono in *proporzione armonica*, perchè si ha

$$2 : 6 :: 3-2 : 6-3, \quad \text{ovvero } 2 : 6 :: 1 : 3.$$

In generale, se i numeri A, B, C danno la proporzione

$$A : C :: B-A : C-B$$

questi numeri sono in *proporzione armonica*. Il secondo numero B prende il nome di *medio armonico*. Si ottiene il suo valore, quando quelli dei due altri numeri sono dati, dividendo il doppio prodotto di questi numeri per la loro somma. Infatti si deduce dalla proporzione di sopra

$$A(C-B)=C(B-A), \quad \text{ovvero} \quad AC-AB=BC-AC,$$

il che dà

$$B\left(A+C\right)=2AC, \quad \text{e} \quad B=\frac{2AC}{A+C}.$$

15. Gli antichi si sono molto occupati delle proprietà delle *medie proporzionali*, tanto aritmetiche quanto geometriche e armoniche. Pappus, nelle sue *collezioni*, ne annovera diverse nel numero delle quali si trova la seguente: se a, b, c sono tre numeri tali che b sia *medio proporzionale* aritmetico o geometrico o armonico tra i due altri, si avrà nel caso del medio

aritmetico . . . . . $a : a :: a-b : b-c$,
geometrico . . . . . $a : b :: a-b : b-c$,
armonico. . . . . . $a : c :: a-b : b-c$.

Quest' espressione di tre differenti *medj* proporzionali con l'aiuto della sola proporzione geometrica è osservabile per la sua eleganza. Si ricava facilmente da ciascuna di queste proporzioni il valore del *medio* che essa contiene. Questi valori sono infatti:

Medio aritmetico . . . . . $b=\frac{a+c}{2}$,

Medio geometrico. . . . . $b=\sqrt{ac}$,

Medio armonico. . . . . . $b=\frac{2ac}{a+c}$.

Vedi le parole Armonico e Contro-Armonico.

PROPOSIZIONE. Nelle matematiche ciò significa, una verità avanzata che deve essera dimostrata, o un' operazione proposta e che deve essere eseguita. Nel primo caso, la proposizione prende il nome di *teorema*, nel secondo quello di *problema*.

PROSPETTIVA. Questo ramo dell' *Ottica generale* (*Vedi* Ottica) comprende l'arte di rappresentare sopra una superficie piana gli oggetti visibili nelle loro situazioni respettive, secondo le differenze che tra essi produce il diverso grado della loro lontananza, e tali infine, quali sarebbero veduti attraverso ad un piano trasparente interposto tra essi e l'occhio.

La prospettiva si divide in *speculativa* e *pratica*. La prima è la teoria delle differenti apparenze degli oggetti secondo le posizioni diverse dell' occhio che gli osserva. La seconda è l'arte di rappresentarli sotto una forma simile a quella sotto la quale ci sembra di vederli.

La prospettiva pratica si distingue pure in *lineare* e in *aerea*, secondochè considera soltanto la *forma* degli oggetti ovvero le gradazioni dei *colori* della loro superficie. L'arte di applicare i colori e di rappresentare le diverse parti degli

oggetti secondo il modo col quale sono illuminati riguarda la pittura. Noi non dobbiamo qui occuparci che dei principj della *Prospettiva lineare.*

1. Per formarsi un'idea esatta della prospettiva, bisogna immaginare che dall'occhio che osserva si dirigano a tutti i punti visibili della superficie degli oggetti delle linee rette, le quali attraversino un piano trasparente tra l'occhio e questi oggetti: le intersezioni di queste rette col piano determineranno su questo piano una serie di punti che offriranno in piccolo la rappresentanza degli oggetti. Il piano trasparente, che in generale si suppone perpendicolare all'orizzonte, prende il nome di *quadro.*

2. Da ciò che abbiamo ora detto i due primi principj della prospettiva sono:

I. *Tutto ciò che vien rappresentato sopra un quadro deve essere regolato da un solo ed unico punto di veduta.*

II. *La prospettiva di un punto qualunque è in quel luogo del quadro nel quale il suo piano è attraversato dalla retta o raggio visuale che va dall'* occhio *a questo punto.*

Si dice *punto di veduta* il punto in cui termina la retta condotta dall'occhio perpendicolarmente al piano del quadro.

3. La prospettiva di una retta, che essendo prolungata non passerebbe per l'occhio, è l'intersezione del piano del quadro col piano di un triangolo rettilineo di cui la retta originale è la base e i due raggi visuali condotti dalle sue estremità fino all'occhio sono i lati. Basta dunque conoscere i punti che formano la prospettiva delle due estremità di una retta per avere la prospettiva di questa retta.

4. La prospettiva di una figura piana si compone delle prospettive dei suoi lati, perchè i raggi visuali condotti dall'occhio a tutti i punti di questa figura formano una piramide di cui essa è la base e che ha il suo vertice nell'occhio; ma la figura formata sul quadro dalla intersezione del suo piano con questa piramide è la prospettiva della figura originale, dunque questa prospettiva ha per lati le prospettive dei lati della figura originale.

5. Da questa proposizione resulta che la prospettiva di un poligono non può essere una figura simile alla figura originale, a meno che questa non sia parallela al piano del quadro, perchè le sezioni di una piramide con un piano non sono simili alla base che quando il piano secante è parallelo a questa base.

6. La prospettiva di un solido è una figura piana composta delle prospettive di tutte le sue facce visibili.

7. Il problema fondamentale della prospettiva consiste nel trovare la prospettiva di un punto, perchè da ciò che abbiamo detto si rileva chiaramente che le prospettive delle linee, delle superficie e dei solidi riduconsi a quelle dei punti. Ma la posizione di un punto nello spazio assoluto essendo determinata dalle sue distanze da tre piani dati di posizione (*Vedi* Applicazione), si prendono in prospettiva per questi piani: 1.° Quello del quadro, che considereremo come verticale o perpendicolare all'orizzonte; 2.° Un piano parallelo all'orizzonte, che passi per l'occhio, e che chiameremo *piano orizzontale*; 3.° Un piano perpendicolare ai primi due, che passi pure per l'occhio, e che si dirà *piano verticale.* Sia per esempio ABCD (*Tav.* CXCII, *fig.* 1) il piano del quadro, IKLN sarà il *piano orizzontale*, e EFGH il *piano verticale*; l'occhio sarà situato in O nell'intersezione di questi due ultimi piani.

L'intersezione ST del piano orizzontale col piano del quadro dicesi la *linea orizzontale* del quadro, e l'intersezione QR del piano verticale col piano del quadro si dice la *linea verticale* del quadro.

Il *punto di veduta* è il punto o, intersezione della linea orizzontale colla linea verticale.

Ciò posto, occupiamoci della soluzione del problema fondamentale del quale ecco l'enunciato:

Problema fondamentale. *Essendo data la posizione del piano di un quadro, del luogo dell'occhio e di un punto dietro il quadro, trovare sul quadro il suo punto di prospettiva.*

Sia Z il punto dato del quale si cerchi il punto di prospettiva *z* sul quadro. Da questo punto Z abbassiamo sul piano orizzontale una perpendicolare ZX e sul piano verticale una perpendicolare ZM: pel punto X conduciamo XY perpendicolare al piano verticale e per M conduciamo MY perpendicolare al piano orizzontale. È evidente che ZXYM è un rettangolo il cui piano è parallelo al piano del quadro; ZX o MY misurano la distanza del punto dato Z dal piano orizzontale, ossia la sua altezza al di sopra del livello dell'occhio; ZM o XY misurano la distanza del punto Z dal piano verticale, ossia la quantità della quale questo punto trovasi alla sinistra rapporto all'occhio. La porzione Y*o* della linea del punto di veduta OP misura la distanza del rettangolo ZXYM dal piano del quadro, e per conseguenza quella del punto Z da questo stesso piano. Il punto Z essendo supposto dato di posizione, le tre distanze ZM, ZX, Y*o* sono date di grandezza.

Dal luogo O dell'occhio tiriamo le rette OX, OZ, OM ed avremo una piramide quadrangolare OZMYX che si troverà tagliata in *zmoa* dal piano del quadro. Dunque *zmoa* sarà la prospettiva del rettangolo ZMYX, come il punto *z* sarà la prospettiva del punto Z. Inoltre la base di questa piramide, ossia il rettangolo ZMYX, essendo parallela al piano del quadro, l'intersezione *zmoa* sarà un rettangolo simile a ZMYX. Ora, a motivo dei triangoli simili O*om*, OYM, si ha la proporzione

$$\mathrm{O}o : \mathrm{OY} :: om : \mathrm{MY};$$

e di più, a motivo della similitudine dei rettangoli,

$$om : \mathrm{MY} :: zm : \mathrm{ZM};$$

dunque O*o* sta ad OY come un lato qualunque del rettangolo *zmoa* sta al lato omologo di ZMYX. Da questi rapporti si traggono le due regole o *anologie* seguenti, che racchiudono la soluzione numerica generale del problema.

1.° *La distanza* O*o* *dell'occhio dal piano del quadro, che si dice il* Raggio principale, *sta a questa stessa distanza aumentata di quella dell'oggetto dal piano del quadro, come la distanza del punto di prospettiva dalla linea verticale sta alla distanza dell'oggetto dal piano verticale.* Vale a dire nel nostro caso:

$$\mathrm{O}o : \mathrm{OY}(=\mathrm{O}o+o\mathrm{Y}) :: zm : \mathrm{ZM}.$$

2.° *Il raggio principale sta a questo stesso raggio aumentato della distanza dell'oggetto dal piano del quadro, come la distanza del punto di prospettiva dalla linea orizzontale sta alla distanza dell'oggetto dal piano orizzontale.* Vale a dire che qui si ha:

$$\mathrm{O}o : \mathrm{OY} :: za : \mathrm{ZX}$$

8. Per dare un esempio dell'applicazione di queste regole, supponiamo l'occhio lontano 80 decimetri dal quadro sul quale si vuol determinare il punto di prospettiva di un punto originale lontano 160 decimetri dal piano del quadro, elevato 120 decimetri al di sopra del livello dell'occhio, e posto alla sinistra alla distanza di 60 decimetri dal piano verticale.

Sia ABCD (*Tav.* CXCII, *fig.* 2) il piano del quadro dato, che supporremo rettangolare. Determiniamo sul quadro il punto o dirimpetto al quale vogliamo che sia situato l'occhio, e facciamo passare per questo punto o, che è allora il *punto di veduta* del quadro, una retta QR perpendicolare ai due lati AB e CD, egualmente che una retta ST perpendicolare agli altri due lati AD, BC. Queste rette saranno la *verticale* e l' *orizzontale* del quadro.

Risolviamo quindi le proporzioni

$$80 : 80+160 :: x : 60,$$
$$80 : 80+160 :: y : 120,$$

che daranno $x=20$, $y=40$: x è la distanza del punto di prospettiva dalla linea verticale, e y quella dello stesso punto dalla linea orizzontale. Prendiamo dunque sull' orizzontale, ed alla sua sinistra, una parte om eguale a 20 decimetri, e sulla verticale una parte on eguale a 40 decimetri; dai punti m ed n conduciamo le rette mz ed nz respettivamente perpendicolari all' orizzontale e alla verticale, e il loro punto d' incontro z sarà il punto di prospettiva domandato. Infatti, questo punto è situato a 20 decimetri di distanza dalla verticale e a 40 dall' orizzontale.

9. Lo stesso problema può risolversi con una costruzione puramente grafica che passeremo adesso a far conoscere, perchè serve di base alla maggior parte dei metodi che s' insegnano nei trattati di prospettiva.

Sia ABCD (*Tav.* CXCIII, *fig.* 3, e *Tav.* CXCII, *fig.* 4) il piano del quadro, QR la sua linea verticale ed ST la sua linea orizzontale, o il punto di veduta e Z un punto dato. Facciamo passare pel punto Z un piano orizzontale MN, che sarà per conseguenza parallelo alla linea orizzontale ST. Sia EF l' intersezione di questo piano col piano verticale che passa per QR, e sia DC la sua intersezione col piano del quadro.

Dal punto Z abbassiamo sopra DC la perpendicolare ZI, che misurerà la distanza di questo punto dal piano del quadro: il punto I si dice il *punto d' incidenza*: dal punto di veduta o conduciamo al punto d' incidenza una retta oI, portiamo la distanza ZI sopra DC da I in Z′, e sull' orizzontale ST prendiamo una distanza Oo eguale al raggio principale ossia alla distanza dell' occhio dal piano del quadro. Uniamo O e Z′ colla retta OZ′, e il punto z nel quale OZ′ taglierà oI sarà la prospettiva cercata.

Per dimostrarlo, conduciamo pel punto z la retta zq perpendicolare a DC, egualmente che la retta zp perpendicolare a QR. I triangoli Ozo e Z′zI sono simili, e siccome inoltre zs e zq sono le altezze respettive di questi triangoli, si ha

$$oO : Z'I :: zs : zq,$$

donde si trae

$$oO : oO+Z'I :: zs : zs+zq;$$

ora

$$oO+Z'I=oO+ZI \quad e \quad zs+zq=sq=oR,$$

dunque quest' ultima proporzione si riduce all' altra

$$oO : oO+ZI :: zs : oR \; \ldots\ldots (a).$$

È questa è la prima analogia del n.° 7, perchè oR è l' altezza dell' occhio al di sopra del livello dell' oggetto, e per conseguenza la distanza dell' oggetto dal piano orizzontale.

Si troverà egualmente la seconda analogia osservando che i triangoli eguali

ops a *ozs* sono simili al triangolo oRI e danno

$$op : oR :: pz : RI ,$$

ossia

$$zs : oR :: pz : RI ,$$

a motivo di $op = zs$. Dunque, in virtù del rapporto comune tra questa proporzione e la proporzione (*a*), si trova

$$oO : oO + ZI :: ps : RI \ldots\ldots (b),$$

che è la seconda analogia del n.° 7. La costruzione che ora abbiamo data contiene dunque effettivamente la soluzione generale del problema.

Per eseguire queste costruzioni, si procede come nei problemi della *geometria descrittiva* supponendo il piano del quadro steso sul piano orizzontale come si vede nelle figure 3 e 6 della Tavola CXCII. La prima si riferisce al caso in cui il punto dato è al di sotto del livello dell' occhio, e la seconda al caso in cui è al di sopra.

Ora possiamo procedere ad esporre i metodi principali della prospettiva pratica.

10. *Metodo dei quadrati* o *della retatura.* Questo metodo è fondato sulla costruzione di un quadrato ABCD (*Tav.* CXCIII, *fig.* 4), che rappresenta il campo originale del quadro, vale a dire tutto lo spazio di terreno che debbono occupare gli oggetti che vogliansi rappresentare. Questo campo si chiama il *piano geometrico.* Si divide questo quadrato in molti altri quadrati, più piccoli che sia possibile, e si suppone che il lato inferiore del quadro sia posto sul lato AB del quadrato. Ciò posto, dopo aver condotto sul piano del quadro la linea orizzontale ST a quell' altezza che si giudica conveniente, si tira la linea verticale QR, secondochè si vuol porre lo spettatore dirimpetto al mezzo o verso uno dei lati del quadro: o è il punto di veduta e oR l' altezza dell' occhio al di sopra del terreno.

Pel punto o si conducono a tutte le divisioni dal lato AB le rette oA, oM, oN, oP, oB; quindi si porta il raggio principale, determinato a seconda della lontananza dal quadro alla quale si vuol collocare l' occhio, dall' una e dall' altra parte del punto o sulla linea orizzontale prolungata se sia necessario, cioè in O e in O'. Da questi due punti si tirano alle stesse divisioni del lato AB le rette OA, OM, ON, OR, OP, OB, e O'A, O'M, O'N, O'R, O'P, O'B, e quindi si uniscono i punti d' intersezione di queste rette colle linee 11, 22, 33, 44, 55 e *dc*; e così si ottiene una riunione di trapezj contenuti nel trapezio A*dc*B che è la prospettiva del quadrato ABCD e di tutti i suoi piccoli quadrati. A questo trapezio A*dc*B si dà il nome di *retatura prospettiva.*

Si scorge facilmente che A*dc*B è la prospettiva del quadrato ABCD, osservando che il punto A è il punto d' incidenza del punto D e che la linea AB è eguale alla distanza AD del punto D dal piano del quadro, donde avviene, in virtù del n.° 9, che il punto d' intersezione delle linee oA e OB è la prospettiva del punto D. Lo stesso ha luogo per tutti gli altri punti del quadrato ABCD.

11. Le rette A*d*, M*e*, N*f*, R*i*, P*k*, B*c*, le cui divisioni diseguali rappresentano le divisioni eguali delle rette AD, ME, NF, RI, PK e BC, diconsi le *scale degradate delle lunghezze*, perchè servono a *degradare* le dimensioni degli oggetti, a misura che le parti di questi oggetti si allontanano dal piano del quadro; e le parallele 11, 22, 33 ec. diconsi le *scale degradate delle larghezze e delle altezze*, perchè servono a trovare la *degradazione* delle larghezze e delle altezze degli oggetti a misura che questi si allontanano dal piano del quadro.

12. Sicrome la retatura prospettiva rappresenta sul quadro il terreno compreso nel quadrato ABCD, è evideote che se si disegna in questo quadrato il piano dagli oggetti che vogliousi mettere in prospettiva sul quadro, in modo che le divisioni di questo quadrato servauo di scale al piano, sarà facile il porre questo stesso piano in prospettiva. Iofatti se si trattasse, per esempio, di mettere in prospettiva un quadrato posto sul terreno obliquamente rispetto al quadro, si disegnerebbe esso nel quadrato ABCD (*Tav.* CXCIII, *fig.* 2) dandogli la situazione oblique che ha sul terreno, quindi si segnerebbero nella retatura i punti *o*, *n*, *m*, *b* corrispondeoti ai vertici del quadrato ONMI ponendogli nei piccoli trepezj, corrispondenti ai piccoli quadrati del piano geometrico, in un modo simile a quello nel quale i punti O, N, M e I sono collocati nei quadrati. Conducendo per questi punti le rette *on*, *nm*, *mb*, *bo*, il quadrilatero *onmb* sarà la prospettiva del quadrato ONMI.

13. Se questo quadrato ONMI fosse la base di un cubo che si volesse porre in prospettiva, bisognerebbe dai punti o, *n*, *m* e *b* alzare delle perpendicolari *o*H, *n*Q, *m*P e *b*F, e siccome il cubo deve avere per altezza il lato del quadrato, si misurerebbe questo lato prendendo per scala la retta AB e le sue suddivisioni; suppooiamo, per esempio, che il lato OI contenga tre lati dei piccoli quadrati o tre delle suddivisioni di AB, bisognerà dare a ognuna delle perpendicolari una lunghezza tripla della base del trapezio, il che si fa prendendo con un compasso le lunghezze di questi trapezj in modo da tenere le sue punte nella retta che passerebbe per il piede della perpeodicolare parallelamente ad AB. Le altezze prospettive dei lati del cubo essendo in tal guisa determinate, si tirerebbero le rette HQ, QP, PF ed FH, e si avrebbe la prospettiva del cubo.

14. Deve notarsi che in queste operazioni il quadrato o *piano geometrico* si suppone situato dietro il quadro rapporto all' occhio, e che per conseguenza si debbono disegnare in questo quadro verso AB, ossia dalla parte della *retatura*, gli oggetti che vogliousi rappresentare sul daventi del quadro, e verso *cd* quelli che debbono parer lontani.

15. Quando sopra una delle facce piane di un oggetto che si vuol mettere in prospettiva, o anco sopra due o più facce piane parallele qualunque, vi sono più rette parallele tra loro, come le modinature degli ornamenti di architetture, bisogna per far più presto e nel tempo stesso per operare più esattamente, determinare il loro punto di concorso prospettivo, che si dice allora *punto accidentale*. Ora, quando queste parallele sono nel tempo stesso linee orizzontali, che è il caso più comune, il loro punto accidentale è nella linea orizzontale; cosicchè, se si ha la prospettiva di una sola di queste parallele, basta prolungarla fino alla linea orizzontale, e il punto d' incontro sarà il punto accidentale di tutte le parallele: infatti, siccome si suppone che tutte queste linee siano orizzontali, il raggio condotto dall' occhio parallelamente a queste linee è orizzontale e per conseguenza steso sul piano orizzontale; dunque non può incontrare il quadro che nella linea orizzontale.

Ottenuta così la posizione *nm* della prospettiva della retta originale NM, si prolungherà fino a che essa incontri in R la linea orizzontale sufficientemente prolungata. Questo punto R sarà il punto accidentale della retta orizzontale OI, e quello dei due lati della base superiore del cubo che sono paralleli a NM e a OI. Lo stesso si dica del punto L, ove debbono concorrere le prospettive delle parallele ON, IM, e delle loro corrispondenti nella base superiore del cubo.

Se le parallele originali non fossero rette orizzontali, bisognerebbe avere la prospettiva di due di esse; e dopo averle prolungate, dalla parte verso la quale queste prospettive s' inclinano, fino al loro punto d' incontro, questo punto sarà il punto accidentale di tutte le altre.

16. Questa pratica è fondata sul principio che due rette parallele originali sembrano sempre concorrere verso un medesimo punto, del che ci possiamo assicurare osservando un viale di alberi i due lati del quale siano paralleli, e per conseguenza sul principio che le due prospettive di queste rette debbono egualmente tendere a concorrere sul quadro. Ora l'occhio deve vedere con uno stesso raggio visuale il punto di concorso delle due linee originali e quello delle loro prospettive, dunque il punto di concorso delle due linee di prospettiva è nel punto del quadro in cui il suo piano è attraversato dalla retta che va dall'occhio al punto di concorso delle due linee originali. Ma il punto di concorso apparente di due parallele originali essendo infinitamente lontano dall'occhio, la retta condotta dall'occhio a questo punto è ad esse parallela; dunque il punto di concorso delle due rette originali è nel punto del quadro in cui il suo piano, prolungato se sia necessario, è incontrato da una retta condotta dall'occhio parallelamente a queste rette originali.

Ciò non ostante, se le rette originali sono nel tempo stesso parallele al piano del quadro, siccome la retta condotta dall'occhio al loro punto di concorso apparente non può incontrare il piano del quadro, perchè allora essa gli è parallela, queste rette non possono avere punto di concorso sul piano del quadro, e le loro prospettive debbono essere linee parallele. Così, supponendo, come fin qui abbiamo fatto, il quadro posto verticalmente o in piombo, *le prospettive di tutte le rette verticali originali sono rette verticali*; *le prospettive di tutte le rette orizzontali e nel tempo stesso parallele al piano del quadro sono rette poste orizzontalmente sul quadro*; e *le prospettive di tutte le rette originali parallele al quadro e inclinate all'orizzonte, sono parallele inclinate della stessa quantità sul quadro*.

Tutte le altre parallele sembrano concorrenti.

17. Nella pratica della prospettiva, l'uso della *retatura* può essere particolarmente utile quando si vuol fare un quadro piccolo, e quando gli oggetti che vi si vogliono rappresentare debbono presentare le loro facce sotto differenti obliquità. Ma quando si tratta di quadri grandi, e soprattutto se vi si deve dipingere un gran numero di oggetti lontani gli uni dagli altri, siccome non si potrebbe costruire un quadrato o piano geometrico abbastanza grande, la retatura diviene insufficiente. Ciò non ostante se si potesse fare un quadrato abbastanza grande da contenere tutti questi oggetti, riducendo le loro dimensioni alla metà, al terzo, al quarto, o in generale ad un rapporto esatto qualunque coll'unità, si potrebbero mettere in prospettiva sopra una rete, e quindi copiarli sul quadro, raddoppiando, triplicando, quadruplicando ec. tutte le linee condotte in questa rete, e si avrebbe così una prospettiva tanto più esatta quanto meno si sarebbero dovute aumentare le dimensioni prese sulla rete.

18. Facendo una descrizione o nota esatta di tutte le dimensioni, posizioni e distanze di tutti gli oggetti che debbono entrare nel quadro, si possono anco omettere i piccoli quadrati del piano geometrico. Infatti, dopo aver diviso il lato inferiore del quadro in tante parti eguali in quante si reputerà necessario, ed ognuna delle quali rappresenterà un centimetro, un decimetro, un metro o in generale una delle misure sulle quali sarà stata regolata la descrizione, misura che prende il nome di *modulo*, si farà una retatura su queste divisioni e si considererà ogni trapezio come lo spazio di un *modulo quadrato*. Si potranno dunque disporre tutti gli oggetti su questa rete secondo la descrizione che se ne sarà fatta.

19. Per riempire il vuoto che è sui lati della *retatura prospettiva*, si possono prolungare le rette *dc*, 55, 44, 33, ec. da una parte e dall'altra fino ai lati del quadro (*Tav.* CXCIII, *fig.* 4), e dopo avere continuato pure da una parte e dall'altra le divisioni eguali della linea AB, si tireranno dal punto di

veduta o delle rette a tutti i nuovi punti di divisione. Queste rette formeranno coi prolungamenti di *dc*, 55, 44, ec. dei nuovi trapezj che saranno le prospettive di nuovi piccoli quadrati che se si vuole potranno descriversi accanto a quelli del quadrato grande ABCD, il che aumenterà il campo del piano geometrico.

20. *Prospettive senza retatura.* In questo metodo, come nel precedente, si suppone che il piano della base di ogni oggetto originale sia disegnato in tutte le sue proporzioni, alla distanza dal lato inferiore del quadro alla quale si vuole che apparisca situato. Supponiamo che si tratti di un prisma pentagonale, e che essendo AB il lato inferiore del quadro la base di questo prisma sia in EFGHI (*Tav.* CXCII, *fig.* 5).

Si tirerà sul piano del quadro la linea verticale QR, che si prolungherà al di là dell'oggetto originale; quindi si prenderà sull'orizzontale SP, oO eguale al raggio principale, dall'una e dall'altra parte del punto di veduta o, se sia necessario. Sopra uno dei lati del quadro, per esempio, verso l'angolo B, si prenderà BC eguale all'altezza che deve avere il prisma originale, e dal punto P della linea orizzontale si condurrà la retta PC. Il triangolo PCB indicherà, come adesso vedremo, la *degradazione* delle altezze.

Dopo aver trovato sul quadro, col metodo del n.° 9, le prospettive *e*, *f*, *g*, *h*, *i* dei punti E, F, G, H, I, si alzeranno su queste prospettive le perpendicolari *i*D, *e*N, *f*M, *g*L, *h*K, dando per lunghezza, ad ognuna di queste linee, la parte intercetta nel triangolo PCB della retta condotta pel suo piede parallelamente ad AB. Così l'altezza della perpendicolare condotta nel punto *e* sarà *cp*, e lo stesso si farà per le altre. Tirando poi per le estremità D, K, L, M, N le rette che si vedono nella figura, si terminerà la prospettiva richiesta del prisma pentagonale di cui EFGHI è la base.

21. Anco in questo caso si può fare una nota esatta delle dimensioni degli oggetti e delle loro distanze respettive, e costruire separatamente dei triangoli per la degradazione delle altezze. Tutte le osservazioni che abbiamo fatte sul metodo precedente si applicano a questo che segue.

22. *Prospettiva col telojo prospettivo.* Questo metodo, che comprende i due precedenti, è loro preferibile per la esattezza.

Dopo avere scelto sul quadro (*Tav.* CXCIII, *fig.* 1) un punto o per farne il punto di veduta, vi si farà passare la linea orizzontale che si prolungherà dall'una e dall'altra parte quanto più lontano si potrà. Si tirerà pure la linea verticale QR, sulla quale si prenderà dal punto di veduta o, verso Q o verso R, una parte oC eguale al raggio principale. Dal punto C come centro, con un'apertura di compasso a piacere, la maggiore sarà la migliore, si descriverà un arco di circolo ED di circa 60 o 70 gradi, che si dividerà di grado in grado, o almeno di 10 in 10 gradi, partendo dal punto E. Pel centro C si condurranno delle rette ad ogni punto di divisione, prolungandole fino al loro incontro colla linea orizzontale MH, che si troverà in questa maniera divisa alla destra della verticale. Perchè lo sia in tutta la sua estensione, si porteranno queste divisioni dall'altra parte dal punto o, come ciò si vede fatto nella figura.

23. Siccome per la costruzione è evidente che queste divisioni, contate a partire dal punto o, sono le tangenti degli angoli formati nel punto C ed aventi per raggio o seno totale Co, si potranno esse trovare anco più esattamente facendo una scala particolare *ab* divisa in tante parti eguali quante si vorranno, purchè dieci di queste parti siano precisamente eguali al raggio principale, ed una di queste parti sia suddivisa in dieci altre, e queste ultime siano pure divise in dieci parti, il che darà una scala in millesime parti del raggio principale. Per mezzo di questa scala e della tavola delle tangenti naturali, sarà facile il segnare sulla linea orizzontale tutte le divisioni necessarie.

24. Ciò fatto, sul lato inferiore AB del quadro, partendo da una delle estremità e andando verso l'altra, si segneranno tante parti eguali AI; I,II; II,III; III,IV, ec., quante se ne vorrà, e queste saranno destinate a rappresentare le misure o *moduli* delle dimensioni degli oggetti originali. Dalla estremità S della linea orizzontale, si prenderà sul suo prolungamento una parte SM eguale al raggio principale, e dal punto M si condurranno delle rette a tutti i punti di divisione I, II, III, IV ec. L'intersezione di queste rette col lato AF del quadro darà tanti punti di divisione che si segneranno coi numeri 1, 2, 3, 4 ec. e che si porteranno pure sull'altro lato BG.

25. Finalmente, sul lato inferiore AB del quadro e dall'una parte e dall'altra del punto R, si segneranno delle divisioni eguali a quelle che avranno servito a dividere i lati AF e BG, e si indicheranno coi numeri 1, 2, 3, 4 ec. Parimente, per una maggior comodità nella pratica, si segneranno queste stesse divisioni dall'una parte e dall'altra del punto Q sul lato superiore FG del quadro. Il quadro così diviso prende il nome di *telajo prospettivo*.

In questo telajo, le divisioni della linea orizzontale servono a situare le prospettive delle linee orizzontali poste obliquamente rapporto al piano verticale. Le divisioni dei lati verticali del quadro sono *scale degradate* delle lunghezze o degli allontanamenti degli oggetti dal piano del quadro; e le divisioni del lato superiore ed inferiore sono le *scale di fronte*, vale a dire delle parti degli oggetti che sono paralleli al piano del quadro.

26. Per bene intendere l'uso dei *telaj prospettivi*, è necessario rendersi conto della loro costruzione, e a tale oggetto bisogna immaginare: 1.° che il centro C sia alzato al di sopra del punto di veduta o in modo che il piano del triangolo rettangolo CoH sia perpendicolare al piano del quadro. È allora evidente che il punto C è il punto nel quale deve esser posto l'occhio, e che i gradi dell'arco ED, il cui centro è nell'occhio, sono atti a misurare gli angoli di obliquità, rapporto al piano verticale, delle linee originali situate nel piano orizzontale: si posson dunque segnare sulla linea orizzontale i punti ai quali vanno a terminare tutti i raggi condotti dall'occhio ad ognuno di questi gradi. 2.° Deve immaginarsi egualmente che SM sia alzata perpendicolarmente sul piano del quadro, in modo che l'angolo oSM sia retto; che nel tempo stesso anco la retta AB sia alzata perpendicolarmente sullo stesso piano del quadro, ma dalla parte opposta all'occhio; e che così il piano di tutte le rette condotte da M alle divisioni di AB sia perpendicolare al piano del quadro: allora, essendo AF l'intersezione comune di questi due piani, è chiaro che le divisioni di AB indicano gli allontanamenti o le distanze dal piano del quadro misurate sul terreno. Per esempio, AI indica un modulo di distanza al di là del quadro, e per conseguenza A1, sul lato AF, è la sua prospettiva; poichè i triangoli rettangoli simili M1S, AI1 danno

$$MS : AI :: S1 : A1,$$

d'onde

$$MS : AI+MS :: S1 : A1+S1,$$

il che è identico colla seconda analogia del n.° 7: lo stesso ha luogo per le altre divisioni.

27. Da ciò che precede si vede che se non si potesse prolungare facilmente il piano del quadro per avere un numero sufficiente di divisioni sui lati verticali, si potrebbero trovare queste divisioni con un calcolo facilissimo: ed è appunto questo compenso che deve adottarsi quando si ha da disegnare un quadro grande. Eccone un esempio

Sia il raggio principale oC di 10 moduli, e l'altezza dell'occhio al di sopra del piano del terreno di 6 moduli. Per avere tutte le distanze S1, S2, S3 ec., supponendo che l'intervallo di queste divisioni debba essere di *un* modulo, si avranno queste proporzioni

$10+1 : 10 :: 6 : S1 = 5,46$
$10+2 : 10 :: 6 : S2 = 5,00$
$10+3 : 10 :: 6 : S3 = 4,62$
$10+4 : 10 :: 6 : S4 = 4,29$
$10+5 : 10 :: 6 : S5 = 4,00$
$10+6 : 10 :: 6 : S6 = 3,75$
$10+7 : 10 :: 6 : S7 = 3,53$
$10+8 : 10 :: 6 : S8 = 3,33$
$10+9 : 10 :: 6 : S9 = 3,16$
$10+10 : 10 :: 6 : S10 = 3,00$
$10+11 : 10 :: 6 : S11 = 2,86$
$10+12 : 10 :: 6 : S12 = 2,73$
ec. ec.

Così, col mezzo di una scala divisa in parti decimali, nella quale la distanza della linea orizzontale dal lato inferiore del quadro contenga, in questo esempio, sei moduli, sarà facile il segnare esattamente sui lati verticali del quadro tutte le divisioni di cui si avrà bisogno.

28. Prima di esporre gli usi del *telajo prospettivo*, dobbiamo rammentare alcune delle leggi generali della visione. Se si suppone che uno spettatore abbia posto il suo occhio rispetto al quadro precisamente come dovrebbe esserlo per considerare la prospettiva quando sarà già disegnata, e se egli osserva a traverso a questo quadro, che si suppone trasparente come un cristallo, tutto ciò che il quadro gli permette di vedere in un terreno indefinito, libero, e unito di livello come una vasta pianura, è evidente che deve vedere il terreno terminato da una linea orizzontale, che si confonde colla circonferenza di un circolo che sembra separare il cielo dalla terra, e di cui l'occhio occupa il centro: questo circolo è l'*orizzonte celeste*. Ora, la prospettiva della porzione visibile di questo circolo deve essere una linea retta. Perchè, siccome questo circolo o orizzonte ha il suo centro nell'occhio, i raggi che vanno dall'occhio a tutti i punti della sua circonferenza visibile formano un piano; la loro intersezione col piano del quadro è dunque l'intersezione di due piani, la quale non può essere che una linea retta; ed è evidente che la linea orizzontale del quadro è appunto la prospettiva di questa porzione visibile dell'orizzonte celeste, e che le divisioni della linea orizzontale sono le prospettive dei gradi di questo circolo.

29. Dall'essere l'occhio il centro dell'orizzonte celeste, ne segue che se due rette originali, poste sopra un piano orizzontale che passi per l'occhio dello spettatore, sono inclinate l'una sull'altra in modo che il vertice dell'angolo della loro inclinazione sia nell'occhio stesso, i gradi dell'orizzonte celeste, e per conseguenza le divisioni della linea orizzontale del quadro, sono atti a misurare quest'angolo e a rappresentare l'inclinazione di queste due rette.

Siccome tutti i piani paralleli tra loro debbono sembrare riunirsi a una distanza infinita dall'occhio, il piano del terreno e in generale qualunque piano orizzontale sembra inclinarsi verso il piano orizzontale che passa per l'occhio, per confondersi con esso nella circonferenza dell'orizzonte celeste: da ciò resulta che *la linea orizzontale del quadro è la linea in cui s'incontrano tutte le prospettive di tutti i piani orizzontali.*

Tutti i piani orizzontali sui quali sono poste le parti degli oggetti atti ad essere disegnati, sono a una distanza finita gli uni dagli altri, mentre la circonferenza dell' orizzonte celeste è ad una distanza infinita dall' occhio: l' intervallo tra questi piani è dunque infinitamente piccolo rispetto alla distanza dell' occhio dal luogo in cui sembrano riunirsi: dunque tutti i piani orizzontali che passano a una distanza finita al di sopra o al di sotto dell' occhio sono, rapporto alla circonferenza dell' orizzonte celeste, e per conseguenza rapporto alla linea orizzontale del quadro, come un solo e medesimo piano steso su quest' orizzonte celeste o confuso col piano orizzontale che passa per l' occhio: la perpendicolare o verticale condotta dall' occhio su tutti questi piani orizzontali, e che misura il loro intervallo reale, è come un punto confuso col centro di questo orizzonte.

Così, un angolo qualunque formato da due rette sopra un piano orizzontale, se si trova situato nella verticale che passa per l' occhio, è, rispetto alla circonferenza dell' orizzonte celeste ossia alla linea orizzontale del quadro, come se fosse nell' occhio stesso; e per conseguenza le divisioni della linea orizzontale sono pure atte a misurarlo e a darne la prospettiva.

Finalmente, i differenti oggetti che sono alla portata dell' occhio e che debbono esser disegnati sopra un quadro sono a una distanza finita gli uni dagli altri e rapporto all' occhio, mentre la circonferenza dell' orizzonte celeste si trova a una distanza infinita da essi: dunque tutti i punti che formano le parti di questi oggetti debbono considerarsi infinitamente prossimi gli uni agli altri e all' occhio; e per conseguenza tutti gli angoli che fanno tra loro, sopra piani orizzontali, le rette che terminano le facce e i lati degli oggetti debbono esser considerati nel centro dell' orizzonte celeste e misurabili per mezzo delle divisioni della linea orizzontale.

30. Da queste considerazioni resulta: 1.° che le divisioni della linea orizzontale sono atte a misurare e a rappresentare in prospettiva tutti gli angoli che sono in un piano orizzontale qualunque.

2.° Che per mettere in prospettiva un angolo originale qualunque, bisogna cercare sul quadro il punto di prospettiva del vertice, e da questo punto condurre due rette che terminino alle divisioni atte a segnare i gradi di quest'angolo, o che terminino alle stesse divisioni della linea orizzontale alle quali avrebbero terminato due raggi condotti dall' occhio parallelamente a ciascun lato di quest' angolo.

3.° Che se da quanti punti C, D, E si vogliano (*Tav.* CXC, *fig.* 3), presi nel campo del quadro, si tirano due rette a due medesime divisioni A e B della linea orizzontale, gli angoli ACB, ADB, AEB, saranno le prospettive di angoli originali eguali tra loro, e di cui il numero dei gradi che gli misura è eguale a quello delle divisioni comprese tra A e B. Infatti, siccome AC, AD, AE terminano a uno stesso punto accidentale A, esse sono le prospettive di tre parallele (n.° 15); parimente le tre rette BC, BD, BE sono le prospettive di tre parallele; ora, le parallele che incontrano altre parallele formano angoli eguali, dunque gli angoli ACB, ADB, AEB sono le prospettive di angoli originali eguali.

4.° Che una retta come AD o AE tirata sul quadro da uno de' suoi punti qualunque D o E, e che termina a un punto A della linea orizzontale, è la prospettiva di una linea originale stesa sopra un piano orizzontale, e inclinata al piano verticale dalla parte dalla quale si trova il punto A, di una quantità espressa dal numero che segna il grado in cui è il punto A: per esempio, AD e AE sono le prospettive di due rette orizzontali che declinano di 10 gradi alla destra del piano verticale.

Adesso siamo in grado di dare la soluzione dei principali problemi che presenta la pratica della prospettiva per mezzo del *telajo*.

31. *Da un punto dato* D (Tav. CXC, fig. 3) *sopra un quadro, condurre una retta prospettivamente parallela a una retta data in prospettiva come* EF.

Prolungate EF fintantochè incontri la linea orizzontale in qualche punto B e conducete BD. Sarà questa la parallela cercata.

32. *All' estremità* E *di una retta data in prospettiva* EF, *e posta originalmente sopra un piano orizzontale, fare un angolo nello stesso piano di un numero dato di gradi.*

Si prolunghi EF fino al suo incontro in B colla linea orizzontale. Cominciando da questo punto B si conti sulle divisioni della linea orizzontale il numero dato di gradi dalla parte dalla quale deve esser l' angolo, come da B in A, e si tiri AE.

Se il numero dato dei gradi fosse più grande di quello contenuto tra B e O, si prenderebbe alla sinistra del punto di veduta O il numero di gradi sufficiente per completarlo.

Se al contrario occorresse costruire l' angolo alla destra del punto B, e se le divisioni della linea orizzontale non fossero sufficienti, si prenderebbe da B verso la sinistra un numero di gradi eguale al supplemento dell' angolo domandato, come da B fino in A, e per i punti A ed E si tirerebbe una retta AEG che darebbe l' angolo prospettivo cercato FEG.

33. *Da un punto* D (Tav. CXC, fig. 1) *dato sopra una retta* CE, *messa in prospettiva, alzare una perpendicolare prospettiva a questa retta.*

Questo problema si riduce al precedente. Dopo aver prolungato CE fino alla linea orizzontale in B, bisogna prendere un punto A tale che sulle divisioni vi siano 90° da B, e quindi si condurrà AD.

34. *Da un punto dato sopra un quadro condurre prospettivamente una perpendicolare a una retta data.*

Sia CE (*Tav.* CXC, *fig.* 1) la retta data, ed F il punto dato. Dopo aver prolungato CE fino alla linea orizzontale in B, si prenda un punto A distante 90° dal punto B; pei punti A ed F si faccia passare la retta AD, e sarà questa la perpendicolare cercata.

35. *Essendo date le distanze dal piano del quadro e dal piano verticale di un punto originale posto sul terreno, trovare il suo punto di prospettiva.*

Per le divisioni dei lati verticali al quadro le quali segnano la distanza data dal quadro si conduca una retta; quindi si conduca una seconda retta dal punto di veduta al punto dalla divisione della base, o del lato inferiore del quadro, che segna la distanza del punto originale dal piano verticale. L' intersezione di queste rette darà il punto di prospettiva cercato. Per esempio, se la distanza dal piano del quadro fosse di 4 moduli, e la distanza dal piano verticale di due moduli a sinistra, il punto di prospettiva sarebbe in G.

Se il punto dato non fosse sul terreno, ma elevato al di sopra, o depresso al di sotto, come in un fosso, bisognerebbe immaginare una retta condotta da questo punto originale perpendicolarmente sul terreno, la quale misurerebbe l' altezza o l' abbassamento del punto rapporto al terreno: e siccome questa perpendicolare è nel tempo stesso parallela al piano del quadro e al piano verticale, il punto del terreno nel quale essa termina è alla stessa distanza rispetto a questi due piani che il punto originale. Bisogna dunque, come si è fatto di sopra, determinare sul quadro la prospettiva del punto del terreno nel quale termina la perpendicolare, e dopo avervi fatto passare una retta parallela alla linea verticale, bisogna determinarne prospettivamente la lunghezza secondo la distanza del punto originale dal piano del terreno, il che vedremo in appresso; l' estremità di questa perpendicolare sarà la prospettiva del punto originale dato.

36. *Mettere in prospettiva una retta originale data di grandezza e di posizione sul terreno.*

Sia la lunghezza della retta data di 2 moduli. Se una delle sue estremità G (*Tav.* CXC, *fig.* 1) deve essere lontana dal piano verticale di 2 moduli e dal piano del quadro di 4 moduli, si cercherà col metodo precedente la prospettiva G di questo punto: ma per trovar quella dell' altra estremità si presenteranno tre casi:

1.° *La linea originale è parallela al piano verticale.* Supponiamo che la sua estremità G debba essere la più prossima al quadro; siccome la linea ha due moduli di lunghezza, l' altra estremità deve esser distante dal piano del quadro 6 moduli. Dal punto G si tiri al punto di veduta una retta GO e pei punti 6 dei lati verticali del quadro si conduca una retta che taglierà GO in un punto L, che sarà l' altra estremità cercata.

Se il punto G dovesse essere l' estremità la più lontana dal quadro, si toglierebbe 2 da 4, e pei punti 2 dei lati verticali si condurrebbe una retta la cui intersezione con GO prolungata sarebbe l' estremità cercata.

2.° *La linea originale è parallela al piano del quadro.* Allora, o ha la sua estremità G è la più lontana dal piano verticale, o questa estremità ne è la più vicina; nel primo caso, l' altra estremità è alla distanza di 2—2 moduli dal piano verticale, cioè nel punto K delle linea verticale; nel secondo caso, questa estremità è distante 2+2 moduli dal piano verticale, ed è necessario condurre la retta O4 dal punto di veduta alla quarta divisione del lato inferiore, e il punto K' sarà allora la prospettiva cercata.

3.° *La linea originale è obliqua al piano del quadro e al piano verticale.* Supponiamo che essa debba declinare di 20 gradi alla destra del piano verticale. Pel punto G si tiri una retta al 20° grado della linea orizzontale alla destra del punto di veduta; si prenda GK prospettivamente eguale alla retta data, vale a dire di due moduli, quindi dal punto K si conduca una retta che possa tagliare G20 e che nel tempo stesso termini in Q al grado della linea orizzontale nel quale è segnata la metà del complemento dell' angolo che fa la linea originale col piano verticale; nel nostro caso è 35°, metà di 70° complemento di 20°. L' intersezione di G20 con KQ darà in L la prospettiva dell' estremità della linea cercata. Infatti, analizzando questa costruzione, si vede che si è posto in prospettiva un triangolo isoscele GKL, i cui lati prospettivamente eguali sono GK e GL.

Si può ancora risolvere lo stesso problema costruendo sopra un piano separato o calcolando per mezzo della trigonometria un triangolo rettangolo, nel quale la retta originale sia l' ipotenusa, e l' angolo della sua inclinazione rapporto al piano verticale sia eguale ad uno degli angoli, perchè si troverebbe, per mezzo del valore del lato opposto a quest' angolo, di quanto l' altra estremità delle linea originale date è più o meno lontana dal piano verticale di quello che lo sia il punto G: dopo aver tirato dal punto di veduta O la retta OG2, si prenderebbe allora sulle divisioni del lato inferiore del quadro le quantità $2m$ di cui l' estremità L della linea cercata è originalmente più vicina o più lontana dal piano verticale; e dopo aver tirato al punto di veduta la retta mO, la sua intersezione con G20 darebbe in L il punto cercato.

37. *Dividere una retta data in prospettiva in un numero dato di parti eguali.*

Sia PQ (*Tav.* CXC, *fig.* 4) la linea data che debba dividersi in 4 parti eguali. Per un punto qualunque G preso sulla linea orizzontale si tirino per le estremità P e Q due rette GT, GD fino all' estremità inferiore del quadro. Si divida l' intervallo DT in quattro parti eguali TA, AB, BC, CD, e si tirino le rette GA, GB, GC; la linea data si troverà divisa in quattro parti eguali nei punti *a*, *b*, *c*; infatti è evidente che essa si trova intercetta tra le parallele originali

GT, GA, GB, GC, GD (n.° 15) le quali sono equidistanti tra loro perchè tagliano DT in parti eguali. Dunque esse taglieranno pure PQ in parti prospettivamente eguali.

Per maggiore esattezza bisogna scegliere il punto G in modo che GT differisca il meno possibile da GD.

38. Se si trattasse di dividere PQ in parti diseguali tra loro, ma aventi rapporti determinati, si dividerebbe TD in parti proporzionali a queste, e conducendo dal punto G delle rette ai punti di divisione, esse taglierebbero PQ nei punti cercati.

39. Da tutti i problemi precedenti resulta che si può mettere sul telajo il piano prospettivo di un oggetto dietro l'indicazione de' suoi angoli e de' suoi lati. L'esecuzione ne sarà più pronta e spesso anco più esatta, impiegandovi le posizioni e le lunghezze di differenti diagonali che possono immaginarsi sul piano originale e delle quali è facilissimo il calcolo quando si tratta di poligoni regolari. Vediamo ora ciò che concerne le altezze prospettive degli oggetti.

40. *Mettere in prospettiva delle rette perpendicolari al piano orizzontale, o, il che è lo stesso, mettere in prospettiva i raggi di altezza.*

Supponiamo che si tratti di alzare dal punto Q (*Tav.* CXC, *fig.* 4) una perpendicolare all'orizzonte alta 6 moduli e mezzo. Per il punto di veduta O, o per un punto qualunque preso sulla linea orizzontale, e pel punto Q si tiri una retta OF. Si alzi nel punto F una perpendicolare EF su questo lato inferiore, si determini su questa perpendicolare una lunghezza FE di 6 moduli e mezzo presi sulle divisioni di questo lato e si tiri OE; l'intersezione di questa ultima retta con una perpendicolare QI all'orizzontale condotta dal punto Q darà in I il vertice della linea cercata. Infatti OF e OE sono le prospettive di due linee orizzontali parallele fra loro (n.° 15), e per conseguenza le rette FE e QI che esse intercettano sono originalmente eguali fra loro.

41. *Dividere le linee prospettive delle altezze in parti eguali, o diseguali in un rapporto dato.*

Le linee prospettive delle altezze essendo parallele al piano del quadro si dividono in parti eguali coi metodi della geometria elementare, poichè le prospettive delle parti eguali delle rette originali sono anch' esse eguali. Lo stesso ha luogo per le parti diseguali; esse sono proporzionali alle loro prospettive.

42. *Determinare sul quadro il punto accidentale delle parallele che sono inclinate all' orizzonte e date di posizione.*

Siccome le parallele sono date di posizione, se s' immagina un piano verticale che passi per ognuna di esse, è evidente che tutti i piani verticali saranno pure paralleli tra loro e si conoscerà la posizione che avranno rispetto al piano verticale del quadro. Ora, o essi saranno paralleli a questo piano verticale, o saranno rispetto ad esso obliqui di una data quantità.

43. I. Se i piani verticali sono paralleli al piano verticale del quadro, il punto accidentale cercato è nella linea verticale del quadro o al di sopra o al di sotto del punto di veduta, di una quantità eguale al numero dei gradi dell' inclinazione che queste parallele hanno sull' orizzonte, presi dal punto di veduta sulle divisioni della linea orizzontale. Il punto accidentale è al di sopra del punto di veduta, se l' inclinazione di queste linee allontana il loro vertice dal piano del quadro, e al di sotto se se ne approssima.

44. Supponiamo che si tratti di mettere in prospettiva un parallelepipedo rettangolo le cui facce siano inclinate sull' orizzonte di 39°, e che sia appoggiato parallelamente al piano verticale sopra un piano perpendicolare all' orizzonte, come se fosse una trave (*Tav.* CXCI, *fig.* 2). È chiaro 1° che i lati che terminano le facce del parallelepipedo sono parallele inclinate all' orizzonte di 39°, e che i

piani verticali nei quali si suppongono questi lati sono paralleli al piano verticale del quadro; 2.° che i piani delle basi del parallelepipedo sono pure inclinate all'orizzonte di una quantità eguale a 51°, complemento di 39°, a motivo degli angoli retti che sono agli angoli solidi del parallelepipedo; 3.° che fra le otto linee che terminano le due basi ve ne sono quattro parallele all'orizzonte; cioè: quella che è stesa sul terreno e la sua parallela AB, DC, e quella che è appoggiata al muro e la sua parallela *ab*, *dc*; le altre quattro *ad*, *bc*, AD, BC sono inclinate all'orizzonte di 51°. Donde si vede che nella linea verticale bisogna trovare due punti accidentali, l'uno T al di sopra del punto di veduta, per le rette A*a*, B*b*, C*c*, D*d* che terminano le facce, e la cui inclinazione allontana il loro vertice dal piano del quadro, e l'altro P al di sotto del punto di veduta S, per quelle AD, BC, *ad*, *bc* che terminano le basi, e la cui inclinazione le avvicina al piano del quadro. Bisogna dunque prendere sulle divisioni della linea orizzontale una retta eguale alla tangente di 39°, e portarla da S in T, e una linea eguale al complemento di 39°, e portarla da S in P; la figura rende chiaro e sensibile il rimanente.

45. II. Se le parallele date sono in piani verticali che facciano un angolo col piano verticale del quadro, come se si supponesse che il parallelepipedo dell'esempio precedente dovesse essere appoggiato sopra un piano che facesse col piano verticale un angolo di 30°, o il che è lo stesso, che avesse un'obliquità di 60° rispetto al piano del quadro; allora sarebbero necessarj tre punti accidentali, l'uno in T (*Tav.* CXCI, *fig.* 4), pei lati che terminano le facce; l'altro in Q, pei lati delle basi che sono appoggiati gli uni sul terreno e gli altri sul muro, e per i loro paralleli; e il terzo in P, pei lati delle basi che non toccano il terreno o il muro che con una delle loro estremità, e pei loro paralleli.

46. Non vi è difficoltà nessuna per il punto accidentale Q delle linee che sono stese sul terreno, perchè deve sempre essere nella linea orizzontale, nel punto che indica la loro obliquità rispetto al suo piano verticale. Ma per trovare ognuno degli altri due ecco il metodo da tenersi.

Sulla linea orizzontale VQ si prenda la tangente VE dell'inclinazione delle facce sull'orizzonte, e si porti da O in F sopra una perpendicolare elevata nel punto distante da V della lunghezza del raggio principale. Si unisca VF che taglierà in R la perpendicolare DT, innalzata dal punto D ove è segnato il grado della declinazione delle facce rispetto al piano verticale; si porti OF da D in K, si unisca KR, si faccia DT=KR, e il punto accidentale cercato sarà in T. Nello stesso modo si troverà il punto P.

47. Per dimostrare questo metodo, bisogna immaginare che una retta inclinata sull'orizzonte, per esempio, di 39 gradi, essendo prolungata all'infinito andrebbe a terminare nel cielo in un punto elevato di 39° al di sopra dell'orizzonte: questo punto è situato sopra un piccolo circolo della sfera celeste parallelo all'orizzonte che si dice *almicantarato* (*Vedi* ALMICANTARATO). Ora, siccome la linea orizzontale del quadro è la prospettiva dell'orizzonte celeste, *la prospettiva di un almicantarato è un'iperbola, il cui vertice è nella linea verticale, e il cui semiasse principale è eguale alla tangente dell'altezza di questo circolo al di sopra dell'orizzonte*. Vale a dire che il semiasse principale è eguale alla parte della linea orizzontale, compresa tra il punto di veduta e la divisione che segna il numero dei gradi dell'altezza. *Il secondo semiasse di questa iperbola è il raggio principale.*

Infatti, un circolo celeste parallelo all'orizzonte è la base di un cono ottico il cui vertice è nell'occhio, e la base del cono opposto è un almicantarato abbassato egualmente al di sotto dell'orizzonte. Sia per esempio A (*Tav.* CXCI,

fig. 1) il luogo dell'occhio; ABH rappresenti il piano dell'orizzonte celeste che si confonde col terreno o col piano geometrico a una distanza infinita dal punto A; PT rappresenti il piano del quadro; MEG l'almicantarato elevato al di sopra dell'orizzonte della quantità misurata dall'angolo HAE, e KNI l'almicantarato al di sotto dell'orizzonte: è chiaro che i due coni opposti essendo tagliati dal piano del quadro PT parallelamente al loro asse CL, le sezioni *m*SM, N*sn* sono i due rami di un'iperbola (*Vedi* Iperbola), della quale il punto di veduta B del quadro è il centro, AD o SB il semiasse principale, e AB il semiasse secondo.

Donde si vede che se nel punto C (*Tav.* CXCI, *fig.* 4) che segna sul piano verticale un'altezza di 39°, dopo aver fatto VC = VE, si fa passare un'iperbola CT, di cui VC e VO siano i semiassi, essa sarà la prospettiva dell'almicantarato di 39°, e il punto accidentale che si cerca dovrà trovarsi in questa iperbola nel punto in cui essa è incontrata dalla perpendicolare innalzata dal punto D. Rimane dunque a dimostrare che colla costruzione insegnata di sopra (n.° 46) si è trovato il vero luogo del punto T.

Sia VO = b, VC o KD o OF = a, VD = y, DT = KR = x. A motivo dei triangoli simili VDR, VOF, si ha

$$OV : OF :: VD : DR,$$

ossia

$$b : a :: y : DR,$$

dunque

$$DR = \frac{ay}{b}, \quad e \quad \overline{DR}^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}.$$

Ora, nel triangolo rettangolo KDR, si ha

$$\overline{KR}^2 = \overline{KD}^2 + \overline{DR}^2,$$

ossia

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2y^2}{b^2}.$$

Dunque se ne trae l'eguaglianza

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

che è l'equazione dell'iperbola riferita a' suoi assi principali. Così x o DT è veramente un'ascissa di un'iperbola di cui VC e VO sono i semiassi conjugati.

È evidente che VF è l'asintoto dell'iperbola CT; cosicchè, avendo il punto T dell'almicantarato di 39°, è facile il descrivere l'iperbola intera che è la prospettiva di questo almicantarato.

48. Questo metodo, che è praticabilissimo quando le inclinazioni delle linee originali non eccedono i 50 o 60 gradi, esige, quando queste inclinazioni sono più grandi, degli sviluppi di linee sul piano del telajo, che sono molto incomodi. Allora è spesso necessario l'omettere il punto accidentale, e determinare ogni linea inclinata in particolare, cercando colla trigonometria o con una operazione grafica di cui daremo in appresso un esempio il punto del terreno nel quale batte il filo a piombo del vertice di ciascuna linea inclinata, e la lunghezza di questo filo a piombo, e ponendo quindi questo punto e questa linea in prospettiva.

49. Se, nell'espressione

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2b^2 + a^2y^2}{b^2}$$

trovata di sopra, si osserva che a è la tangente dell' inclinazione delle parallele date, inclinazione che indicheremo con I; che inoltre y è la tangente dell'obliquità del piano verticale del quadro rispetto al piano verticale delle parallele, obliquità che indicheremo con O, e che finalmente b è il raggio o seno totale R, questa formula diverrà

$$x^2 = (R^2 + \text{tang}^2 O) \frac{\text{tang}^2 I}{R^2}.$$

Ma in generale si ha (*Vedi* Seno)

$$(\text{secante})^2 = (\text{raggio})^2 + (\text{tangente})^2,$$

perciò quest' ultima espressione darà

$$x^2 = \sec^2 O . \frac{\text{tang}^2 I}{R^2}, \text{ ossia } x = \sec O . \frac{\text{tang}\, I}{R}$$

e finalmente

$$x = \frac{R \,\text{tang}\, I}{\cos O},$$

a motivo di $\sec O = \frac{R^2}{\cos O}$.

Si ha dunque questa analogia: *come il coseno dell' obliquità del piano verticale del quadro rispetto ai piani verticali sui quali sono situate le parallele originali inclinate all' orizzonte sta alla tangente di questa inclinazione, così il raggio sta alla distanza della linea orizzontale del quadro dal punto accidentale di queste parallele.*

50. Donde si vede che se da tutti i gradi segnati sulla linea orizzontale si conducono delle perpendicolari, esse saranno altrettante prospettive dei circoli massimi della sfera, perpendicolari all' orizzonte, che diconsi *circoli verticali*, atti a misurare coi loro gradi tutte le inclinazioni possibili delle rette situate obliquamente all' orizzonte e al piano verticale. La linea verticale del quadro è uno di questi circoli massimi e può paragonarsi al meridiano della sfera celeste. Se dunque si volessero dividere in gradi tutti questi circoli prospettivi, è chiaro che la linea verticale avrebbe divisioni eguali a quelle della linea orizzontale; e rispetto agli altri verticali si dividerebbero facilmente col calcolo dell' analogia precedente.

51. Senza ricorrere al calcolo, si può eseguire graficamente questa divisione nel modo seguente. Sia OQ (*Tav.* CXC, *fig.* 5) la linea orizzontale, SC la linea verticale, e OY il verticale che si tratta di dividere; si porti il raggio principale da O in Q, e si porti da O in M la distanza OS di questo verticale dal punto di veduta. Considerando la linea verticale del quadro come il *meridiano*, la distanza OS si chiamerebbe, in astronomia, l' *azimut* (*Vedi* Azimut) del verticale da dividersi. Si unisca M con Q, e dal punto Q come centro col raggio QO si descriva l'arco di circolo ON. Dal punto N si abbassi sopra OQ la perpendicolare NL: QL sarà evidentemente il coseno dell'azimut, perchè OM ne è la tangente e NL il seno. Si porti LQ da Q in P, dalla parte opposta del punto O. Si faccia passare per P la perpendicolare PB, sulla quale si porteranno dall' una e dall' altra parte dal punto P, come in t, u, x, ec. le divisioni prese sulla linea orizzontale cominciando da S. Pel punto Q e pei punti t, u,

x, ec. si tirino le rette che daranno i punti T, V, X, ec. delle divisioni cercate. Infatti, essendo Pt, per esempio, la tangente di 10° il cui raggio è OQ, i triangoli rettangoli simili QOT, QPt danno

$$QP : Pt :: QO : OT,$$

proporzione identica coll' analogia del numero precedente.

52. Quando si ha un gran numero di oggetti da porre in prospettiva, bisogna prima calcolare a qual distanza dal quadro debbono supporsi gli oggetti che vogliosi rappresentare sul davanti, perchè sia possibile di farli entrare tutti nel quadro. Questo calcolo è fondato sulla proporzione seguente:

L'altezza del quadro sta al raggio principale, come l' altezza dell' oggetto sta alla distanza dall' occhio alla quale bisogna porlo perchè la sua altezza possa esser rappresentata tutta intera nel quadro.

Supponiamo, per esempio, che AB (*Tav.* CXCI, *fig.* 5) sia l'oggetto più vicino e più elevato, che la sua altezza sia di 16 moduli, che il quadro abbia 5 moduli d' altezza, e che il raggio principale sia di 10 moduli: è evidente che si avrà

$$RT : TO :: AB : AO.$$

Col calcolo si trova AO = 32 moduli, e per consegnenza AT = AO — TO = 22 moduli. Bisogna dunque allontanare il quadro di 22 moduli dall'oggetto, onde questo oggetto vi possa stare tutto intero. Il posto di questo oggetto dicesi allora il *davanti della scena.*

53. Non basta l' aver trovato la distanza del *davanti della scena*, perchè è essenziale l' esaminare se secondo questa distanza il quadro è abbastanza largo da comprendere tutti gli oggetti che si vogliono rappresentare su questo davanti.

Si può verificare se questa circostanza ha luogo mediante la proporzione:

La distanza dell' occhio dall' oggetto trovata di sopra, sta al raggio principale, come la larghezza del davanti della scena sta alla larghezza che deve avere il quadro per contenerla.

Infatti, sia AB (*Tav.* CXCI, *fig.* 3) la larghezza del davanti della scena, eguale a 48 moduli; sia in O il luogo dell' occhio, lontano da AB di 32 moduli = OC; sia finalmente DE la larghezza del quadro. Ora, affinchè tutto il davanti della scena possa esser contenuto nel quadro, bisogna che i raggi OD e OE che vanno dall' occhio ai lati verticali del quadro giungano alle estremità A e B di questo davanti di scena: così i triangoli ODE, OAB essendo simili, ed OC e OF essendo le altezze di questi triangoli, si ha

$$OC : OF :: AB : DE,$$

il che dà, sostituendo i numeri proposti, DE = 15 moduli. Bisogna dunque che il quadro abbia 15 moduli di larghezza per contenere il davanti della scena sì in larghezza che in altezza. Ma se il quadro non ne avesse, per esempio, che 12, allora per fargli contenere tutto il davanti della scena bisognerebbe allontanarlo di più dagli oggetti, il che può farsi per mezzo di questa proporzione, che è l' inversa della precedente:

La larghezza del quadro sta al raggio principale, come la larghezza del davanti della scena sta alla distanza dall' occhio alla quale si deve porre questa davanti per farlo entrare tutto nel quadro.

54. Dopo aver così determinato con esattezza la distanza del davanti della scena, la prima cura da prendersi sarà di trovare sul quadro la posizione della linea orizzontale e quella della linea verticale. A tale oggetto si sceglierà il punto

del davanti della scena di faccia al quale si vuol porre l'occhio dello spettatore. Questo punto sarà dunque ad una certa distanza da una delle estremità del davanti della scena, e ad una certa altezza al di sopra del terreno. Dopo aver misurato queste distanze, le due seguenti proporzioni faranno conoscere la posizione della linea orizzontale e della linea verticale.

I. *La distanza dell' occhio dal punto scelto sul davanti della scena sta al raggio principale, come la distanza del punto scelto da una delle estremità del davanti della scena sta alla distanza della linea verticale dal lato verticale del quadro, posto dalla stessa parte di questa estremità.*

II *La distanza dell' occhio dal punto scelto sta all'altezza di questo punto al di sopra del terreno, come il raggio principale sta alla distanza della linea orizzontale dal lato inferiore del quadro.*

La dimostrazione di queste due analogie è troppo facile per meritare di doverecene occupare.

55. Se il davanti AB della scena (*Tav.* CXC, *fig.* 2) non fosse parallelo al piano DE del quadro, come se si volesse rappresentare la facciata di un fabbricato veduta un poco obliquamente, e se questa facciata occupasse esattamente tutta la larghezza del quadro, i calcoli preparatorj diverrebbero un poco più complicati, ma potrebbero evitarsi facendo diverse prove, vale a dire mettendo in prospettiva i quattro punti delle estremità di quest' oggetto, e regolando le dimensioni del quadro su quelle del trapezio prospettivo che danno questi quattro punti. Ecco del resto questi calcoli preparatorj.

Il punto F essendo il punto pel quale si vuol far passare il piano verticale, si calcolerà la grandezza delle linee AL, FM, AH e FH, o coi metodi della trigonometria, o col mezzo di una scala, costruendole sopra un piano più esatto che sia possibile. Facendo $OP=r$, $DE=t$, e $PE=x$, x sarà la distanza della linea verticale da un lato del quadro, e questo valore trovato col calcolo servirà poi a calcolare tutto il rimanente. I triangoli simili BGL, OPE danno

$$OP : PE :: BL : LG,$$

ossia

$$r : x :: b : LG=\frac{xb}{r},$$

ove b rappresenta BL. Facendo pure $FM=HL=d$ e $AH=f$, i triangoli simili HGO, PEO danno

$$PE : OP :: HG : HO,$$

ossia

$$x : r :: d-\frac{bx}{r} : HO=\frac{dr}{x}-b,$$

a motivo di $HG=HL-LG=d-\frac{bx}{r}$. Finalmente i triangoli simili AHO, PDO danno

$$DP : OP :: AH : HO,$$

ossia

$$t-x : r :: f : HO=\frac{fr}{t-x}.$$

Eguagliando tra loro i due valori di HO, si ha l' equazione

$$\frac{dr}{x}-b=\frac{fr}{t-x},$$

che, togliendo i denominatori, diviene

$$x^2-\left(\frac{dr+bt+fr}{b}\right)x+\frac{drt}{b}=o;$$

donde, facendo per brevità $\frac{dr+bt+fr}{b}=a$, si ottiene

$$x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2-\frac{drt}{b}\right]}.$$

Conoscendo così x o PE, si avrà PD e quindi PF, perchè PF = HO+HF—OP: si conoscerà dunque la distanza del punto di veduta P del quadro dal punto F del davanti della scena, pel quale deve passare il piano verticale

56. Quanto alla posizione dell' occhio e alla sua altezza, dobbiamo osservare che nei quadri ordinarj, destinati ad ornare un appartamento, è conveniente il supporre l' occhio elevato di 7 in 8 piedi al di sopra del terreno o del piano geometrico, eccettuato quando si tratti di rappresentare sul terreno un numero grande di oggetti, come sarebbe per esempio il quadro di un giardino; perchè allora è necessario alzare l' occhio in modo che le parti non siano troppo degradate dalla prospettiva e che si possano distinguere senza confusione. Questa sorta di prospettive si dicono *a veduta d' uccello*.

Così non dobbiamo rigorosamente astringerci a situare l' occhio all' altezza ordinaria di un uomo come di 5 piedi in 6 piedi, che nelle prospettive che sono fatte per esser vedute da lungi, e per sembrare una continuazione del terreno sul quale è situato lo spettatore. Tale sarebbe l' estremità di una galleria allungata da un quadro di prospettiva, o un quadro posto in fondo ad un giardino. Nelle prospettive delle decorazioni teatrali, si deve supporre l'occhio posto verso il mezzo dell' anfiteatro, e all' altezza di tre in quattro piedi al di sopra del livello di questo anfiteatro, affinchè il terreno messo in prospettiva sembri una continuazione non interrotta del pavimento del teatro.

57. La lunghezza del raggio principale deve pure scegliersi in modo che le prospettive degli oggetti non abbiano le loro parti troppo accorcite e troppo sfigurate. Quando il quadro non deve esser veduto da lontano, nè è soggetto a un certo posto fisso, ci possiamo servire di questa regola: *il raggio principale non deve esser più corto della metà della diagonale del quadro, nè più lungo di questa diagonale, quando si vuole che tutti i tratti degli oggetti principali siano finiti e distinti.* Ma nelle grandi prospettive, come in quelle delle decorazioni teatrali, che debbonsi supporre fuori della portata ordinaria della vista, e di cui per conseguenza i tratti non debbono essere che disegnati grossolanamente e non finiti, si deve porre l' occhio alla distanza che la situazione del luogo indicherà.

58. La teoria delle ombre è un oggetto essenziale della prospettiva pratica, ma essa appartiene più particolarmente alla *prospettiva aerea*, e le considerazioni geometriche che essa può presentare non sono che conseguenze immediate dei principj che abbiamo esposti alla parola Ombra: dobbiamo dunque contentarci di rinviare il lettore a quell' articolo, non meno che ai diversi *Trattati di prospettiva* nei quali questa materia è trattata coi necessarj sviluppi. Ciò che precede contiene l' esposizione completa dei metodi e dei principj della *prospettiva lineare*.

59. Le regole generali della prospettiva lineare sembrano essere state note agli antichi, quantunque nulla di essi sia giunto fino a noi su tale argomento, poichè è certo da un passo di Vitruvio, che Democrito e Anassagora si occupa-

sono delle decorazioni teatrali e dei modi di metterle in prospettiva, dopo che Agatarco ebbe il primo eseguito simili decorazioni: ma questa scienza è stata creata nuovamente dai moderni, e i suoi principj fondamentali sono dovuti ad Alberto Durero e a Pietro del Borgo. Nel 1600, Guido Ubaldo del Monte pubblicò il primo trattato sistematico di prospettiva, opera egregiamente composta e che ha servito poi di modello a una moltitudine di altre. Più recentemente Deschales, Lamy, S'Gravesande, Brooke Taylor, e Ozanam pubblicarono dei trattati cui però non hanno fatto dimenticare i metodi moderni di cui parleremo alla parola Stereotomia. Devesi a Lacaille un *Trattato di ottica* nel quale la prospettiva si trova trattata in un modo chiarissimo e da cui abbiamo attinto la materia di questo articolo. Ai nostri lettori indicheremo la *Teoria delle ombre e della prospettiva* di Mouge, aggiunta alla quinta edizione della sua *Geometria descrittiva*, e il *Disegno lineare applicato alle arti* di Thierry. Si consulti ancora il *Trattato di prospettiva* di Lavit e quello di Cloquet.

PROSTAFERESI (*Astron.*). Nell'antica astronomia si dava questo nome alla differenza tra il moto vero e il moto medio di un pianeta, ovvero tra il suo luogo vero e il suo luogo medio. Oggi a questa distanza si dà il nome di *equazione dell'orbita*, o di *equazione del centro*.

PROVA (*Aritm.*). Termine di aritmetica che significa una operazione per mezzo della quale si verifica l'esattezza dei resultati di un calcolo. Si vedano le diverse operazioni elementari e la parola Nove.

PSELLO (Michele), il più celebre dei greci scrittori dell'undecimo secolo, abbracciò nella vastità delle sue cognizioni ogni ramo di scibile umano. Delle molte sue opere non citeremo che quella che più particolarmente riguarda il soggetto di questo Dizionario e che ha per titolo: *De quatuor mathematicis scientiis: arithmetica, musica, geometria et astronomia, compendium*, Venezia, 1532, in-8. È questa la prima edizione del testo greco. Guglielmo Xilandro ne pubblicò una nuova edizione col seguente titolo: *Perspicuus liber de quatuor mathematicis scientiis*, Basilea, 1536, in-8, e vi aggiunse una versione latina. L'anno dopo Vinet pubblicò un'altra versione in latino dell'opera di Psello (Parigi, 1557, in-8), ma soppresse la quarta parte, che tratta dell'astronomia, come non compiuta, e vi sostituì il *Trattato della sfera* di Proclo.

PULEGGIA (*Mec.*). Una delle sei macchine considerate come semplici in meccanica. Essa è un corpo rotondo, piatto, mobile sopra un asse e vuoto in gola, cioè, sopra la sua superficie curva, per ricevere una corda. La puleggia è fatta di legno o di metallo, e il suo asse è sostenuto da una sbarra di ferro ricurva che si chiama *staffa*. Essa serve ad inalzare pesi.

Si distinguono due specie di pulegge, la *puleggia fissa* e la *puleggia mobile*. La puleggia fissa è quella la cui staffa AC (*Tav.* LVIII, *fig.* 1) è sostenuta da un punto fisso, e la puleggia mobile è quella nella quale il peso da inalzare è attaccato alla staffa (*Tav.* LVIII, *fig.* 5).

Nella puleggia fissa, la potenza P, che agisce all'estremità della corda, qualunque sia la sua direzione, dev'essere uguale alla resistenza Q per fargli equilibrio, poichè se si prolungano le direzioni delle forze P e Q fino al loro punto d'incontro O, questo punto O apparterrà alla resultante delle due forze; ma questa resultante, nel caso delle forze uguali, divide l'angolo MON in due parti uguali; essa passa dunque ancora pel centro C della puleggia e si trova distrotta dalla resistenza di questo centro. Così la puleggia fissa non aiuta punto la potenza, ma il suo vantaggio consiste nel permettere di cangiare la sua direzione e conseguentemente d'impiegare questa potenza secondo la direzione la più favorevole allo sviluppo della forza. Per esempio un cavallo che non può tirare verticalmente, ma che tira orizzontalmente con molta forza, può essere impie-

gato ad inalzare un peso cangiando la direzione verticale in orizzontale col mezzo di una puleggia.

Se facciamo attenzione che la potenza e la resistenza agiscono sempre alle estremità dei raggi della puleggia, potremo considerarla come la riunione di un' infinità di leve fissate intorno allo stesso punto d' appoggio C e i cui bracci sono uguali. Dipende da quest' uguaglianza dei bracci CM o CN, che nel caso dell' equilibrio la potenza è uguale alla resistenza.

Per la puleggia mobile (*Tav.* LVIII, *fig.* 5) supponiamo che la corda che la circonda sia attaccata per una delle sue estremità al punto fisso Q, e che la potenza P sia applicata all' altra estremità. La resistenza del punto fisso Q concorre dunque in questo caso con la potenza P per sostenere il peso R; e nel caso dell' equilibrio, il rapporto della potenza alla resistenza è dato dalla proporzione

$$P : R :: AO : AB.$$

La puleggia mobile è dunque tanto più vantaggiosa alla potenza quanto la sottendente AB è più grande dal raggio AO. Il caso il più favorevole è quello in cui AB è il diametro della puleggia; il che succede quando i cordoni QA e PB sono paralleli; si ha allora

$$P : Q :: \text{raggio} : \text{diametro} :: 1 : 2,$$

vale a dire che la potenza è la metà della resistenza.

La puleggia è principalmente utile quando ve ne sono più riunite insieme.

Questa riunione dà il mezzo d' inalzare pesi enormi con una piccolissima potenza, come lo proveremo.

Il peso essendo sospeso alla staffa della puleggia C (*Tav.* CXXXII, *fig.* 2) concepiamo questa puleggia abbracciata da una corda attaccata al punto fisso D, con una delle sue estremità, e alla staffa di una seconda puleggia G con l'altra sua estremità. Concepiamo ancora questa seconda puleggia sostenuta da una corda, da una parte attaccata al punto fisso E, e dall' altra alla staffa di una terza puleggia, e così di seguito fino all' ultima puleggia, la quale sarà abbracciata da una corda attaccata da una parte ad un punto fisso e dall' altra alla potenza Q. Se l' equilibrio sussiste tra queste pulegge e che s'indichino con T, T', T'', ec. le tensioni delle corde FA, KI, QN, ec., avremo, non supponendo che tre pulegge o indicando con R il peso o la resistenza

$$T : R :: 1 : 2,$$
$$T' : T :: 1 : 2,$$
$$T'' : T' :: 1 : 2,$$

donde

$$T' : R :: 1 : 4,$$
$$T'' : R :: 1 : 8.$$

La potenza è dunque solamente $\frac{1}{8}$ della resistenza. Essa non sarebbe che $\frac{1}{16}$ se si avessero quattro pulegge; $\frac{1}{32}$ quando se ne avessero cinque; e in generale $\frac{1}{2^n}$ per un numero n di pulegge. In questo caso abbiamo supposto i cordoni paralleli tra loro, questa essendo la disposizione più favorevole.

Con l'aiuto di una puleggia fissa X, che si chiama puleggia di rinvio, si cangia la direzione della potenza senza aumentare nè diminuire la sua intensità, salvo ciò non ostante la resistenza delle corde e l'attrito.

Si chiama TAGLIA una macchina composta di più pulegge disposte sopra una medesima staffa: si dispone (*Tav.* LI, *fig.* a) una taglia mobile con una taglia fissa; dimodochè una stessa corda, tirata da una forza P, abbraccia volta per volta le pulegge. La taglia mobile porta un peso che bisogna aggiungere a quello della taglia medesima, come si deve aggiungere il peso di una puleggia mobile a quello che essa trasporta, per trovare le condizioni dell'equilibrio.

Nella disposizione della figura, possiamo considerare il peso Q come sostenuto da sei cordoni uguali i quali portano ciascuno $\frac{r}{6}$ di questo peso; così la potenza P dev'essere la sesta parte della resistenza. In generale, *la potenza è uguale alla resistenza divisa per il numero dei cordoni che terminano alla taglia mobile.*

La resistenza dei cordoni e l'attrito degli assi modificano molto le condizioni dell'equilibrio, ed è essenziale di averci riguardo nel calcolo delle forze; ma queste particolarità si troveranno in altra parte. (*Vedi* VERRICELLO).

PUNTO (*Geom.*). Elemento trascendente dell'estensione. Non possiamo concepirlo in un modo sensibile che come il limite di una linea. (*Vedi* NOZIONI PRELIMINARI).

Quando si considera una linea come composta di un'infinità di punti, cosa che siamo forzati fare a ciascun istante nella teoria delle linee curve, bisogna rappresentarsi il *punto* come un'*estensione infinitamente piccola*, e allora esso è rapporto alle linee, ciò che è una quantità numerica infinitamente piccola rapporto alle quantità numeriche finite. Ciò non è un'estensione qualunque, per quanto piccola che si possa supporre, paragonabile con l'estensione reale o finita, questa è un'idea data dalla ragione per riportare all'unità la conoscenza che abbiamo di quest'estensione finita.

Ed è così, che attaccando al *punto* il suo vero significato, possiamo definire la linea retta, *una linea tutti i punti della quale hanno una stessa direzione*; e la linea curva, *una linea la cui direzione cangia continuamente da un punto all'altro.* Definizioni che caratterizzano in un modo esatto la natura essenzialmente differente di queste linee.

PUNTI SINGOLARI. Si dà generalmente questo nome ai punti di una curva nei quali essa offre alcune circostanze che meritano di essere osservate, come quelli dove da concava diventa convessa. (*Vedi* INFLESSIONE.)

Tutte le circostanze del corso di una linea essendo date dall'equazione che le rappresenta, ne resulta che esaminando il cammino delle sue ordinate possiamo riconoscere se essa possiede punti singolari e qual è la natura di questi punti. Infatti, se, facendo crescere successivamente l'ascissa, vediamo l'ordinata crescere in principio, quindi in seguito diminuire, potremo concluderne che la curva, la quale allontanandosi in primo luogo dall'asse dell'x, giunta ad un certo punto, cessa di allontanarsi da quest'asse e al contrario se ne avvicina. Ora a questo dato punto il valore dell'ordinata dovendo essere il più grande; basta per riconoscere questo caso, di esaminare se il valor generale di quest'ordinata è capace di un *maximum*; come nel caso contrario, vale a dire, se la curva, dopo essersi avvicinata all'asse dell'x se ne allontana, basta, per determinare il punto dove il cangiamento si effettua, di cercare il valore *minimum* dell'ordinata.

Per esempio, proponiamoci l'equazione

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{\left[2ax - x^2\right]}.$$

Facendo $x=0$, abbiamo $y=0$, il che comincia da insegnarci che la curva passa per l'origine. Cerchiamo ora se y è capace di un *maximum* o di un *minimum*. Avremo (*Vedi* Massimi e Minimi) differenziando l'equazione proposta

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(a-x)}{a\sqrt{2ax-x^2}},$$

e, per conseguenza, per la condizione del *maximum* o del *minimum*,

$$\frac{b(a-x)}{a\sqrt{2ax-x^2}}=0,$$

donde

$$x=a.$$

È facile vedere, senza cercare la seconda derivata differenziale, che questo valore di x corrisponde ad un *maximum*. Sostituito nell'equazione, esso dà.

$$y=b.$$

Così, da $x=0$ fino ad $x=a$, i valori di y crescono da o a b; e dando ad x dei valori più grandi di a, quelli di y diventeranno più piccoli di b. Se si fa $x=2a$, si trova $y=0$.

È dunque evidente che la curva taglia l'asse delle x in due punti; e siccome i valori di y crescono in un modo regolare da o fino a b, e quindi diminuiscono nella stessa maniera da b fino a o, ne resulta che questa curva è perfettamente simmetrica. Essa è infatti una metà d'ellisse.

Ma questo valore *maximum* che si trova in questo caso per l'ordinata di una curva, c'insegna solamente che il punto della curva al quale essa si riferisce è più allontanato dall'asse di quelli che lo precedono e di quelli che lo seguono; essa non c'indica se questo punto è un punto ordinario come x nella (*Tav.* XXXVIII, *fig* 3), o un punto di *regresso* come x nella (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 2). Per riconoscere un punto singolare, diviene dunque necessario di esaminare più accuratamente il cammino crescente o decrescente delle ordinate.

Ora, quando la curva volge la sua concavità verso l'asse delle x, è facile vedere che, nella porzione nella quale tutti i punti si allontanano continuamente da quest'asse, gli accrescimenti dell'ordinate vanno diminuendo. Per esempio, facendo crescere l'ascisse AP (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 6) delle quantità uguali PQ e QR, l'ordinata Pm, diviene Qn e quindi Ro, vale a dire che essa cresce successivamente di bn e di do. Ma bn è più grande di do; poichè se dal punto n si conduca la tangente nc, questa tangente incontrerà l'ordinata Ro prolungata in un punto c, fuori della curva; e siccome, supponendo l'arco mn infinitamente piccolo, possiamo considerare mnc come una sola linea retta, i due triangoli mnb, ndc sono uguali e si ha $nb=cd$; così poichè cd è evidentemente maggiore di do, si ha ancora $bn>do$. È dunque vero che le differenze infinitamente piccole dy, vanno continuamente diminuendo, fintantochè la curva si allontana dall'asse delle x, vale a dire che le seconde differenze ovvero le d^2y sono *negative*. Il contrario ha necessariamente luogo nella porzione xN (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 3) la quale si avvicina all'asse. Così al punto x, le d^2y diventano *positive* di *negative* che esse erano avanti.

Le medesime circostanze si riproducono in un modo inverso quando la curva volge la sua convessità verso l'asse delle x. Infatti, si vede dall'ispezione della (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 9), e dalle precedenti considerazioni, che le ordinate successive Pm, Qn, Ro hanno delle differenze crescenti, poichè do è più grande

di dc, e per consegnenza più grande di bn, vale a dire che le dy vanno crescendo, ossia che le differenze seconde d^2y sono *positive*. Nella porzione della curva che si avvicina all' asse delle x, come xN (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 2), queste seconde differenze diventano dunque *negative*.

Da queste proprietà comincia da resultare, che se la curva ha un punto d'*inflessione* x (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 5) e (*Tav.* CXCV, *fig.* 6), vale a dire un punto dove da concava essa diventa convessa, e *vice-versa*, le differenze seconde d^2y diventeranno a cominciare da questo punto x, *positive* di *negative* che esse erano avanti, se le ordinate vanno sempre crescendo; o *negative* di *positive*, se le ordinate vanno sempre diminuendo. Ora, una quantità variabile non può cangiare di segno senza passare per *zero* o per l' *infinito*, dunque al punto x si ha

$$d^2y = 0 \quad \text{ovvero} \quad d^2y = \infty.$$

Seguirebbe lo stesso per il punto x delle curve (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 3 *e* 2), ma le ordinate diventano decrescenti in questo punto, mentre che in quello delle curve (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 5) e (*Tav.* CXCV, *fig.* 6), esse continuano a crescere. Si potrà dunque distinguere il punto d' inflessione da quello di regresso, dall' osservare che l' ordinata del punto d' inflessione non è nè un *maximum*, nè un *minimum*, nel mentre che quella del punto di regresso è l'uno o l' altro.

Alcuni esempj vanno a render chiara questa teoria. Proponiamoci di trovare il punto d' inflessione della curva la cui equazione è

$$ax^2 = y(a^2 + x^2),$$

una prima differenziazione ci dà

$$dy = \frac{2a^3xdx}{(a^2+x^2)^2},$$

e, una seconda

$$d^2y = \frac{(2a^7 - 4a^5x^2 - 6a^3x^4)dx^2}{(a^2+x^2)^4},$$

considerando dx come costante.

Ugnagliando questa seconda differenza a zero, otteniamo, dopo aver fatto sparire il denominatore e i fattori comuni

$$a^4 - 2a^2x^2 - 3x^4 = 0,$$

donde dividendo per $a^2 + x^2$

$$a^2 - 3x^2 = 0,$$

equazione che dà

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{3}}.$$

Quest' ascissa è quella di un punto d' inflessione; poichè sostituendo il suo valore in quello di dy, il resultamento non diventa zero; il che c' insegna che l' ordinata corrispondente non è nè un *maximum* nè un *minimum*: condizione del punto di regresso. Facendo dunque, AC (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 10) uguale alla media proporzionale tra a e $\frac{1}{3}a$, l' ordinata corrispondente CD incontrerà la curva nel punto cercato.

Cerchiamo ora il punto di *regresso* della curva la cui equazione è

$$y=a-b\left(x-c\right)^{\frac{2}{3}},$$

si comincia da avere

$$dy=-\frac{\frac{2}{3}b\,.\,dx}{\sqrt[3]{(x-c)}},$$

e quindi

$$d^2y=\frac{2}{9}\,.\,\frac{b\,.\,dx^2}{\sqrt[3]{(x-c)^4}}.$$

Uguagliando quest' ultimo valore a o, non se ne può niente concludere pel valore di x, ma facendolo uguale a ∞ se ne deduce $x=c$. Questa è l' ascissa di un punto di regresso; poiché, sostituendolo in dy, si trova $\frac{dy}{dx}=\infty$, il che c' insegna che l' ordinata corrispondente è un *maximum*. La curva dell' equazione proposta è quella della (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 2).

Per distinguere un punto di regresso, come quello del quale ci siamo occupati, dal punto x della curva (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 3), bisognerà riconoscere la natura della curva discutendo i valori di y nelle vicinanze di questo punto.

Si chiamano in generale *punti multipli* quelli dove più rami di una stessa curva si riuniscono o s' incontrano, e particolarmente *punti doppj*, *tripli*, ec., secondo il numero dei rami.

Per esaminare i caratteri ai quali possiamo riconoscere questi punti, sia $nom'xn''m$ (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 8) una curva della quale due rami almeno si tagliano nel punto o. È evidente che per ciascuna ascissa $AP=x$, corrisponde, eccettuato nel punto o, un certo numero di valori Pm, Pm' per l' ordinata y, vale a dire che l' equazione della curva dovendo essere tale che a ciascuna ascissa corrispondano più ordinate, le diverse ordinate del punto o sono uguali tra loro.

Ugualmente AY essendo l' asse delle ordinate, bisogna che a ciascuna ordinata Aq, corrispondano generalmente più ascisse qn'', qn', qn, e che quelle che corrispondano ai rami che debbono incontrarsi diventino uguali a questo punto d' incontro.

Dunque se si rappresenta con a il valore di x e con b quello di y, valori che convengono al punto multiplo, l' equazione della curva dev' esser tale che quando si metterà a per x si trovi per y altrettanti valori uguali a b quanti rami vi sono che passano pel punto multiplo, e che quando metteremo b per y, si trovi uno stesso numero di valori a per x.

Segue da ciò che la forma generale dell' equazione di una tale curva è

$$\begin{aligned}&A(x-a)^m+B(x-a)^{m-1}(y-b)\\&+G(x-a)^{m-2}(y-b)^2+\text{ec.}\ldots\ldots\ldots+Z(y-b)^m=o\ldots.(1),\end{aligned}$$

m, esprimendo il grado della moltiplicità del punto in questione, e A, B, C, ec., essendo funzioni qualunque di x e di y.

Infatti, se si fa $x=a$, l' equazione si riduce a

$$Z(y-b)^m=o,$$

equazione che ha m radici $y=b$; e se si fa $y=b$, essa diventa

$$A(x-a)^m=o,$$

equazione che ha ugualmente m radici $x=a$.

Ora, prendendo le differenziali successive dell'equazione (1), è evidente che quella dell'ordine m non conterrà più alcun termine affetto dai fattori $x-a$, $x-b$; nel mentre che tutte quelle dei gradi inferiori conterranno necessariamente questi medesimi fattori. Dunque, quando vi è un punto multiplo le differenziali prime, seconde ec., debbono annullarsi tutte quando ci facciamo $x=a$ e $x=b$, eccettuato quella il cui ordine è indicato da m.

Ne resulta 1° che al punto multiplo non possiamo avere il valore della derivata $\frac{dy}{dx}$ espresso altrimenti che da $\frac{o}{o}$, se ciò non segue per l'ultima equazione differenziale; 2° che si ottiene l'ultima equazione differenziale differenziando la proposta m volte di seguito.

Così per trovare i valori di x e di y i quali corrispondono ai punti multipli nelle curve che hanno tali punti, bisogna differenziare l'equazione della curva, ricavarne il valore $\frac{dy}{dx}$, ed uguagliare quindi separatamente a zero il numeratore e il denominatore di questa quantità. Per assicurarsi quindi se veramente esiste un punto multiplo, si sostituiranno i valori trovati per x ed y nell'equazione della curva, poichè in questo caso essi debbono soddisfare a quest'equazione.

Per conoscere in seguito il grado di moltiplicità del punto, si differenzierà successivamente l'equazione della curva fino a tanto che la sostituzione dei valori trovati non annulli più tutti i termini dell'equazione differenziale. Allora il numero delle differenziazioni che saranno state necessarie per giungere a questo resultamento sarà il numero di moltiplicità del punto.

Proponiamoci, per esempio, di trovare, se ce ne sono, i punti multipli della curva la cui equazione è

$$y^4-axy^2+bx^3=o.$$

Differenziando si ottiene

$$4y^3dy-2axydy-ay^2dx+3bx^2dx=o,$$

donde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2y^2-3bx^2}{4y^3-2axy},$$

facendo dunque

$$3bx^2-ay^2=o,$$

$$4y^3-2axy=o,$$

la seconda equazione dà

$$y=o \quad e \quad y=\frac{1}{2}\sqrt{ax}.$$

Il valore di $y=o$, sostituito nella prima equazione dà $3bx^2=o$, donde $x=o$. Ora, i due valori

$$x=o, \quad y=o$$

soddisfanno alla proposta; così la curva ha un punto multiplo nel luogo di questi valori, vale a dire all' origine delle coordinate.

Quanto al secondo valore $y=\frac{1}{2}\sqrt{ax}$, sostituendolo in

$$3bx^2-ay^2=0,$$

si ha

$$3bx^2-\frac{1}{4}a^2x=0,$$

la quale dà

$$x=0, \quad e \quad x=\frac{a^2}{12b},$$

ma i valori $y=\frac{1}{2}\sqrt{ax}$ e $x=0$, ovvero $y=\frac{1}{2}\sqrt{ax}$ e $x=\frac{a^2}{12b}$ non soddisfanno alla proposta; così non vi è altro punto multiplo fuori di quello che è all' origine.

Per conoscere il numero di moltiplicità di questo punto, differenziamo una seconda volta la proposta, considerando dx e dy come costanti, otterremo

$$12y^2.dy^2-2ax.dy^2-20y.dxdy-2aydxdy+6bxdx^2,$$

di cui tutti i termini si annullano, facendo

$$x=0 \quad e \quad y=0.$$

Differenziamo una terza volta, avremo

$$24ydy^3-2adxdy^2-2adxdy^2-20dxdy^2+6bdx^3,$$

la quale si riduce a

$$6bdx^3-6adxdy^2$$

facendo $x=0$, $y=0$. Siccome questa terza differenziale non si può annullare, il punto in questione è un *punto triplo*. La forma della curva alla quale esso appartiene è quella della (*Tav.* XXXVIII, *fig.* 7).

La teoria dei *punti singolari* contiene ancora un gran numero di casi degni di osservazione per i quali dobbiamo rimandare i lettori all'opera *Analyse des lignes courbes* del Cramer, e all'opera *Traité de calcul différentiel* del La Croix.

PURBACH (o piuttosto PEURBACH Giorgio), il maestro e l'amico del celebre Giovanni Muller (Regiomontano), ed uno dei ristoratori delle scienze matematiche nel quindicesimo secolo, nacque nel 1423 in Germania, nel villaggio di Peurbach, dal quale secondo l' uso di quel tempo prese egli il nome. Fu scolare di Giovanni Gmunden che insegnava allora l' astronomia nella università di Vienna: ma il discepolo ha fatto dimenticare il maestro. Il giovine Purbach contrasse però alle sue lezioni la passione che poi ebbe sempre per questo ramo della scienza. Dopo un viaggio in diversi luoghi dell' Europa, intrapreso col solo fine di profittare delle cognizioni di quelli che coltivavano l' astronomia, Purbach tornò a Vienna, ove successo al suo maestro. La sua reputazione era allora abbastanza grande per venire vivamente sollecitato ad occupare le cattedre di Bologna e di Padova; ma i benefizj dell' imperatore Federico III lo determinarono a fermare stanza a Vienna. Due cose parvero al-

lora di somma importanza al giovine professore per trarre la scienza astronomica dallo stato in cui si trovava dopo tanti secoli di barbarie e d'ignoranza: l'esposizione di una buona teoria del sistema dell'universo, ed osservazioni fatte con maggior cura e precisione onde confermare o correggere le ipotesi degli antichi, poichè lo spirito di critica e d'investigazione diveniva di giorno in giorno più grande nelle scuole più illustri dell'Europa, ed annunziava un'era di rinnovazione e di progresso. Purbach imprese perciò a dare una versione più esatta dell'Almagesto, la migliore o piuttosto la sola opera sistematica sufficientemente estesa che allora si possedesse sull'astronomia. Fu in tale epoca che il giovane Giovanni Muller si recò a Vienna e venne accolto da Purbach come questi lo era stato da Giovanni Gmunden. È difficile il separare adesso i nomi di questi due uomini di talento, cui una morte improvvisa tolse ambedue ancor sì giovani alla scienza che riposero nella via del progresso e alla gloria di proclamare il vero sistema del mondo che i loro lavori comuni avrebbero fatto loro infallibilmente scoprire. Infatti, Purbach aveva già immaginato nuovi strumenti e corretto quelli che avevano servito alle osservazioni degli antichi. E già aveva tratto grandi vantaggi dalla sua maniera di osservare, ed aveva potuto rettificare diverse parti delle ipotesi di Tolomeo, introducendo nuove equazioni nei moti dei pianeti. Aveva misurato più esattamente i luoghi delle stelle fisse, la cognizione delle quali è tanto necessaria nei moti celesti. Aveva infine formato non poche tavole per ajutare gli astronomi ne' loro calcoli.

Purbach fu pure autore di parecchie invenzioni gnomoniche: è a lui pure dovuta la produzione di uno strumento conosciuto nella geometria pratica sotto il nome di *quadrato geometrico*: sembra essere stato il primo che abbia fatto uso del filo a piombo per segnare le divisioni di uno strumento. Abbiamo veduto altrove (*Vedi* Muller) che Purbach, cedendo finalmente alle istanze del cardinale Bessarione, era sul punto di partire per Roma insieme con Regiomontano onde perfezionarvisi nella lingua greca, e poter dare una versione più esatta dell'Almagesto. Regiomontano fece solo questo viaggio, essendo Purbach morto improvvisamente a Vienna l'8 Aprile 1461. Gli fu eretto in questa città un monumento, il cui epitaffio mentre attesta il dolore che produsse la sua perdita, rammemora le nobili speranze che il suo talento aveva fatto concepire. Si ha di Purbach: I *Theoricae novae planetarum*, *cum notis Reinoldi*, *ec.* 1580, in-8; II *Tabulae eclipsium magistri Georgii Purbachii*, Vienna, 1514, e Neuburg, 1557; III *Purbachius de sinubus*, Norimberga, 1541; IV *Libellus G. Purbachii de quadrato geometrico*, Norimberga, 1544, in-4; V *Johannis de Monteregio et Georgii Purbachii Epitome in Cl. Ptolemaei magnam Constructionem*: quest'opera incominciata da Purbach fu terminata dal suo discepolo Muller. Willebrord Snellio ha pubblicato alcune *Osservazioni di ecclissi* fatte da Purbach, e Gassendi ha scritto la sua vita. In seguito alla sua *Tavola degli ecclissi*, si trova il catalogo dei manoscritti da lui lasciati.

Q

QUADRANGOLARE. (*Geom.*). Dicesi, adiettivamente, di una figura che ha quattro angoli.

QUADRANGOLO. (*Geom.*). Nome col quale gli antichi indicavano una figura rettilinea che ha quattro angoli e quattro lati. Una tal figura al giorno d'oggi chiamasi *quadrilatero*. (*Vedi* QUESTA PAROLA).

QUADRANTE SOLARE (*Gnom.*). Strumento sul quale sono disegnate delle linee che indicano l'ora o per mezzo di un raggio solare o dell'ombra di uno stile o gnomone. *Vedi* GNOMONICA.

QUADRARE. Dicesi *quadrare* un numero per esprimere che si moltiplica per se stesso.

Quadrare una figura geometrica equivale a trovare un quadrato la cui superficie sia uguale alla sua. (*Vedi* QUADRATURA).

QUADRATICO. (*Alg.*). EQUAZIONE QUADRATICA. Questo è ciò che al giorno d'oggi si chiama semplicemente *equazione del secondo grado*.

La forma generale di una tale equazione è

$$A_0x^2+A_1x+A_2=0.$$

(*Vedi* EQUAZIONE, n.° 5). Dividendo i due membri per A_0 e facendo

$$\frac{A_1}{A_0}=A,\quad \frac{A_2}{A_0}=B,$$

si riporta questa forma alla seguente non meno generale

$$x^2+Ax+B=0\ .\ ,\ .\ .\ .\ (m),$$

di cui il primo membro dev'essere equivalente al prodotto di due fattori del primo grado $x-a$, $x-b$, mediante quello che è stato dimostrato alla parola EQUAZIONE, n°. 17, vale a dire che l'uguaglianza (m) porta seco l'uguaglianza corrispondente

$$(x-a)(x-b)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (n),$$

nella quale a e b sono le *radici* dell'equazione del secondo grado.

Risolvere un'equazione del secondo grado equivale a trovare i valori a e b i quali soddisfanno a quest'equazione, o, per meglio dire, che sostituiti invece di x nel primo membro, lo riducono a zero. Esistono tre processi differenti per giungere a questo resultamento.

1. Abbiamo veduto (EQUAZIONE, n.° 19) che il primo coefficiente A è uguale alla somma delle radici presa con un segno contrario, e che il secondo coefficiente B è uguale al prodotto delle radici, ossia che

$$A=-(a+b),$$
$$B=ab.$$

Ora, elevando i due membri della prima uguaglianza alla seconda potenza e moltiplicando per quattro quelli della seconda, si ottiene

$$A^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$4B = 4ab.$$

Sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima, viene

$$A^2 - 4B = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

il che dà

$$\sqrt{\left[A^2 - 4B\right]} = a - b.$$

Così, da una parte si ha

$$a + b = -A$$

e dall' altra

$$a - b = \sqrt{\left[A^2 - 4B\right]}.$$

Ma quando si conosce la *somma* e la *differenza* di due quantità, si ottiene la più grande di queste quantità, aggiungendo la metà della differenza alla metà della somma, e la più piccola, sottraendo la metà della differenza dalla metà della somma (*Vedi* Equazione, n.° 10), donque in questo caso abbiamo

$$a = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2 - 4B\right]},$$

$$b = -\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2 - 4B\right]}.$$

Tali sono l'espressioni generali dei valori delle radici dell' equazione del secondo grado in funzione dei coefficienti di quest' equazione. Siccome a o b sostituiti in luogo di x nell' equazione

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

riducono il primo membro a *zero*, si riuniscono questi due valori sotto la forma

$$x = -\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2 - 4B\right]} \ldots\ldots (p).$$

Prendendo la radice quadrata di $A^2 - 4B$, avremmo dovuto porre, mediante il principio conosciuto, il doppio segno $\pm$ avanti il radicale; ma tanto che si prenda in questo caso il segno $+$ o il segno $-$, i valori di a e di b non differiscono tra loro che per il segno del radicale, il che non cangia niente al doppio valore di x, poichè le radici a e b entrano in un modo simmetrico nella composizione dell' equazione.

2. Si giunge all' espressione (p) mediante un altro artifizio di calcolo, facendo sparire il secondo termine Ax dall' equazione

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

il che la riporta alla forma

$$x^2 + M = 0,$$

sotto la quale una semplice estrazione quadrata basta per fare ottenere i due valori di x, poichè si ha immediatamente

$$x^2 = -M, \quad e \quad x = \pm\sqrt{-M}.$$

Questa trasformazione si effettua ponendo

$$x = y - m,$$

y essendo una nuova incognita ed m una quantità arbitraria, che si determina in modo da fare sparire il secondo termine dall'equazione. Infatti, sostituiamo $y - m$ in luogo di x, avremo

$$(y-m)^2 + A(y-m) + B = o,$$

e, sviluppando,

$$\left.\begin{array}{l} y^2 - 2my + m^2 \\ \quad + Ay \; - Am \\ \quad\quad + B \end{array}\right\} = o.$$

Così, m essendo arbitraria, possiamo fare $A - 2m = o$, il che riduce l'equazione precedente a

$$y^2 + (m^2 - Am + B) = o,$$

donde si ricava

$$y^2 = -m^2 + Am - B,$$

e

$$y = \pm\sqrt{\left[-m^2 + Am - B\right]}.$$

Ma $A - 2m = o$ dà $m = \frac{1}{2}A$; sostituendo questo valore di m in quello di y, si trova

$$y = \pm\sqrt{\left[-\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}A^2 - B\right]}$$

$$= \pm\sqrt{\left[\frac{1}{4}A^2 - B\right]}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2 - 4B\right]}.$$

Dunque, poichè $x = y - m = y - \frac{1}{2}A$, si ha definitivamente

$$x = -\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2 - 4B\right]}.$$

3. Il terzo processo di risoluzione consiste a rendere il primo membro dell'equazione un quadrato perfetto, ed esso è fondato sopra le seguenti considerazioni.

Facendo passare il termine tutto cognito B nel secondo membro, l'equazione diventa

$$x^2 + Ax = -B \ldots\ldots (q),$$

e, sotto questa forma, il primo membro può sempre esser considerato come contenente i due primi termini della seconda potenza di un binomio $x+p$, poichè si ha in generale,

$$(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2,$$

e, per conseguenza, prendendo $p=\frac{1}{2}A$, x^2+Ax rappresenta x^2+2px. Si completerà dunque il quadrato aggiungendo a x^2+Ax, la quantità p^2, ovvero $\frac{1}{4}A^2$, il che è la stessa cosa. Ma per non distruggere l'uguaglianza (q), bisogna aggiungere ancora questa quantità al suo secondo membro, e si ha

$$x^2 + Ax + \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4}A^2 - B,$$

ossia

$$\left(x+\frac{1}{2}A\right)^2 = \frac{1}{4}A^2 - B.$$

Prendendo la radice quadrata dai due membri, viene

$$x+\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\left[\frac{1}{4}A^2-B\right]}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2-4B\right]}$$

e, come sopra,

$$x = -\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2-4B\right]}.$$

4. Il valore delle radici dell'equazione generale del secondo grado

$$x^2 + Ax + B = 0 \ldots\ldots (r),$$

è dunque dato dall'espressione

$$x = -\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[A^2-4B\right]} \ldots\ldots (s),$$

e basta per ottenere queste radici, di sostituire in (s) i valori dati dalle quantità A e B, e quindi eseguire l'operazioni indicate. Il seguente esempio è sufficiente per far conoscere il metodo dei calcoli.

Determinare due numeri la cui somma sia 10 *e il prodotto* 24. Se indichiamo con x uno di questi numeri, l'altro sarà $10-x$, ed avremo per la natura del problema

$$x.(10-x) = 24, \quad \text{ovvero} \quad 10x - x^2 = 24,$$

il che, riportato alla forma (r), ci dà l'equazione

$$x^2 - 10x + 24 = 0;$$

paragonandola con (r), abbiamo $A = -10$, $B = 24$, e per conseguenza

$$x = \frac{10}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[100 - 4 \cdot 24\right]} = 5 \pm 1.$$

I due valori 6 e 4 debbono dunque soddisfare alla questione proposta. Infatti, siccome la loro somma è 10, sono essi stessi i due numeri domandati, dunque il prodotto è 24.

5. Discutendo i valori che può dare l'espressione (s), mediante quelli dei coefficienti A e B, si trova facilmente 1.° che le due radici sono sempre reali e ineguali se B è negativo, o, nel caso di B positivo, se $4B$ è più piccolo di A^2; 2.° che le due radici sono *immaginarie* se B essendo positivo, si ha $4B > A^2$; e 3.° che le due radici sono reali ed uguali se il radicale sparisce, ovvero, se B essendo positivo, si ha $A^2 = 4B$. Non ci fermeremo sopra quest'analisi, la quale, d'altra parte trovasi in tutte l'opere elementari.

QUADRATO. (*Geom.*) Quadrilatero i quattro lati del quale sono uguali e i quattro angoli retti.

La superficie di un *quadrato* si trova, moltiplicando per se stesso il numero, che esprime la lunghezza del suo lato. (*Vedi* AREA).

La diagonale di un *quadrato* è incommensurabile col suo lato, poichè, mediante la proprietà del triangolo rettangolo, la seconda potenza di questa diagonale è uguale alla somma delle seconde potenze di due lati del quadrato, ovvero, ciò che equivale al medesimo, uguale al doppio della seconda potenza del lato. Così, indicando con A il lato e con B la diagonale, si ha

$$B^2 = 2A^2, \quad \text{donde} \quad B = \sqrt{2A^2} = A\sqrt{2},$$

la diagonale di un *quadrato* sta dunque al suo lato nel rapporto di 1 a $\sqrt{2}$.

In *Algebra*, la seconda potenza di un numero si chiama ancora il *quadrato* di questo numero, come si dice ancora *radice quadrata*, invece di *radice seconda*; queste denominazioni, prese dalla geometria, sono di un uso generale.

Alcuni autori impiegano l'espressione di *equazione quadrata* per *equazione del secondo grado*, ovvero *equazione quadratica*. (*Vedi* QUADRATICO). Gli antichi geometri chiamavano *quadrato quadrato* la quarta potenza di un numero, per esempio, a^4, era per essi un *quadrato quadrato*.

QUADRATO MAGICO (*Aritm.*). Questo è un quadrato diviso in caselle, nelle quali si dispone un seguito di numeri in proporzione aritmetica, in modo tale, che le somme di tutti quelli i quali si trovano in una stessa banda orizzontale, o diagonale siano tutte uguali tra esse. Tale è il seguente quadrato

4	9	2
3	5	7
8	1	6

dove si trova $4+3+8=9+5+1=2+7+6=4+9+2=3+5+7=8+1+6=4+5+6=4+5+6=2+5+8=15$.

L'origine dei *quadrati magici* sembra che abbia avuto principio da alcune idee superstiziose dell'antichità. Ciò non ostante Emanuelle Moscopolo, autore greco del XIV° secolo, è il primo che gli abbia fatti conoscere, esso si è contentato di presentarli come una curiosità aritmetica. Nel principio del XVIII° secolo, le difficoltà che presenta la costruzione di questi quadrati gli fece studiare dal Bachet di Meziriac, del Frenicle, del Lahire e diversi altri, i quali ottennero risultamenti molto meritevoli di essere osservati, ma tutto il merito dei quali consiste nella destrezza delle disposizioni, mentre esso è un semplice giuoco il quale non può condurre a veruna utilità. Il Lahire ha consegnato le sue ricerche sopra questo soggetto nell'opera intitolata *Mémoires de l'Académie* per l'anno 1705.

QUADRATRICE. (*Geom.*). Nome dato a differenti curve trascendenti, la più antica e quella che più merita di essere osservata tra queste è quella che fu inventata da Dinostrato, per la quadratura del circolo.

Se si divide il quarto ac di una circonferenza di circolo (*Tav.* LVIII, *fig.* 10) in più parti uguali as, sg, gv, vu ed uc, e avendo condotto da ciascun punto di divisione un raggio al centro b del circolo, si divida il raggio ab in uno stesso numero di parti uguali ad, dh, hk, kn ed nb; le parallele al raggio bc, condotte per i punti d, h, k, n di quest'ultime divisioni, taglieranno i raggi bs, bg, bc, bu in dei punti m, n, p, q, i quali apparterranno alla *quadratrice di Dinostrato*.

Mediante questa costruzione, l'arco as sta al quarto della circonferenza asc come l'ascissa ad sta al raggio ob; facendo dunque l'arco $as=z$, il quarto della circonferenza $asc=a$, l'ascissa $od=x$, e il raggio $ab=r$, avremo

$$z : a :: x : r,$$

donde

$$rz = ax \ldots\ldots (a),$$

equazione della quadratrice.

Per trovare il punto o dove la quadratrice taglia il raggio bc, supponiamo bn infinitamente piccola; l'arco uc sarà ancora infinitamente piccolo e potrà considerarsi come una parte infinitamente piccola della tangente al punto c; allora i triangoli nqb ed ucb saranno simili e daranno

$$bc : nq :: uc : bn,$$

ma supponendo bn infinitamente piccola si ha $nq=bo$; dunque

$$bc : bo :: uc : bn.$$

Di più, dalla natura della curva

$$uc : bn :: osc : ab,$$

dunque

$$bc : bo :: asc : ab,$$

ovvero

$$r : bo :: a : r,$$

il che dà

$$bo = \frac{r^2}{a},$$

vale a dire che bo è terza proporzionale al quarto della circonferenza e al raggio.

Così, se si potesse trovare geometricamente il punto o, si troverebbe ancora geometricamente la lunghezza dal quarto dalla circonferenza, e quadruplicando si avrebbe la lunghezza della circonferenza intera, donde dipende la *quadratura del circolo* (*Vedi* QUESTA PAROLA). Ma ciò è impossibile, poichè supponendo nq infinitamente vicina a bc, questa retta non può tagliare il raggio bu quando il punto u si confonde col punto c, perchè nq essendo parallela a bc è allora parallela a bu, o piuttosto perchè nq si confonde allora con bu e bc.

Tirando per il punto s, sx, perpendicolare al raggio ab, si hanno due triangoli simili i quali danno

$$bx : bs :: bd : bm,$$

ma chiamando z l'angolo abs, $bx = \cos z$ e $bd = r - x$; così, questa proporzione facendo $bm = y$, equivale allo stesso che

$$\cos z : r :: r - x : y,$$

donde si ricava

$$y = \frac{r(r-x)}{\cos z},$$

sostituendo invece di x il suo valore $\frac{rz}{a}$ dedotto dall'equazione (a), si ottiene definitivamente quest'altra equazione della quadratrice

$$y = \frac{(a-z)\,r^2}{a \cos z}.$$

Allorquando si fa in quest'equazione $z = a$, y diventa uguale a bo, e siccome allora $a - z = 0$ e $\cos z = 0$, il che dà

$$y = \frac{0}{0};$$

bisogna, per trovare il valore di y, differenziare i due termini dalla fraziona. (*Vedi* DIFF., n.° 88). Si ottiene con questo metodo

$$\frac{d(a-z)r^2}{d a \cos z} = \frac{-dz \,.\, r^2}{-a \operatorname{sen} z \,.\, dz} = \frac{r^2}{a \operatorname{sen} z},$$

e per conseguenza facendo $z = a$, donde $\operatorname{sen} z = 1$,

$$y \text{ ovvero } bo = \frac{r^2}{a},$$

come l'abbiamo trovato sopra

QUADRATURA. (*Geom.*). Trasformazione di una figura geometrica in un quadrato che sia equivalente ad essa, ovvero, più generalmente, misura della superficie di una figura geometrica qualunque.

La *quadratura* delle figure rettilinee si riduce a decomporre queste figure in triangoli. La somma dell'aree dei triangoli che compongono una figura è uguale all'area della figura, che d'altra parte possiamo sempre trasformare in un quadrato equivalente con i processi della geometria elementare (*Vedi* AREA). Ab-

biamo dato alla parola POLIGONOMETRIA l' espressione dell' area di un poligono qualunque.

La *quadratura* delle figure curvilinee è uno degli oggetti della geometria che dicesi *analitica*. Quantunque gli antichi abbiano fatto un gran numero di ricerche sopra questa materia, particolarmente per la *quadratura del circolo*, siccome essi non avevano alcun metodo generale per afferrare queste questioni trascendenti, le loro scoperte si limitano quasi esclusivamente alla quadratura della parabola ottenuta da Archimede; non è che verso la metà del secolo XVII° che l' Wren, il Brouneker, l' Huygens e il Neil trovarono i mezzi di quadrare diversi spazj curvilinei, e che il Mercator, riportando questo problema al calcolo algebrico, ebbe la gloria di dare, il primo, la serie che esprime nello stesso tempo la quadratura dell' iperbola e il valore dei logaritmi naturali. Sembra probabile che il Newton avesse digià applicato il suo calcolo delle flussioni alla quadratura delle curve prima delle scoperte del Mercator, ma la priorità della pubblicazione appartiene a quest' ultimo.

Dopo il passo immenso che la scoperta del calcolo differenziale ha fatto fare alla scienza dei numeri, tutti i metodi particolari sono stati sostituiti da un metodo generale altrettanto semplice quanto elegante, che esporremo.

1. Se indichiamo con S l' area di una figura qualunque, il problema generale delle *quadrature* si riduce a trovare la differenziale di S, poichè questa differenziale essendo conosciuta, integrandola si ottiene il valore di S, poichè

$$\int \left(dS\right) = S.$$

(*Vedi* DIFFEREN., n.° 148); dS è ciò che chiamasi l' *elemento* dell' area.

Per ottenere questa differenziale, consideriamo lo spazio APQ (*Tav.* XLV, *fig.* 2) compreso tra l' ascissa AP, l' ordinata PQ e la porzione AQ di una curva qualunque, se l' ascissa $AP = x$ cresce di una quantità PP′, che supporremo infinitamente piccola o uguale a dx, l' ordinata $PQ = y$ diventerà

$$P'Q' = P'm + mQ' = y + dy,$$

e l'area $APQ = S$ crescerà del trapezio *elementare* PQQ′P′; è dunque questo trapezio che è l'*elemento* o la differenziale dell'area S. Ora, l'area di un trapezio (*Vedi* AREA) è uguale alla metà del prodotto della sua altezza per la semi-somma delle sue basi parallele; abbiamo dunque in questo caso

$$dS = \frac{1}{2}\left[PQ + P'Q'\right] \times PP'$$

$$= \frac{1}{2}\left[y + y + dy\right] dx$$

$$= ydx + \frac{1}{2}\, dydx$$

e per conseguenza,

$$dS = ydx \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; (a),$$

poichè $\frac{1}{2}\, dydx$ è una quantità infinitamente piccola del second'ordine, la quale non ha alcun valore paragonabile con la quantità infinitamente piccola del prim' ordine ydx.

Integrando i due termini dell' uguaglianza (a) si ottiene

$$S = \int y dx + C \ldots\ldots (I),$$

C indicando una costante arbitraria che la natura di ciascun problema particolare dà i mezzi di determinare.

Così, per quadrare una figura curvilinea qualunque, basta ricavare dall' equazione della curva il valore di y, sostituirlo nell' equazione (I) e integrare. In seguito renderemo più chiaro questo metodo con esempii.

2. Abbiamo supposto, in ciò che precede, le coordinate rettangolari, il che è generalmente sufficiente poichè possiamo sempre trasformare un sistema qualunque di coordinate in coordinate rettangolari; ma è utile in certi casi particolari avere la differenziale dell' area in coordinate oblique o polari, e dobbiamo avanti di passare alle applicazioni, cercare l' espressione di questa differenziale.

Sia dunque APQ (*Tav.* XLV, *fig.* 7) un' area compresa tra le coordinate oblique AP, PQ e la porzione della curva AQ, e sia ω l' angolo QPX che fanno tra loro queste coordinate. Quando AP cresce di $PP' = dx$, l' area APQ cresce dal trapezio PP'Q'Q, il quale è composto del parallelogrammo QPP'm e del triangolo QmQ', abbiamo dunque

$$dS = QPP'm + QmQ',$$

ma l' area del parallelogrammo QPP'm è uguale al prodotto dei lati PQ e PP' moltiplicato per il seno dell' angolo di questi lati (*Vedi* Trigonometria), vale a dire che si ha

$$QPP'm = PQ \times PP' \operatorname{sen}\omega = y dx . \operatorname{sen}\omega;$$

e l' area del triangolo QmQ' è uguale al prodotto dei suoi lati Qm ed mQ' moltiplicata per il seno dell' angolo QmQ', supplemento dell' angolo ω. Abbiamo dunque in questo caso

$$dS = y dx . \operatorname{sen}\omega + dy dx . \cos\omega$$

ovvero, semplicemente

$$dS = y dx . \operatorname{sen}\omega \ldots\ldots (b),$$

sottraendo la quantità infinitamente piccola del second' ordine $dydx.\cos\omega$. Integrando i due membri dell' uguaglianza (b), otterremo, pel caso delle coordinate oblique

$$S = \operatorname{sen}\omega \int y dx + C \ldots\ldots (II).$$

Sia ora l' area APQ (*Tav.* XLV, *fig.* 9) compresa tra l' asse PA, il raggio vettore $PQ = z$ e la porzione di curva AQ. Supponiamo che l' angolo $APQ = \mu$ del raggio vettore con l'asse cresca dell' angolo infinitamente piccolo $QPQ' = d\mu$, l'area APQ crescerà del triangolo *elementare* PQQ', e il raggio vettore PQ diventerà

$$PQ' = z + dx.$$

Il triangolo elementare PQQ' è dunque la differenziale dell' area APQ, ma la superficie di questo triangolo è uguale a

$$\frac{1}{2} PQ \times PQ' \times \operatorname{sen} d\mu = \frac{1}{2} z \left(z + dx\right) d\mu,$$

poichè sen $d\mu = d\varphi$. Abbiamo per conseguenza

$$dS = \frac{1}{2}z^2 d\mu + \frac{1}{2} z dz d\mu$$

ovvero

$$dS = \frac{1}{2} z^2 d\mu \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(c).$$

Integrando i due membri di quest' uguaglianza viene

$$S = \frac{1}{2}\int z^2 d\mu + C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(III).$$

3. Per prima applicazione dell' espressione generale (I), prendiamo la parabola Q'AQ (*Tav.* XLV, *fig.* 8) e cerchiamo la grandezza dell' area AmQP, compresa tra l' asse, la curva e l' ordinata PQ $= y$. L' equazione della parabola essendo $y^2 = px$ (*Vedi* PARABOLA), ne dedurremo

$$y = \sqrt{px},$$

e sostituendo questo valore di y nell' equazione (I), viene

$$S = \int dx . \sqrt{px} + C.$$

Si tratta dunque d' integrare $dx . \sqrt{px}$ ovvero $\sqrt{p} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx$. L' integrale domandato è (*Vedi* INTEGRALE n.° 37)

$$\sqrt{p}\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{p} . x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{px}.$$

L' area riducendosi a *zero* quando facciamo $x = o$, si ha $C = o$. Siccome $\sqrt{px} = y$, possiamo porre

$$S = \frac{2}{3} xy$$

il che c' insegna che l' area dello spazio parabolico APQ è uguale ai due terzi del rettangolo APQB costruiti tra le coordinate. Lo spazio curvilineo AmQB è dunque uguale al terzo dello stesso rettangolo.

Se conduciamo la retta AQ, avremo un triangolo rettangolo APQ che sarà la metà del rettangolo APQB, e la cui area sarà per conseguenza uguale a $\frac{1}{2} x . y$. Così sottraendo questo rettangolo dall' area AmQP, ci resterà per l'area del segmento parabolico AQm

$$\frac{2}{3} x . y - \frac{1}{2} x . y = \frac{1}{6} x . y;$$

questo segmento è dunque la sesta parte del rettangolo APQB o il quarto dell' area parabolica APQ.

4. L'equazione del circolo riportata al centro essendo

$$y^2 = a^2 - x^2$$

nella quale a è il raggio, essa ci dà $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, e per conseguenza

$$S = \int \sqrt{\left[a^2 - x^2\right]} dx + C \; . \; . \; . \; . \; . \; (d).$$

Applicando a quest' espressione i processi d'integrazione esposti alla parola Integrale, si ottiene

$$S = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 . \operatorname{arc}\left[\operatorname{sen} = \frac{x}{a}\right] + C.$$

Per determinare la costante C, osserviamo che l'area S è quella che è compresa tra l'asse delle ordinate ED, l'ascissa AP, l'ordinata PQ e l'arco DQ (*Tav.* CXCV, *fig.* 5) ovvero l'area DAPQ, essa è dunque *zero* quando $x = 0$, così $C = 0$.

L'area del quarto di circolo DCA è data dall'espressione precedente facendoci $x = AC = a$; essa è

$$S = \frac{1}{4} a^2 . \pi,$$

poichè $\operatorname{arc.}\left[\operatorname{sen} = 1\right] = \frac{1}{2} \pi$, π indicando sempre la semi-circonferenza del circolo il cui raggio è l'unità. La superficie intera del circolo è dunque $a^2 \pi$, resultamento conosciuto dalla geometria elementare, ma che fa dipendere la quadratura del circolo dalla rettificazione della circonferenza, rettificazione impossibile sotto una forma finita. (*Vedi* Quadratura del Circolo).

Integrando l'espressione (d) per serie, si ottiene

$$\int \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = ax - \frac{x^3}{2 . 3a} - \frac{x^5}{2 . 4 . 5 . a^3} - \frac{3x^7}{2 . 4 . 6 . 7 a^5} - \text{ec.} \; . \; . \; . \; .$$

Questa quadratura indefinita del circolo è dovuta al Newton.

5. La quadratura dell'ellisse conduce come quella del circolo ad una serie indefinita che si ottiene senza difficoltà; così non ci fermeremo sopra ciò. Osserveremo solamente che l'equazione dell'ellisse riportata al centro essendo. (*Vedi* Ellisse n.° 3.)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right),$$

la sua quadratura dipende da

$$\frac{b}{a} \int \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)} dx,$$

nel mentre che quella del circolo il cui raggio è a, vale a dire uguale al semigrand' asse dell'ellisse, dipende da

$$\int \sqrt{\left[a^2 - x^2\right]} dx.$$

L'area dell'ellisse stà dunque a quella del circolo come $\frac{b}{a}\int\sqrt{\left[a^2-x^2\right]}dx$ sta a $\int\sqrt{\left[a^2-x^2\right]}dx$, ovvero, come $\frac{b}{a}$ stà ad 1. Si ha dunque

$$area\ dell'\ ellisse = \frac{b}{a} \times area\ del\ circolo = \frac{b}{a}a^2\pi = ab\pi .$$

6. La quadratura di un'iperbola i cui semi-assi principali sono a e b si riporta nella stessa maniera a quella dell'iperbola equilatera il cui semi-asse è a, poichè l'equazioni di queste curve sono, contando le ascisse dal vertice,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax+x^2\right), \quad y^2 = 2ax+x^2$$

e, per conseguenza, le loro quadrature dipendono dall'espressioni

$$\frac{b}{a}\int\sqrt{\left[2ax+x^2\right]}dx , \quad \int\sqrt{\left[2ax+x^2\right]}dx;$$

l'area dell'iperbola non equilatera può dunque trovarsi moltiplicando per $\frac{b}{a}$ quella dell'iperbola equilatera. Quanto a quest'ultima, non possiamo ottenerla che per logaritmi o per serie; col primo processo si ha

$$\int\sqrt{\left[2ax+x^2\right]}dx = \frac{1}{2}\left(a+x\right)\left(2ax+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{2}a^2 . \operatorname{Log}\left(\frac{a+x+(2ax+x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right)$$

e col secondo,

$$\int\sqrt{\left[2ax+x^2\right]}dx = \sqrt{ax}\left(\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{5a}-\frac{x^3}{4.7a^2}+\frac{3x^4}{4.6.9a^3}-\text{ec.}\ldots\right).$$

7. La quadratura dello spazio asintotico compreso tra un ramo dell'iperbola e il suo asintoto somministra delle particolarità osservabili che dobbiamo indicare; sia CBD (*Tav.* CXCV. *fig.* 4) un'iperbola racchiusa tra i suoi asintoti AE, AF, che fanno tra essi un angolo qualunque ω, la sua equazione riportata agli asintoti come assi è

$$xy = c^2$$

(*Vedi* Iperbola, n.° 15). Essa dà $y = \frac{c^2}{x}$, valore il quale essendo messo nell'espressione (II), poichè in questo caso le coordinate sono oblique, somministra

$$S = c^2 . \operatorname{sen}\omega \int\frac{dx}{x},$$

donda

$$S = c^2 . \text{sen}\, \omega . \text{Log}\, x + C.$$

Log indicando il logaritmo naturale di x. Per determinare la costante C supponiamo che l'area da quadrare sia l'area PQMB compresa tra l'ordinata PB al vertice della curva, e un'altra ordinata qualunque QM, quest'area dovendo annullarsi quando facciamo $x = AP$, indichiamo AP con m ed avremo

$$o = c^2 \text{sen}\, \omega . \text{Log}\, m + C,$$

donde

$$C = -c^2 \text{sen}\, \omega . \text{Log}\, m,$$

l'integrale completo è dunque

$$S = c^2 \text{sen}\, \omega . \text{Log}\, x - c^2 \text{sen}\, \omega . \text{Log}\, m;$$

ma $AP = PB = c$; così, prendendo AP per l'unità, quest'ultima espressione diventa

$$S = \text{sen}\, \omega . \text{Log} . x.$$

Dunque, considerando sen ω come il *modulo* di un sistema di logaritmi che indicheremo con la caratteristica L, siccome abbiamo sen ω. Log x = L x (*Vedi* LOGARITMO) e per conseguenza

$$S = Lx,$$

ne rasulta che gli spazj asintotici, PQMB, PRNB, PSOB, ec. corrispondenti alle ascisse AP, AQ, AR, AS, ec. sono i logaritmi di queste ascisse. Nel caso dell'iperbola equilatera l'angolo ω degli asintoti è retto e sen $\omega = 1$, si ha allora

$$S = \text{Log}\, x,$$

vale a dire che l'aree asintotiche sono, nell'iperbola equilatera, i logaritmi naturali delle ascisse corrispondenti. È da ciò che viene il nome di *logaritmi iperbolici* dato ai logaritmi naturali.

Si vede che ciascuna iperbola non equilatera dà un sistema particolare di logaritmi il cui modulo è uguale al seno dell'angolo degli asintoti. Il modulo dei logaritmi ordinari essendo 0,4342945, se facciamo sen ω = 0,4342945, si trova che gli asintoti dell'iperbola, i quali corrispondono a questi logaritmi, fanno tra loro un angolo di 25° 44′ 25″,2.

8. L'equazione agli asintoti dell'iperbola equilatera diventando

$$xy = 1,$$

quando si prende $c = 1$, se si osserva che ciascuna ascissa AQ, AR, AS, ec., è composta di una parte costante $AP = 1$, potremo sostituire x con $1 + x$, e quest'equazione sarà allora

$$(1 + x)y = 1, \quad \text{donde} \quad y = \frac{1}{1 + x},$$

sostituendo questo valore di y nell'equazione (II), avremo

$$S = \text{sen}\, \omega \int \frac{dx}{1 + x}, \text{ ovvero } S = \int \frac{dx}{1 + x}$$

a motivo di sen $\omega = 1$.

Sviluppando il binomio $(1+x)^{-1}$, si ottiene

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \left(dx - xdx + x^2dx - x^3dx + \text{ec.} \ldots \right)$$

il che dà, integrando

$$S = \text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{ec.} \ldots .$$

questa è la serie del Mercator.

9. Gli esempii che abbiamo dati indicano sufficientemente il metodo che bisogna seguire per la quadratura delle superficie piane; quello delle superficie curve esige altri principii che esporremo. Consideriamo un solido $mCEy'$ (*Tav.* CCXV, *fig.* 1) formato dalla rivoluzione dell' area $mAx'y'$ intorno della retta BX, nel mentre che il piano di $mAx'y'$ descrive il solido, la curva my' descrive la sua superficie curva laterale, e in particolare l' arco infinitamente piccolo yy' descrive la superficie laterale di un cono troncato la cui altezza è $xx' = dx$; quest' ultima è l' *elemento* o la differenziale della superficie convessa del solido. Ora la superficie convessa di un cono troncato è uguale alla metà del prodotto del suo lato per la somma delle circonferenze delle sue basi (*Vedi* Cono, n.° 7). Così quella del cono elementare troncato di cui si tratta, è uguale alla metà dell' arco elementare yy' moltiplicata per le circonferenze dei circoli che descrivono i raggi xy e $x'y'$. Ma queste circonferenze essendo $(xy).\,2\pi$, $(x'y').\,2\pi$ (*Vedi* Circolo), se indichiamo con ds l'arco elementare yy', per y l' ordinata xy, per $y + dy$ l' ordinata $x'y'$ e per S la superficie convessa del solido, avremo

$$dS = \frac{1}{2}\, ds \left(y\,.\,2\pi + (y+dy)\,.\,2\pi \right)$$

$$= 2y\pi ds,$$

ovvero

$$dS = 2y\pi \sqrt{\left(dx^2 + dy^2 \right)} \ldots\ldots (f),$$

ponendo invece dell' arco elementare ds la sua espressione $\sqrt{\left[dx^2 + dy^2 \right]}$ in funzione delle coordinate rettangolari $Bx = x$, $xy = y$ (*Vedi* Rettificazione).

L' integrale dell' espressione (f)

$$S = 2\pi \int \sqrt{y} \left[dx^2 + dy^2 \right] + C \ldots\ldots (IV)$$

dà la quadratura di tutte le superficie di rivoluzione.

10. Per far conoscere l' applicazione della formula (IV), supponiamo che la curva my sia una parabola e che si voglia trovare l' area della superficie convessa della paraboloide troncata $myDC$. L' equazione della parabola

$$y^2 = px,$$

dà

$$dx = \frac{2ydy}{p}, \quad dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2},$$

questo valore sostituito nell' espressione (IV) riduce questa formula a

$$2\pi\int y\sqrt{dy^2\left[\frac{4y^2+p^2}{p^2}\right]}=\frac{2\pi}{p}\int ydy\sqrt{4y^2+p^2}$$

ora, ydy essendo la differenziale della quantità che è sotto il radicale, meno una costante, faccio, $4y^2+p^2=z$, e differenziando trovo $ydy=\frac{dz}{8}$, sostituendo e integrando si ottiene

$$\int\frac{2\pi}{p}ydy\sqrt{4y^2+p^2}=\int\frac{\pi}{4p}z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{\pi}{6}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{p}+C$$

$$=\frac{\pi}{6p}\left[4y^2+p^2\right]^{\frac{3}{2}}+C.$$

così

$$S=\frac{\pi}{6p}\left[4y^2+p^2\right]^{\frac{3}{2}}+C.$$

La costante C si determina, osservando che l' area domandata comincia all'ordinata Am, e per conseguenza che l' integrale deve annullarsi quando in esso facciamo $y=a$, indicando Am con a, abbiamo dunque

$$o=\frac{\pi}{6p}\left[4a^2+p^2\right]^{\frac{3}{2}}+C,$$

donde

$$C=-\frac{\pi}{6p}\left[4a^2+p^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

e, per conseguenza,

$$S=\frac{\pi}{6p}\left\{\left[4y^2+p^2\right]^{\frac{3}{2}}-\left[4a^2+p^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Dando ad y un valore determinato b, avremo la superficie convessa di un tronco di paraboloide compreso tra $y=a$ e $y=b$. Se si fosse domandato la superficie della paraboloide intera la quale comincia da $y=o$, siccome l' integrale deve annullarsi per questo valore di y, si sarebbe avuto

$$o=\frac{\pi}{6}p^2+C,\quad\text{donde}\quad C=-\frac{\pi}{6}p^2.$$

Così la superficie convessa della paraboloide è

$$S=\frac{\pi}{6p}\left\{\left[4y^2+p^2\right]^{\frac{3}{2}}-p^3\right\}.$$

11. La superficie della sfera essendo generata dalla rivoluzione della semi-circonferenza di uno dei suoi gran circoli intorno al suo diametro, prendiamo l'equazione del circolo riportata al vertice che è

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

quest' equazione somministra

$$dy = \frac{2adx - 2xdx}{2y} = \frac{(a-x)dx}{y},$$

$$dy^2 = \frac{(a-x)^2 dx^2}{y^2},$$

sostituendo questo valore nell' equazione (IV), viene

$$2\pi \int y \sqrt{\left[dx^2 + \frac{(a-x)^2 dx^2}{y^2}\right]}$$

$$= 2\pi \int dx \sqrt{\left[y^2 + \left(a-x\right)^2\right]} = 2\pi \int adx$$

a motivo di

$$y^2 + (a-x)^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = y^2 + a^2 - y^2 = a^2.$$

Abbiamo dunque

$$S = 2\pi ax + C.$$

Siccome l' origine delle coordinate è al vertice, l' integrale deve annullarsi quando $x = o$, così $C = o$, e si ha semplicemente

$$S = 2\pi ax.$$

Per avere la superficie intera della sfera, bisogna prenderla da $x = o$ fino ad $x = 2a$; facendo in quest' ultima espressione $x = 2a$, viene

$$S = 4a^2\pi,$$

vale a dire che la superficie totale della sfera è uguale a quattro volte quella di uno dei suoi gran circoli.

12. La formula (IV) non essendo applicabile che ai solidi di rivoluzione, bisogna per tutti gli altri determinare l' espressione particolare dell' *elemento* della loro superficie, il che esige dei metodi la cui esposizione non può trovar posto qui. Indicheremo solamente, per terminare, come si ottiene l' elemento della superficie del cono obliquo.

Sia ASB un cono obliquo, del quale SE è l' altezza (*Tav.* CXCIV, *fig.* 5). Pel centro C della base di questo cono, facciamo passare un piano SAE, che lo tagli seguendo uno dei suoi diametri AB; prendiamo un arco infinitamente piccolo mn, e conduciamo sopra la superficie del cono le rette Sm ed Sn, il triangolo Smn sarà l' *elemento* della superficie. Conduciamo di più la tangente Tm, che prolungheremo sul piano della base in modo da potergli abbassare una perpendicolare SD dal vertice S. Questa perpendicolare sarà l' altezza del triangolo elementare Smn e l' area di questo triangolo sarà,

$$dS = \frac{1}{2}\, mn \times SD \ldots\ldots (m).$$

Conduciamo le altre linee della figura e indichiamo con a il raggio AC della base; facciamo di più $CE=b$, $SE=h$, $CP=x$ e $Pm=y$. L'angolo CmT essendo retto, e Pm una perpendicolare abbassata dal vertice di quest' angolo sopra l' ipotenusa TC del triangolo TmC, abbiamo

$$CP : Cm :: Cm : CT,$$

donde

$$CT=\frac{\overline{Cm}^2}{CP}=\frac{a^2}{x},$$

ma i triangoli simili TmC, TDE danno

$$CT : Cm :: TE : ED,$$

ovvero

$$\frac{a^2}{x} : a :: \frac{a^2}{x}+b : ED=\frac{a^2+bx}{a}.$$

Dunque il triangolo SED ci dà

$$SD=\sqrt{\left[h^2+\left(\frac{a^2+bx}{a}\right)^2\right]}.$$

D' altra parte abbiamo l' arco elementare mn, la cui espressione generale è $\sqrt{dx^2+dy^2}$, e siccome in questo caso si tratta di un arco di circolo, prendiamo il valore di dy^2 dall' equazione riportata al centro

$$y^2=a^2-x^2,$$

avremo, sostituendolo in quest' espressione

$$mn=\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

dunque definitivamente,

$$dS=\frac{adx}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\sqrt{\left[h^2+\left(\frac{a^2+bx}{a}\right)^2\right]}.$$

Tale è l' *elemento* della superficie del cono obliquo.

13. Una volta s' indicava sotto il nome di *metodo delle quadrature* il metodo di trovare gl' integrali della forma

$$\int Xdx,$$

nella quale X è una funzione algebrica di x. Questa denominazione impiegata ancora da alcuni autori moderni, viene probabilmente dal sapere che le prime ricerche fatte sopra tali integrali avevano per scopo la determinazione dell' aree terminate da curve. Così si diceva che una soluzione *dipendeva dalle quadrature*, quando essa dipendeva dall' integrazione di $\int Xdx$: quest' integrale rappresentando generalmente un' area quando X è la funzione di x che esprime l' ordinata y di una curva.

QUADRATURA DEL CIRCOLO (*Geom.*). Alcun problema geometrico non è più celebre e più popolare di quello della *quadratura del circolo*; i tentativi innumerabili di cui è stato l'oggetto, le follie alle quali esso ha dato luogo, l'importanza troppo inoltrata che gli si è attribuito, tutto concorre a dare un grande interesse alla sua storia; ancora l'istorico delle matematiche, il Montucla, non si è contentato di farne il soggetto di un supplemento alla sua grand'opera, esso lo ha ancora trattato in particolare, e la *sua Storia delle ricerche sopra la quadratura del circolo* non è il meno curioso nè il meno utile dei suoi lavori.

Quadrare il circolo equivale a trovare il lato di un quadrato che gli sia uguale in superficie, il che non presenterebbe veruna difficoltà quando si potesse descrivere geometricamente, vale a dire, con la riga e il compasso, una linea retta uguale alla sua circonferenza; poichè è dimostrato che la superficie del circolo è equivalente a quella di un triangolo rettangolo che avrebbe per base questa linea retta e per altezza il raggio, e siccome il lato di un quadrato equivalente ad un triangolo è medio proporzionale tra la metà della base e l'altezza del triangolo, ne segue che il problema si riduce a trovare la grandezza della circonferenza di un circolo il cui raggio è dato, o, più generalmente, a trovare il rapporto del raggio o del diametro alla circonferenza, poichè questo rapporto è lo stesso in tutti i circoli.

Archimede è il primo geometra che abbia fatto conoscere un valore approssimato di questo rapporto, o almeno esso è il primo che abbia trovato due limiti tra i quali questo rapporto è contenuto. Avendo inscritto e circoscritto al circolo un poligono di 96 lati, fece conoscere che la circonferenza essendo più piccola del perimetro del poligono circoscritto e più grande di quello del poligono inscritto, questa circonferenza doveva essere più piccola di $3\frac{10}{70}$ e più grande di $3\frac{10}{71}$, il diametro essendo preso per l'unità: l'errore prendendo $3\frac{10}{70}$, il che dà il famoso rapporto di 7 a 22, è minore di $\frac{1}{497}$ del diametro.

Lungo tempo dopo, e per rifiutare un *quadratore* del circolo il cui rapporto cadeva probabilmente nei limiti di Archimede, Adriano Mezio trovò quello di 113 a 355 che è molto più prossimo di quello di 7 a 22, poichè esso non supera il vero che di $\frac{3}{10000000}$ del diametro al più. Abbiamo già detto alla parola CIRCOLO che il raggio essendo preso per *unità*, la semi-circonferenza è espressa da 3,1415926535 .... ec., approssimazione portata fino a 155 decimali esatti, il che supera molto tutti i bisogni del calcolo, i quali nelle ricerche le più delicate, può contentarsi di 10 decimali. Possiamo dunque considerare il rapporto del raggio alla semi-circonferenza come una quantità conosciuta e ancora molto più esattamente conosciuta che altre delle quali si fa un uso giornaliero; poichè niuno si è dedicato a calcolare $\sqrt{2}$, per esempio, fino alla 155ma decimale.

Il Lambert, nelle *Memorie di Berlino*, 1761, e dopo esso, il Legendre, nei suoi *Elementi di Geometria*, hanno dimostrato che la circonferenza è incommensurabile col diametro, il che stabilisce l'impossibilità assoluta di trovare due numeri interi i quali possano esprimere il loro rapporto, numeri, del rimanente, la cui scoperta, se essa fosse possibile, non presenterebbe che un

semplice interesse di curiosità. Rimane dunque da sapere se non si potrebbe esprimere questo rapporto tanto con un numero irrazionale semplice, quanto con una combinazione di numeri irrazionali, e in quest'ultimo caso, se non sarebbe possibile di effettuarne la costruzione geometrica, poichè dei numeri irrazionali possono benissimo costruirsi geometricamente fintantochè essi non superano il secondo grado. Così, il raggio essendo l'unità, indicando, come è l'uso, con π la semi-circonferenza, si tratta di determinare la *natura* o l'espressione teorica del numero π; ma abbiamo già veduto (Circolo, n.° 45) che quest'espressione teorica primitiva è

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left\{\left(1+\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}} - \left(1-\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}}\right\},$$

dunque i radicali che entrano nella generazione di questo numero sono di un ordine *infinito*, e non può essere, per conseguenza, reso del dominio degli oggetti sensibili mediante veruna costruzione numerica o geometrica finita.

L'errore principale di quelli che si dedicano alla ricerca della quadratura del circolo, e ve ne sono ancora tanti che se ne occupano che non si potrebbe crederlo, è quello di supporre che deva necessariamente esistere una linea retta uguale in lunghezza a qualunque linea curva data, il che è tanto vero quanto supporre che esista necessariamente un numero intero ovvero frazionario uguale ad una *radice* di qualunque numero dato. Infatti, il concepimento di una linea curva riposa in principio sopra una generazione continua dello spazio, ugualmente che quello di una *radice* riposa sopra una generazione *continua* dei numeri, nel mentre che i concepimenti di una linea retta e di un numero intero riposano sopra una generazione *discontinua*. Così, e siccome all'eccezione dei casi particolari e contingenti in cui la radice generale $\sqrt[m]{A}$ è un numero intero, questa radice è un numero di una natura superiore il quale esce interamente dalla classe de' numeri interi e non può essere espressa da essi, all'eccezione di un assai piccolo numero di linee curve rettificabili (*Vedi* Rettificazione), vale a dire che sono uguali a linee rette; la linea curva in generale è di una natura superiore o trascendente la quale esce interamente dalla classe delle linee rette, e la quale non può essere rappresentata da esse. La generazione continua delle linee curve si manifesta soprattutto nelle curve rientranti in se stesse; è particolarmente nel circolo ove questa continuità indefinita di generazione è al più alto grado. Questo punto di vista, in difetto dell'espressione citata più alto di π, che decide completamente la questione, è sufficiente per provare l'inutilità di tutte le ulteriori ricerche sopra le *quadrature del circolo*, problema al giorno d'oggi risoluto in tutte le maniere possibili e sul quale non possono più esercitarsi oramai che persone interamente estranee alla geometria.

QUADRATURA (*Astron.*). Si dà questo nome ai punti dell'orbita di un pianeta che sono a egual distanza da quelli della congiunzione e della opposizione. Per esempio, la luna è nelle quadrature quando si trova in una delle due posizioni MAQZ (*Tav.* CV, *fig.* 9), egualmente lontane dalla congiunzione OE, e dalla opposizione L. *Vedi* Luna.

QUADRILATERO. (*Geom.*). Poligono di quattro lati e di quattro angoli.

Si chiama in particolare *quadrato* il *quadrilatero* i quattro lati del quale sono uguali e i quattro angoli retti; *rettangolo*, quello i quattro lati del quale sono retti, senza che i lati siano uguali; *losanga* o *rombo*, quello i cui lati sono

uguali senza che gli angoli siano retti; *parallelogrammo*, i cui lati opposti sono paralleli; e finalmente *trapesio* quello che non ha che due lati paralleli. (*Vedi* queste diverse PAROLE).

In qualunque quadrilatero la somma dei quattro angoli è uguale a quattro angoli retti. Quelli la cui somma degli angoli opposti è uguale a due angoli retti possono essere inscritti nel circolo, e la somma del rettangolo costruito tra i loro lati opposti è equivalente al rettangolo delle due diagonali.

QUADRILLIONE. (*Aritm.*). Mille *trillioni*. (*Vedi* ARITMETICA).

QUADRINOMIO. (*Alg.*). Quantità composta di quattro termini come $a+b+c+d$.

QUADRIPARTIZIONE. Divisione in quattro parti di un numero o di una figura geometrica.

QUADRO (*Prosp.*). Superficie piana sulla quale si projetta l'immagine di un oggetto. *Vedi* PROSPETTIVA.

QUANTITA'. Chiamasi così, tutto ciò che si compone di parti, e tutto quello che è capace di aumento e di diminuzione. Il *numero* è una *quantità numerica*; *l'estensione*, una *quantità geometrica*. (*Vedi* MATEMATICHE.).

QUANTITA' DI AZIONE. (*Mec.*). Chiamasi così l'azione esercitata da una forza in un intervallo determinato di tempo. Generalmente si rappresenta mediante il prodotto di un peso e di un'altezza, perchè l'effetto di una forza movente può sempre paragonarsi all'elevazione di un peso dato ad una data altezza. Abbiamo già sufficientemente esposti i principii di questa maniera di valutare la forza dei motori. (*Vedi* FORZA, ni. 14 e 15, e CAVALLO).

QUANTITA' DI MOTO (*Mec.*). Nome che si dà al prodotto della massa di un corpo per la sua velocità attuale. Questo prodotto rappresenta l'intensità della forza che agisce o muove il corpo, dimodochè la *quantità di moto* è la misura della forza motrice. Si chiama ancora *momentum*. (*Vedi* MECCANICA n.° 14).

Le questioni di Dinamica si riportano alle semplici considerazioni dell'equilibrio con l'aiuto del principio stabilito dal D'Alembert, di cui ecco l'enunciato: se si considera un sistema di punti materiali legati tra loro, in modo che m, m', m'', ec., rappresentando le loro masse, v, v', v'', ec., siano le velocità respettive che queste masse acquisterebbero, nel caso in cui esse fossero libere, mediante l'applicazione di forze determinate, nel mentre che in virtù del loro legame esse ricevono le velocità effettive u, u', u'', ec., *le quantità di moto perdute o guadagnate nel sistema debbono sempre farsi equilibrio.*

Infatti, se indichiamo con p, p', p'', ec., le velocità perdute o guadagnate dalle masse m, m', m'', ec., in conseguenza del loro legame u e p saranno le componenti di v, u', p' quella di v' ec.; possiamo dunque invece di v, v', v'', ec., sostituire le velocità

u e p componenti di v
u' e p' componenti di v'
u'' e p'' componenti di v''
ec. ec. ec.

e allora le quantità di moto che entrano nel sistema, considerato come libero, e che sono mv, $m'v'$, $m''v''$, ec., diventeranno

$$mu,\ m'u',\ m''u'',\ \text{ec.}$$
$$mp,\ m'p',\ m''p'',\ \text{ec.}$$

Ma poichè, mediante l'ipotesi, quando le masse m, m', m'', ec., non sono più libere, queste quantità di moto debbono ridursi a

$$mu,\ m'u',\ m''u'',\ \text{ec.}$$

ne resulta che le quantità di moto mp, $m'p'$, $m''p''$, ec., debbono allora farsi equilibrio. Ora, mp, $m'p'$, $m''p''$, ec., sono le quantità di moto perdute e guadagnate.

Poichè la forza mv è la resultante delle due forze mu ed mp, e che in generale vi è sempre equilibrio tra tre forze di cui l'una fosse uguale e direttamente opposta alla resultante delle due altre, le tre forze mu, mp e $-mv$ debbono essere in equilibrio. Così, considerando alla sua volta mp come uguale e di un segno contrario alla resultante delle due altre forze, bisognerà che $-mp$ sia la resultante di mu e di $-mv$, ovvero, il che significa lo stesso, che mp sia la resultante di $-mu$ e di $+mv$. Per la medesima ragione $m'p'$ è la resultante di $-m'u'$ e di $+m'v'$; $m''p''$ quella di $-m''u''$ e di $+m''v''$, ec. Dunque tutte queste forze mp, $m'p'$, $m''p''$ ec., facendosi equilibrio, vi è ancora necessariamente equilibrio tra le forze mv, $m'v'$, $m''v''$, ec., e le forze $-mu$, $-m'u'$, $-m''u''$, ec.; vale a dire *che vi è equilibrio tra le quantità di moto* mv, $m'v'$, $m''v''$, ec., *impresse ai mobili e le quantità di moto che hanno effettivamente luogo, ciascuna di quest'ultime essendo presa in senso contrario dalla sua direzione.* Questo secondo enunciato del principio del D'Alembert ha il vantaggio di rendere l'equazioni d'equilibrio indipendenti dalle velocità perdute o guadagnate p, p', p'', ec.

Applichiamo questo principio ad alcuni problemi di Dinamica.

1. *Determinare la velocità comune che avranno dopo l'urto due corpi duri* A *ed* a *i quali si muovono nello stesso senso.*

Sia V la velocità di A, v quella di a ed x la velocità comune cercata. Dopo l'urto la velocità v diventando x, la velocità perduta da A e $V-x$, nel mentre che la velocità guadagnata da a è $x-v$. Così le quantità di moto dovute a queste velocità perdute e guadagnate dovendo farsi equilibrio, e queste quantità di moto essendo $A(V-x)$, $a(x-v)$, abbiamo

$$A(V-x)=a(x-v),$$

donde

$$x=\frac{AV+av}{A+a}.$$

(*Vedi* Urto, n.° 1).

2. *Determinare il moto di due corpi* Q *e* P (Tav. LI, fig. 1) *i quali, essendo attaccati l'uno al cilindro e l'altro alla ruota di un verricello* (Vedi questa parola) *lo tengono in equilibrio.*

I corpi Q e P, essendo sollecitati dalla gravità della quale rappresenteremo la forza con g, se essi fossero liberi, avrebbero nell'istante dt la velocità gdt; siano dunque dv e dv' le velocità effettive di questi mobili; $gdt-dv$ sarà la velocità perduta dal corpo Q e $gdt-dv'$ la velocità perduta del corpo P, così le quantità di moto perdute saranno

$$Q(gdt-dv),\quad P(gdt-dv')$$

e queste quantità debbono farsi equilibrio con l'aiuto del verricello. Ora, la condizione dell'equilibrio, in questa macchina, è che le forze siano in ragione inversa dei raggi dove esse sono applicate; indicando dunque con r il raggio del cilindro ed R quello della ruota, avremo

$$Q(gdt-dv):P(gdt-dv')::R:r,$$

donde

$$Qr(gdt-dv)=PR(gdt-dv').$$

Ma, d'altra parte, le velocità dv e dv' sono in senso contrario l'uoa dell'altra, e, dalla natura del verricello esse sono tra loro come i raggi, dimodochè si ha ancora

$$Rdv+rdv'=0.$$

Combinando quest'equazione con la precedente, si trova

$$dv=\frac{(Qr-PR)r}{Qr^2+PR^2}\cdot gdt,$$

$$dv'=\frac{(PR-Qr)R}{Qr^2+PR^2}\cdot gdt.$$

I coefficienti di gdt, nell'uno e nell'altro di questi valori, essendo delle quantità costanti, si vede che i movimenti dei corpi Q e P sono uniformemente variati e che non differiscono da quello di un corpo pesante, libero nella sua caduta, che mediante l'intensità della forza acceleratrice.

QUARTO (*Arimt.*). Quarta parte di un tutto.

QUARTO DI CIRCOLO (*Geom.*). Arco di 90° o quarta parte della circonferenza. È la misura di un angolo retto.

Quarto di circolo. È uno strumento astronomico che serve a misurare l'altezza di un'astro al di sopra dell'orizzonte (*Tav.* CCXVI).

QUARTO INGLESE (*Navig.*). Strumento di cui si faceva anticamente uso per prendere in mare l'altezza degli astri, prima che fosse inventato il *quarto di riflessione*. Se ne trova la descrizione in tutti gli antichi trattati di navigazione.

QUARTO DI RIFLESSIONE, OTTANTE (*Astron.*). È questo il più perfetto degli strumenti che fino ad ora siano stati immaginati per osservare in mare le altezze e le distanze degli astri: è dovuto ad Halley. La sua costruzione e il suo uso sono fondati sulla proprietà che hanno i raggi luminosi di riflettersi sugli specchi piani facendo un angolo di riflessione eguale a quello d'incidenza.

Se AB e CD (*Tav.* CXCVI, *fig.* 3) sono due specchi piani, e se un raggio di luce giunto secondo la direzione OE incontra la superficie dello specchio AB, si rifletterà in E in modo che la nuova sua direzione sarà EF. Giunto in F sulla superficie dello specchio CD, si rifletterà nuovamente secondo FS, e giungerà all'occhio posto nella direzione di questa retta, dopo aver formato l'angolo SFC egoale all'angolo EFD, e l'angolo AEF eguale all'angolo BEO. Immaginiamo ora che si faccia girare lo specchio CD intorno al punto F di una quantità angolare qualunque CFC': è evidente che l'angolo d'incidenza del raggio EF divenendo più piccolo, l'angolo di riflessione diverrà egualmente più piccolo, e per conseguenza il raggio reflesso non sarà più FS ma FS', che fa con FS un angolo SFS' doppio di quello che fa la direzione attoale dello specchio colla sua direzione primitiva, vale a dire doppio dell'angolo C'FC. Infatti, l'angolo EFS compreso tra il raggio incidente EF e il raggio reflesso FS, vale due angoli retti meno la somma dell'angolo d'incidenza e dell'angolo di riflessione o meno il doppio dell'angolo d'incidenza; dunque, se in forza del movimento dello specchio l'angolo d'incidenza diminuisce o aumenta di una certa quantità, l'angolo compreso tra il raggio incidente e il reflesso aumenterà al contrario o diminuirà del doppio di questa quantità. Così, se si suppone che un occhio posto in O sulla retta OE veda l'oggetto S per mezzo di due specchi AB e CD, in virtù delle due riflessioni che il raggio SF prova in F e in E, non potrà vedere lo stesso oggetto giunto in S' che nel caso che, conservando allo specchio AB la stessa situazione, si faccia girare lo specchio CD di una quantità CFC' metà dell'angolo S'FS compreso tra le due posizioni dell'oggetto. Su questi principj è costruito l'ottante.

La figura 4 della tavola CXCVI rappresenta questo strumento. BAC è un mezzo quarto di circolo del quale l'arco BC è diviso in 90 parti. Nel centro A, e perpendicolarmente al piano dello strumento, è posto uno specchio piano fissato all'alidada AD, e mobile insieme con essa intorno al centro. A qualche distanza da A è collocato perpendicolarmente e in modo fisso sul lato AB un piccolo specchio piano di vetro, del quale non vi è che una sola parte che sia ridotta a specchio, cioè la parte inferiore: l'altra parte è trasparente e serve a vedere direttamente l'orizzonte, al quale si dirigono i raggi visuali o per mezzo di un traguardo o per mezzo di un piccolo canocchiale che si pone sul lato AC, in modo che il suo asse corrisponda sullo specchio nel mezzo della linea orizzontale che separa lo specchio dalla parte trasparente del vetro. La posizione dello specchio K e quella dello specchio A debbono esser tali che quando l'alidada AD cadrà sul raggio AC che nel punto zero della graduazione dell'arco BCA, A deve esser parallelo a K.

Per prendere l'altezza di un astro con questo strumento, bisogna tenerlo verticalmente e mirare per mezzo del canocchiale al termine dell'orizzonte, quindi far discendere l'alidada da C verso B fino a che si veda giungere l'immagine dell'astro sulla parte riflettente dello specchio K e situarsi nella medesima linea dell'orizzonte veduto dalla parte trasparente: allora l'angolo CAD percorso dall'alidada, e per conseguenza dallo specchio D, è precisamente la metà dell'angolo di altezza HAS; e siccome l'arco BC di 45° è diviso in 90 parti, che sono per conseguenza ognuna di un mezzo grado, ne segue che si ha immediatamente il numero dei gradi dell'altezza HAS per mezzo di quello dei mezzi gradi di CD.

Questo strumento è stato molto perfezionato dopo Halley.

QUARTO DI RIDUZIONE (*Navig.*). Quadrato di metallo o di cartone diviso in parecchi piccoli quadrati da linee parallele a due a due ai suoi lati contigui uno dei quali rappresenta la linea *nord-sud*, e l'altro la linea *est-ovest*. Vi sono inoltre degli archi di circolo descritti dal vertice dell'angolo preso come centro con raggi che formano dei rombi di vento; un filo fermato allo stesso centro può portarsi a piacere sui gradi intermedi compresi fra due direzioni consecutive dei rombi di vento. Per mezzo di questo strumento si risparmia la fatica di descrivere o di calcolare i triangoli di cui si ha bisogno per risolvere i problemi di navigazione (*Tav.* CCXVIII).

QUINDECAGONO. (*Geom.*). Poligono di quindici lati e di quindici angoli (*Vedi* Poligono.)

L'angolo al centro di un *quindecagono* regolare essendo di 24 gradi, possiamo inscrivere questa figura in un circolo portando il lato dell'esagono e quello del decagono nel circolo, in modo che essi siano delle corde che partano da uno stesso punto della circonferenza, poichè la differenza dell'arco dell'esagono a quella del decagono è esattamente un arco di 24°.

QUINTALE. (*Sist. di Mis.*) Peso di cento libbre, nell'antico sistema delle misure francesi. Al giorno d'oggi il quintale metrico vale cento chilogrammi.

QUINTILE (*Astron.*). L'aspetto *quintile* è la posizione di due pianeti distanti l'uno dall'altro di 72°, ossia di un quinto di un circolo massimo della sfera celeste *Vedi* Aspetto.

QUINTUPLO (*Aritm.*). Dicesi di una quantità cinque volte più grande di un'altra. Così 30 è *quintuplo* di 6.

QUOZIENTE (*Aritm.*) Resultamento della divisione di un numero per un altro. (*Vedi* Divisione).

R

RADIALE. (*Geom.*). Curve Radiali. Alcuni autori indicano sotto questo nome le curve le cui ordinate partono da un solo punto, come la *spirale* (*Vedi* questa parola); mediante la trasformazione delle coordinate rettangolari o oblique in coordinate *polari*, (*vedi* questa parola), tutte le curve potrebbero considerarsi come *curve radiali.*

RADICALE (*Alg.*). Si dà il nome di *radicale* al segno $\sqrt{}$ col quale s'indicano le *radici* delle quantità, e per conseguenza si chiamano *quantità radicali*, quelle che sono affette da questo segno. Così $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{\left(a^2+b^2\right)}$ ec., sono quantità radicali. (*Vedi* Radice e Estrazione).

RADICE (*Alg.*). Base di una potenza, ovvero numero che successivamente moltiplicato per se stesso produce una potenza. Se A, per esempio, moltiplicato per se stesso un dato numero di volte produce B, A sarà la *radice* di B, e particolarmente la *radice seconda* nel caso di $A\times A=B$; la *radice terza* nel caso di $A\times A\times A=B$, e in generale la *radice* m^{sima} nel caso di $A^m=B$.

S' indica una *radice* col segno $\sqrt{}$ che si chiama un *radicale*, mettendo nella sua parte superiore il numero che indica il grado della radice e che si chiama l' *esponente*; per esempio $\sqrt[3]{B}$ indica la *radice terza* di B. Quando si tratta di *radici seconde* o *quadrate*, non si scrive l' esponente che è sottinteso, dimodochè $\sqrt{B}$ significa *radice quadrata* di B.

L' operazione mediante la quale si trova la *radice* di una quantità proposta si chiama *estrazione delle radici* (*Vedi* questa parola. *Vedi* ancora, per la natura delle *radici* in generale, Algebra, n.° 28. e Immaginario).

Radici dell' equazioni. Si dà ancora il nome di *radici* ai valori delle quantità incognite che entrano nell' equazioni. Per esempio l' equazione

$$x^2-5x+6=0$$

ammettendo i valori $x=2$ e $x=3$, 2 e 3 sono le sue *radici.*

Abbiamo veduto (Equazione, n.° 18) che un' equazione ammette tante radici differenti quante unità vi sono nel numero che indica il suo grado.

Si dividono le radici dell' equazioni in due classi, quella delle *radici reali* e quella delle *radici immaginarie*. Le radici reali sono *commensurabili* o *incommensurabili*; nel primo caso, possiamo ottenere i loro valori col *metodo* detto

delle radici commensurabili; nel secondo caso, bisogna ricorrere ai *metodi d'approssimazione*, salvo i casi assai poco numerosi dove è possibile di avere direttamente l'espressione teorica delle radici.

Indicheremo i diversi processi con l'aiuto dei quali si trovano i valori delle radici di un'equazione.

1. Radici commensurabili. In qualunque equazione ad una sola incognita, il termine assoluto, vale a dire quello che non contiene l'incognita, essendo uguale al prodotto di tutte le radici (*Vedi* Equazione, n.° 17), è esattamente divisibile per ciascuna di queste radici. Così, quando una o più di queste radici sono numeri interi, si potranno sempre ottenere i loro valori cercando, tra tutti i divisori esatti del termine assoluto, quelli che soddisfanno all'equazione. Nell'equazione di sopra

$$x^2-5x+6=0$$

il termine assoluto 6 ha per divisori 1, 2, 3, 6, ed è facile vedere, sostituendo successivamente ciascuno di questi numeri in luogo di x, tanto col segno $+$ quanto col segno $-$, che i due divisori $+2$ e $+3$ sono le radici di quest'equazione.

Allorquando il termine assoluto contiene un grandissimo numero di divisori, queste sostituzioni portano a calcoli prolissi che si abbreviano, prima di tutto non tentando che quei divisori che si trovano compresi tra i limiti delle radici, e quindi facendo uso, in luogo delle successive sostituzioni, di un processo di cui faremo conoscere i principii.

2. Si abbia l'equazione generale

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+Px^3+Qx^2+Rx+S=0,$$

a essendo un numero intero positivo o negativo, se esso è una radice di quest'equazione, sostituendolo in luogo di x, si deve avere

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0.$$

Donde, dividendo tutto per a e trasportando

$$\frac{S}{a}=-a^{m-1}-Aa^{m-2}-Ba^{m-3}-\text{ec.}\ldots\ldots-Pa^2-Qa-R.$$

Trasportando R nel primo membro, e dividendo nuovamente il tutto per a, viene

$$\frac{\frac{S}{a}+R}{a}=-a^{m-2}-Aa^{m-3}-Ba^{m-4}-\text{ec.}\ldots-Pa-Q;$$

e siccome il secondo membro è necessariamente un numero intero, il primo lo è ancora. Trasportando Q nel primo membro e dividendo ancora il tutto per a, avremo

$$\frac{\frac{\frac{S}{a}+R}{a}+Q}{a}=-a^{m-3}-Aa^{m-4}-Ba^{m-5}-\text{ec.}\ldots\ldots-P$$

e il primo membro sarà ancora un numero intero. Continuando nella stessa

maniera, vale a dire trasportando successivamente tutti i termini del secondo membro nel primo, e dividendo per a dopo ciascun trasporto, il resultamento del $(m-1)^{sima}$ divisione sarà della forma

$$\frac{U}{a} = -a - A,$$

e quello dell' m^{sima} diventerà

$$\frac{\frac{U}{a} + A}{a} = -1.$$

Quest' ultima uguaglianza c' indica l' ultima condizione alla quale bisogna che a soddisfaccia perchè essa sia radice dell' equazione.

Così osservando che tutte le divisiooi debbono potere effettuarsi esattamente, se a è uoa radice dell' equazione, possiamo concluderne questa regola generale.

3. Per conoscere se un divisore a dell' ultimo termine d' un' equazione è radice di quest' equazione, bisogna, dopo aver diviso l' ultimo termine per questo numero, aggiungere al quoziente il coefficiente di x, dividere quindi la somma per a, aggiungere al nuovo quoziente che deve essere un numero intero il coefficiente di x^2 e dividere la nuova somma per a; aggiungere ancora a quest' ultimo quoziente il coefficiente di x^3 e dividere la somma per a, ec., ec. Continuare così fino al coefficiente di x^{m-1} il quale, essendo aggiunto all' ultimo quoziente, deve produrre una somma, che divisa per a deve dare -1 per quoziente. Qualunque numero che soddisfarà a queste condizioni riunite, vale a dire che darà a ciascuna divisione un quoziente intero, sarà radice dell' equazione, e quelli che mancheranno ad una sola di queste condizioni non potranno essere radici.

4. Nell' applicazione di questo metodo bisogna osservare che quando mancano dei termini all' equazione sopra la quale si opera, è necessario di sostituirvegli dando loro per coefficiente *zero*.

5. Prendiamo per esempio l' equazione

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0.$$

I divisori di 30 essendo 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, si scriveranno sopra una stessa linea orizzontale tanto col segno + quanto col segno −, quindi al di sotto di questi divisori si scriveranno i quozienti dell' ultimo termine 30, diviso per ciascuno di essi, come segue:

$$\frac{30 + 15 + 10 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 10 - 15 - 30}{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30,\ -30,\ -15,\ -10,\ -6,\ -5,\ -3,\ -2,\ -1}.$$

In seguito si aggiungerà a ciascuno di questi quozienti il coefficiente -11 di x, il che formerà una terza linea

$$-10 - 9 - 8 - 6 - 5 - 1 + 4 + 19 - 41 - 26 - 21 - 17 - 16 - 14 - 13 - 12$$

della quale si dividerà ciascun numero per il divisore al quale esso corrisponde, queste divisioni formano questa linea di quozienti

« « « −1 −1 « +2 « « +13 +7 « « « « «,

nella quale non si scriveranno che i quozienti interi, tutti gli altri dovendo

abbandonarsi. Finalmente, si aggiungerà a questi quozienti il coefficiente —4 di x^2, il che formerà una quinta linea

« « « —5—5 « —2 « « +9+3 « « « « «

della quale si divideranno tutti i numeri per i divisori corrispondenti, nuovamente abbandonando quelli che non possano dividersi esattamente; quest' ultimi quozienti

« « « « —1 « —1 « « « —1 « « « « «

c' insegnano che le radici dell' equazione sono —3, +2 e +5.

6. Possiamo sempre tralasciare i divisori +1 e —1 nel calcolo generale, poichè la loro sostituzione in luogo di x nell' equazione riducendo il primo membro al seguito dei coefficienti, basta una semplice addizione per assicurarsi direttamente se questi due numeri sono radici dell' equazione. Nell' equazione che abbiamo presa per esempio, facendo $x=1$, viene

$$1-4-11+30=16,$$

e, facendo $x=-1$,

$$-1-4+11+30=36,$$

donde si vede immediatamente che nè l' uno nè l' altro di questi numeri soddisfà all' equazione.

7. Trattiamo ora l' equazione

$$x^4+5x^3-3x^2-35x-28=0;$$

la sostituzione di +1 e —1 invece di x dà

$$1+5-3-35-28=-57,$$
$$1-5-3+35-28=0;$$

donde si vede che —1 è una radice. Ma allora in luogo di applicare il metodo all' equazione proposta, diviene più semplice di abbassarla di un grado, per mezzo della radice conosciuta; mentre poichè $x=-1$, $x+1$ è un divisore di di quest' equazione, e operando la divisione, si avrà per quoziente l' equazione del terzo grado, la quale contiene le tre altre radici della proposta. Questo quoziente dà

$$x^3+4x^2-7x-28=0.$$

Tentando di nuovo +1 e —1, si trova

$$1+4-7-28=-30,$$
$$-1+4+7-28=-18,$$

dunque veruno di questi numeri è radice. Ora gli altri divisori di 28 essendo 2, 4, 7, 14, 28, si eseguiranno i calcoli come si vede nel seguente quadro

28,	14,	7,	4,	2,	— 2,	—4,	—7,	—14,	—28
—1,	—2,	—4,	—7,	—14,	+14,	+7,	+4,	+2,	+1
—8,	—9,	—11,	—14,	—21,	+7,	0,	—3,	—5,	—6
»,	»,	»,	»,	»,	»,	0,	»,	»,	»
»,	»,	»,	»,	»,	»,	+4,	»,	»,	»
»,	»,	»,	»,	»,	»,	—1,	»,	»,	»

Ne resulta che non esiste che una sola radice commensurabile $x=-4$. Dobbiamo fare osservare di volo che si deve considerare o come un numero il cui quoziente intero è o, qualunque sia il divisore.

Conoscendo, la radice -4, se si divide l'equazione del terzo grado per $x+4$, si otterrà l'equazione del secondo grado, la quale contiene le due altre radici della proposta; quest' equazione è

$$x^2-7=0,$$

le cui radici sono $x=+\sqrt{7}$ e $x=-\sqrt{7}$: così, le quattro radici della proposta sono

$$x=-1,\quad x=-4,\quad x=+\sqrt{7},\quad x=-\sqrt{7}$$

e quest' equazione è la stessa cosa del prodotto

$$(x+1)(x+4)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0.$$

8. Per applicare il metodo delle radici commensurabili a qualunque equazione proposta, bisogna cominciare da riportarla alla forma

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots.+Rx+S=0,$$

nella quale la più alta potenza x^m ha l'unità per coefficiente, e tutti gli altri coefficienti A, B, C, ec., sono numeri interi compresovi lo zero, poichè, sotto questa forma, le radici commensurabili dell' equazione non possono essere che numeri interi. Infatti, se esistesse una frazione $\frac{a}{b}$ che potesse esser radice di quest' equazione, sostituendola in luogo di x, si avrebbe

$$\frac{a^m}{b^m}+A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}}+\text{ec.}\ldots\ldots+R\frac{a}{b}+S=0.$$

Così, moltiplicando tutti i termini per b^{m-1} e trasportandogli nel secondo membro, all' eccezione del primo termine, si otterrebbe

$$\frac{a^m}{b}=-Aa^{m-1}-Ba^{m-2}b-\text{ec.}\ldots\ldots-Ra-S$$

e siccome $\frac{a}{b}$ è una frazione e che per conseguenza $\frac{a^m}{b}$ è ancora una frazione, il secondo membro di quest' eguaglianza dovrebbe essere ugualmente una frazione, il che è impossibile, se i coefficenti A, B, C, ec., sono numeri interi.

9. Si tratta dunque di riportare qualunque equazione, a coefficienti frazionari, alla forma in questione, il che non presenta veruna difficoltà,

Si abbia, per fissare le idee l' equazione del quarto grado

$$\frac{a}{b}x^4+\frac{c}{d}x^3+\frac{e}{f}x^2+\frac{g}{h}x+\frac{i}{k}=0.$$

Si comincerà dal dividere tutta l' equazione per il coefficiente di x^4, il che

la riporterà alla forma

$$x^4+\frac{cb}{ad}x^3+\frac{eb}{af}x^2+\frac{gb}{ah}x+\frac{bi}{ak}=0,$$

poi riducendo tutte le frazioni allo stesso denominatore, si otterrà

$$x^4+\frac{cbfhk}{adfhk}x^3+\frac{ebdhk}{adfhk}x^2+\frac{gbdfk}{adfhk}x+\frac{bidfh}{adfhk}=0,$$

ovvero semplicemente

$$x^4+\frac{p}{m}x^3+\frac{q}{m}x^2+\frac{r}{m}x+\frac{s}{m}=0\ \ldots\ldots (a).$$

Prendendo ora una nuova incognita y e facendo $x=\frac{y}{m}$, si troverà sostituendo,

$$\frac{y^4}{m^4}+\frac{p}{m}\cdot\frac{y^3}{m^3}+\frac{q}{m}\cdot\frac{y^2}{m^2}+\frac{r}{m}\cdot\frac{y}{m}+\frac{s}{m}=0,$$

poi moltiplicando il tutto per m^4

$$y^4+\frac{p\cdot m^4}{m\cdot m^3}y^3+\frac{q\cdot m^4}{m\cdot m^2}y^2+\frac{r\cdot m^4}{m\cdot m}y+\frac{sm^4}{m}=0,$$

equazione di cui tutti i coefficienti sono evidentemente numeri interi, e la quale dà, levando i fattori comuni

$$y^4+py^3+q\cdot my^2+r\cdot m^2y+sm^3=0\ \ldots\ldots (b),$$

ciascuna delle radici di quest' ultima divisa per m, darà una delle radici della proposta.

Esaminando l' equazione (a) e la sua trasformata (b) si vede, che possiamo immediatamente passare dall' una all'altra, moltiplicando il secondo termine dell' equazione (a) per il denominatore comune m, il terzo per m^2, il quarto per m^3 e il quinto per m^4; donde possiamo concludere questa regola generale.

Dopo aver fatto sparire il coefficiente del primo termine e ridotto tutti gli altri coefficienti allo stesso denominatore, si moltiplicherà ciascun termine per questo denominatore comune elevato ad una potenza, il cui esponente è il numero dei termini precedenti, poi si cangerà x *in* y, *e le radici dell' equazione in* y *divisa per il denominatore comune saranno quelle della proposta.*

11. Applichiamo questa regola all' equazione

$$3x^4-\frac{7}{2}x^3+7x^2-7x+2=0,$$

dividendo tutto per 3 e riducendo quindi allo stesso denominatore, viene

$$x^4-\frac{7}{6}x^3+\frac{14}{6}x^2-\frac{14}{6}x+\frac{4}{6}=0,$$

moltiplicando il secondo termine per 6, il terzo per 36, il quarto per 216, e il quinto per 1096, ovvero, ciò che equivale allo stesso e ciò che è più semplice, togliendo il denominator comune 6, e moltiplicando il secondo termine

per 1, il terzo per 6, il quarto per 36, e il quinto per 216, la trasformata in y sarà

$$y^4-7y^3+84y^2-504y+864=0.$$

Per trattare quest' ultima col metodo delle radici commensurabili, cominciamo dal sostituire +1 e −1, il che dà

$$1-7+84-504+864=438,$$
$$1+7+84+504+864=1460.$$

Laonde nè +1 nè −1 son radici di quest' equazione. Gli altri divisori di 864 essendo 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 72, 96, 108, 144, 216, 288, 432, 864, per evitare i calcoli inutili è necessario non tentare che quelli di questi numeri i quali non superano i limiti delle radici tanto positive quanto negative; limiti che cominceremo da insegnare a determinare.

12. Si chiama *limite superiore* delle radici positive di un' equazione qualunque numero positivo il quale supera la più grande delle radici positive di quest' equazione, come ancora si chiama *limite superiore* delle radici negative qualunque numero che supera la più grande delle radici negative. Un limite superiore è dunque capace di un' infinità di valori, e la questione si riduce a trovare il più piccolo possibile di questi valori.

Prima di tutto è evidente che qualunque numero, il quale messo in luogo di x in un' equazione, rende il suo primo termine più grande della somma di tutti gli altri, è un limite superiore delle radici positive, poichè la sua sostituzione dando per resultamento un numero positivo: e la sostituzione di qualunque altro numero più grande dando, a più forte ragione, un resultamento positivo, non può esservi alcuna radice positiva che lo superi. Ora, per trovare un numero capace di rendere il primo termine di un' equazione più grande della somma di tutti gli altri, prendiamo il caso il più sfavorevole, quello in cui tutti termini a cominciare dal secondo sono negativi, come

$$x^m-Ax^{m-1}-Bx^{m-2}-\text{ec.}\ \ldots\ldots-Qx^2-Rx-S=0,$$

e cerchiamo qual è il numero che, messo in luogo di x, può dare

$$x^m>Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ \ldots\ldots+Qx^2+Rx+S.$$

Se indichiamo con M il più grande di tutti i coefficienti, è evidente che qualunque numero sostituito ad x, che potrebbe soddisfare all' ineguaglianza

$$x^m>Mx^m+Mx^{m-2}+\text{ec.}\ \ldots\ldots Mx^2+Mx+M\ \ldots\ldots (t)$$

soddisfarebbe, a più forte ragione, all' ineguaglianza proposta: così cominciamo da occuparci di quest' ultima.

I termini del secondo membro dell' ineguaglianza (t) formano una progressione geometrica di cui M può esser considerato come il primo termine, x il rapporto ad m il numero dei termini; si ha dunque, per la loro somma (*Vedi* Prog. geom., n.° 7), l' espressione

$$\frac{M(x^m-1)}{x-1},$$

e per conseguenza l' ineguaglianza (t) può mettersi sotto la forma

$$x^m>M.\frac{x^m-1}{x-1}.$$

Se facciamo $x = M$, il primo membro diventa M^m ed il secondo

$$M . \frac{M^m - 1}{M - 1}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{M^{m+1} - M}{M - 1},$$

quantità più grande di M^m, poichè effettuando la divisione, si trova

$$\frac{M^{m+1} - M}{M - 1} = M^m + M^{m-1} + M^{m-2} + \text{ec.} \ldots .$$

Ma facendo $x = M + 1$, questo secondo membro diventa

$$\frac{M . (M+1)^m - 1}{M + 1 - 1} = (M + 1)^m - 1 \quad .$$

e siccome il primo è in questo caso $(M + 1)^m$, si ha evidentemente

$$(M + 1)^m > (M + 1)^m - 1.$$

Così, $M+1$, o il più gran coefficiente negativo aumentato dell' unità, sostituito in luogo di x, rende il primo termine dell' equazione più grande della somma di tutti gli altri; *questo più gran coefficiente così aumentato è dunque un limite superiore delle radici positive dell' equazione.*

13. Siccome è raro che un' equazione non contenga alcuni termini positivi oltre il primo, il limite che abbiamo trovato è ordinariamente troppo grande, e si deve cercare di diminuirlo il più possibile. Sia

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} \ldots . - Mx^{m-n} - Nx^{m-n-1}$$
$$- \text{ec.} \ldots . - Qx - S = o$$

un' equazione i cui primi termini sono positivi, e di cui il primo termine dei negativi Mx^{m-n} è quello del posto $n+1$; supponiamo che tutti gli altri termini siano negativi, e di più che essi abbiano tutti il più gran coefficiente M, allora qualunque numero che messo per x renderà

$$x^m > Mx^{m-n} + Mx^{m-n-1} + \text{ec.} \ldots . + Mx + M$$

renderà a più forte ragione x^m più grande della somma di tutti gli altri termini della proposta. Possiamo dare a quest' ineguaglianza la forma

$$x^m > M . \frac{x^{m-n+1} - 1}{x - 1}$$

prendendo la somma dei termini del secondo membro.
Ora, ponendo

$$x^n = M, \quad \text{donde} \quad x = \sqrt[n]{M} = M'$$

M', sostituito in luogo di x non può soddisfare all' ineguaglianza, ma $M'+1$ vi soddisfa, poichè il primo membro diventa $\left(M'+1\right)^m$ ovvero $\left(\sqrt[n]{M} + 1\right)^m$, nel mentre che il secondo diventa

$$M \frac{(M'+1)^{m-n+1} - 1}{M'+1-1} = M'^{n-1} \left[\left(M'+1 \right)^{m-n+1} - 1 \right]$$

il che può mettersi sotto la forma

$$\left(\frac{M'}{M'+1}\right)^{n-1}\left(M'+1\right)^{m}-M'^{n-1},$$

quantità evidentemente più piccola di $(M'+1)^m$.

Dunque $\sqrt[n]{M}+1$, *vale a dire la radice del più gran coefficiente negativo, del grado indicato dal numero dei termini che precedono il primo termine negativo, è, aumentandola dell' unità, un limite superiore delle radici positive dell' equazione.*

Quando il secondo termine dell' equazione è negativo, bisogna fare $n=1$, e si ricade sul limite ottenuto precedentemente. Si prende sempre per $\sqrt[n]{M}$ il numero intero più prossimo alla radice.

14. Quanto ai limiti superiori delle radici negative, siccome si rendono negative le radici positive di un' equazione e *vice versa*, sostituendoci $-x$ in luogo di x, bisogna, dopo aver fatto questa sostituzione in qualunque equazione proposta, determinare, con i metodi che abbiamo esposti, il limite superiore delle radici positive della trasformata; questo limite preso col segno — sarà un limite delle radici negative della proposta.

15. Applichiamo questa teoria all' equazione del n.° 11

$$y^4-7y^3+84y^2-504y+864=0.$$

Il secondo termine essendo negativo, il limite superiore delle radici positive è il più gran coefficiente negativo 504 aumentato dell' unità, dimodochè siamo forzati in questo caso di tentare tutti i divisori più piccoli di 505, vale a dire tutti i divisori di 864 meno un solo, 864 esso stesso. Sostituendo $-y$ ad y, la proposta diventa

$$y^4+7y^3+84y^2+504y+864=0,$$

equazione che non ha alcun termine negativo, e della quale per conseguenza il limite delle radici positive è zero, poichè sostituendoci zero o qualunque altro numero più grande in luogo di y, si ottiene sempre un resultamento positivo, il che indica che non vi sono radici positive, e per conseguenza che la proposta non ha radici negative. Mediante la regola di Cartesio (*Vedi* SEGNO), l' ispezione sola della variazione dei segni $+1$ e -1 nei termini della proposta basterebbe per far conoscere la mancanza delle radici negative. Queste considerazioni riducono a 20 il numero dei divisori che bisogna tentare, ma questo numero è ancora assai grande per far desiderare un processo d' esclusione con l' aiuto del quale si possa diminuirlo. Eccone uno semplicissimo che si deve al Newton.

Sostituite successivamente $+1$ e -1 in luogo di x nella proposta, il che vi darà due resultamenti. Noi gl' indicheremo, il primo con P e il secondo con Q.

Qualunque divisore che, diminuto dell' unità, non divide P *e che, aumentato dell' unità, non divide* Q, *non può essere radice dell' equazione.*

Se l' inversa di questa proposizione fosse vera, vale a dire se qualunque divisore che soddisfà a queste condizioni fosse con ciò solo una radice, si avrebbe un processo altrettanto pronto quanto semplice per riconoscere le radici com-

mensurabili; ma non è così, e tutto ciò che si può domandare a questa regola, è di far conoscere i divisori che non possono essere radici; bisogna quindi sottoporre gli altri al metodo indicato.

Questa regola è fondata sopra ciò che a, essendo una radice dell'equazione generale

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+Rx+S=o,$$

il suo primo membro è esattemente divisibile per $x-a$, il che dà l'identità

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+Rx+S$$
$$=(x-a)(x^{m-1}+A'x^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+S'),$$

A', B', ec., essendo numeri interi. Ora, siccome questa identità è indipendente da qualunque valore particolare di x, se ci facciamo $x=1$, dobbiamo ancora avere

$$1+A+B+\text{ec.}\ldots+R+S=(1-a)(1+A'+\text{ec.}\ldots\ldots+S')$$

donde

$$\frac{1+A+B+\text{ec.}\ldots+R+S}{1-a}=1+A'+\text{ec.}\ldots+S'.$$

Così, poichè il secondo membro di quest'uguaglianza è un numero intero, dev'essere altrettanto del primo, e $1+A+B+\text{ec.}\ldots\ldots+R+S$ dev'essere esattamente divisibile per $1-a$ o per $a-1$, cangiando i segni.

Sostituendo -1 in luogo di x, si vedrebbe ugualmente che il resultamento è esattamente divisibile per $-1-a$, o per $a+1$; donde resulta la precedente regola.

16. Abbiemo veduto (n.° 11) che le sostituzione di $+1$ nell'equazione che ci occupa dà per resultamento 438, e che quella di -1 dà 1460, il primo essendo il più piccolo, cominceremo dal servircene e lo divideremo successivamente per $2-1$, $3-1$, $4-1$, $6-1$, ec. .... fino a $216-1$ solamente, poichè è evidente che gli altri divisori di 864, cioè, 288 e 432, si trovano del tutto naturalmente esclusi. Eseguando queste divisioni, si trova che i soli numeri $2-1$, $3-1$ e $4-1$ dividono esattamente 438; così tutti i divisori diversi da 2, 3 e 4 si trovano già esclusi: ma quelli che ci restano debbono ancora, aumentandogli dell'unità, dividere esattamente 1460; eseguendo dunque queste divisioni e rigettando i numeri che non danno quozienti esatti, non ci rimane definitivamente che i fettori 3 e 4 ai quali bisogna applicare il metodo indicato n.° 3. Ecco il calcolo:

+ 3,	+ 4
+ 288,	+ 216
− 216,	− 288
− 72,	− 72
+ 12,	+ 12
+ 4,	+ 3
− 3,	− 4
− 1,	− 1

3 e 4 sono dunque tutti due radici dell'equazione in y, e siccome

$$x=\frac{y}{6},\quad \frac{3}{6}\quad \text{e}\quad \frac{4}{6}$$

sono due radici dell'equazione proposta in x.

Per ottenere le altre radici, dividiamo l'equazione in y per $y-3$, e quindi per $y-4$, ovvero immediatamente per

$$(y-3)(y-4)=y^2-7y+12;$$

si ottiene l'equazione

$$y^2+72=0,$$

la quale somministra le due radici immaginarie

$$y=+\sqrt{-72},\quad y=-\sqrt{-72}.$$

Le quattro radici della proposta in x sono dunque definitivamente

$$x=\frac{1}{2},\quad x=\frac{2}{3},\quad x=+\sqrt{-2},\quad x=-\sqrt{-2}.$$

17. Possiamo immediatamente applicare i metodi precedenti all'equazioni della forma

$$Px^m+Qx^{m-1}+Rx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+Ux+V=0$$

quando P, Q, R, ec. sono numeri interi, senza aver bisogno di far sparire il coefficiente P del primo termine Px^m; bisogna solamente osservare che nell'operazione sopra i divisori di V, l'ultimo resultamento il quale indica che un divisore è radice, dev' essere $-P$ in luogo di -1. Infatti, riprendiamo le trasformazioni del n.° 4, effettuandole per meglio fissare le idee sopra l'equazione del quarto grado,

$$Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0,$$

a essendo una radice intera di quest' equazione, abbiamo

$$T=-Pa^4-Qa^3-Ra^2-Sa=0;$$

così dividendo successivamente per a e facendo passare nel primo membro dopo ciascuna divisione il coefficiente che diventa isolato, avremo il seguito d'operazioni

$$\frac{T}{a}=-Pa^3-Qa^2-Ra-S,$$

$$\frac{\frac{T}{a}+S}{a}=-Pa^2-Qa-R,$$

$$\frac{\frac{\frac{T}{a}+S}{a}+R}{a}=-Pa-Q,$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{T}{a}+S}{a}+R}{a}+Q}{a}=-P.$$

18. Prendiamo per esempio l' equazione

$$12x^4 - 68x^3 + 97x^2 + 7x - 30 = 0,$$

il cui ultimo termine 30 ha per divisori 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. La sostituzione di $+1$ e di -1 comincia dal dare

$$12 - 68 + 97 + 7 - 30 = 18,$$
$$12 + 68 + 97 - 7 - 30 = 140,$$

quindi, applicando la regola del n.° 15, si trova che i fattori da tentare si riducono a $+3$, -2. Ecco il calcolo:

+ 3,	− 2
− 10,	+ 15
− 3,	+ 22
− 1,	− 11
+ 96,	+ 86
+ 32,	− 43
− 36,	− 111
− 12,	«

l' equazione proposta non ha dunque che una sola radice intera che è $+3$. Dividendola per $x-3$, si ottiene l' equazione

$$12x^3 - 32x^2 + x + 10 = 0,$$

la quale contiene le tre altre radici della proposta.

Quest' ultima potendo ancora contenere delle radici commensurabili, non più intere, ma frazionarie, faremo sparire il coefficiente 12 ponendo $x = \frac{y}{12}$, e si otterrà una trasformata in y,

$$y^3 - 32y^2 + 12y + 1440 = 0,$$

la quale, essendo trattata come sopra, somministrerà le radici

$$y = 8, \quad y = 30 \quad \text{o} \quad y = -6,$$

donde concluderemo che le radici della proposta sono,

$$3, \ \frac{8}{12}, \ \frac{30}{12} \ \text{a} \ -\frac{6}{12} \quad \text{ovvero} \quad 3, \frac{2}{3}, \frac{5}{2} \ \text{e} \ -\frac{1}{2}.$$

19. Se un' equazione proposta contenesse delle radici intere uguali, i metodi che abbiamo esposti non farebbero trovare che una sola di queste radici, e non è che abbassando il grado dell' equazione con la divisione, quando questa radice fosse conosciuta, che si potrebbe, operando di nuovo sopra l' equazione ridotta, trovare un' altra di queste radici uguali, e così di seguito. Si abbia per esempio, l' equazione

$$x^5 - 7x^4 + 13x^3 + 10x^2 - 52x + 40 = 0.$$

I fattori di 40 sono 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 e 40. La sostituzione di $+1$ e di -1 dà

$$1-7+13+10-52+40=5,$$
$$-1-7-13+10+52+40=81,$$

quindi applicando la solita regola del n.° 15, si trova che i fattori da tentare si riducono al solo $+2$, il quale infatti è radice dell' equazione proposta.

Dividendo l' equazione proposta per $x-2$, viene

$$x^4-5x^3+3x^2+16x-20=0,$$

equazione che sommistra ancora, mediante l' applicazione dei medesimi processi una radice $x=2$. Dividendo di nuovo per $x-2$, si trova

$$x^3-3x^2-3x+10=0,$$

la quale somministra ogualmente una radice $x=2$. Finalmente, una terza divisione per $x-2$ dà l' equazione

$$x^2-x-5=0.$$

la quale non ha più radici commensurabili. Risolvendola col metedo del secondo grado (*Vedi* Quadratico), si ottengono finalmente le 5 radici della proposta, e si vede che quest' equazione è identica con

$$(x-2)(x-2)(x-2)\frac{1}{4}\left(2x-1+\sqrt{21}\right)\left(2x-1-\sqrt{21}\right)=0.$$

Le radici uguali commensurabili si ottengono sempre senza difficoltà operando come l' abbiamo fatto; ma non è così delle radici uguali incommensurabili, la cui presenza in un' equazione complica le difficoltà della ricerca dell' altre radici incommensurabili. Indicheremo, in generale, la teoria delle radici uguali.

20. Radici uguali. Se indichiamo con $X=0$, un' equazione di un grado qualunque e che a sia una delle sue radici, sappiamo che X dev' essere esattamente divisibile per il binomio $x-a$. Di più indicando con X' il quoziente di questa divisione, sappiamo ancora che se la radice a s' incontra due volte nell' equazione $X=0$, $x-a$ dovrà dividere esattamente X', che indicando il quoziente di quest' ultima divisione con X'', X'' sarà esattamente divisibile per $x-a$, se a è tre volte radice in $X=0$, e così di seguito.

Così, nel caso di una radice *doppia*, le due equazioni

$$X=0,\quad X'=0$$

debbono sussistere nello stesso tempo, vale a dire esser soddisfatte da uno stesso valore di x, nel mentre che se X non ha un fattore doppio, è impossibile di avere nel medesimo tempo $X=0$ e $X'=0$. Ugualmente, se X ha un fattore triplo, le tre equazioni

$$X=0,\quad X'=0,\quad X''=0$$

debbono sussistere nello stesso tempo.

Premesso ciò, esaminiamo la forma del quoziente X', che si ottiene dividendo X pel binomio $x-a$, e per eseguir ciò, poniamo

$$X=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+Qx^2+Rx+S.$$

Eseguendo la divisione fino a tanto che si trovi un resto che non contenga più x, questo resto che è

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \text{ec.} \ldots\ldots Qa^2 + Ra + S,$$

ovvero ciò che diventa X quando ci si metta a in luogo di x, si riduce evidentemente a zero quando a è radice di X; ma non dobbiamo considerare in questo caso che il quoziente i cui termini sono:

$$\begin{array}{r} x^{m-1} \\ +(A+a)x^{m-2} \\ +(B+Aa+a^2)x^{m-3} \\ +(C+Ba+Aa^2+a^3)x^{m-4} \\ +(D+Ca+Ba^2+Aa^3+a^4)x^{m-5} \\ +\text{ ec. } \ldots\ldots \text{ ec.} \end{array}$$

Ora, se a è una radice almeno *doppia* dell' equazione proposta, bisogna che questo quoziente sia esso stesso divisibile per $x-a$, e che si riduca a zero, mettendo a in luogo di x, o x in luogo di a.

La sostituzione di x in luogo di a dà a questo quoziente la forma

$$\begin{array}{l} x^{m-1} \\ +x^{m-1}+Ax^{m-2} \\ +x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3} \\ +x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+Cx^{m-4} \\ +\text{ec. } +\text{ec.} \\ +x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+Cx^{m-4}+\text{ ec. } \ldots\ldots +Qx+R. \end{array}$$

e, siccome il numero dei termini del quoziente è m, questo quoziente è la stessa cosa che

$$mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\text{ ec. } \ldots\ldots +2Qx+R.$$

21. Si vede facilmente che questa funzione è ciò che diventa la funzione proposta X, quando dopo aver moltiplicato ciascuno dei suoi termini per l' esponente, della potenza x che esso contiene, si divide per x. Così, indicando ancora con X′ il quoziente della divisione di X per $x-a$, dopo che si è sostituito x in luogo di a, si otterrà direttamente X′, senza aver bisogno di ricorrere alla divisione, derivando i suoi termini dai termini di X come l'abbiamo detto. Per esempio, se X fosse

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s$$

X′ sarebbe

$$4x^3+3px^2+2qx+r.$$

Bisogna osservare che il termine assoluto s è il coefficiente di x^0, e che moltiplicando per o questo termine sparisce, dimodochè la regola di derivazione è generale.

22. Indichiamo ora con n il numero, e con N il prodotto dei fattori semplici e ineguali che può contenere la funzione X; per o il numero e per O il prodotto

dei suoi fattori *doppi*; con p il numero e con P il prodotto dei suoi fattori *tripli*, e così degli altri. In questo modo la funzione X sarà identica al prodotto $N \,.\, O^2 \,.\, P^3 \,.\, Q^4$. ec.

Siccome la derivata X' è ciò che diventa il quoziente della divisione di X pel fattore semplice $x-a$, dopo che ci si è messo x in luogo di a, è evidente che la funzione X, passando allo stato X', perde tutti i suoi fattori semplici, e che i suoi fattori doppi non si trovano più in X' che come fattori semplici, i suoi fattori tripli come fattori doppi, e così di seguito.

La funzione derivata X' è dunque uguale al prodotto $O \,.\, P^2 \,.\, Q^3 \,.\, R^4$. ec., moltiplicato per qualunque funzione razionale di x, che indicheremo con X_1, e i cui fattori uguali o ineguali saranno differenti da tutti quelli della funzione X.

Il più gran fattore comune tra

$$X = N \,.\, O^2 \,.\, P^3 \,.\, Q^4 \,.\, R^5 \text{ ec.}$$

e

$$X' = X_1 \,.\, O \,.\, P^2 \,.\, Q^3 \,.\, \text{ec.},$$

ovvero il più gran divisore tra X ed X' non può dunque essere che

$$O \,.\, P^2 \,.\, Q^3 \,.\, R^4 \,.\, \text{ec.}$$

Così, indicando con Y questo più gran comun divisore, che si ottiene con i processi indicati alla parola Comun Divisore, si avrà

$$Y = O \,.\, P^2 \,.\, Q^3 \,.\, R^4 \,.\, \text{ec.}$$

23. Y' indicando la derivata di Y, come X' quella di X, questa derivata sarà, per la medesima ragione $P \,.\, Q^2 \,.\, R^3$. ec. moltiplicata per qualche altra funzione razionale di Y, che indicheremo con Y_1, e i cui fattori saranno differenti da tutti quelli di Y. Così avendo

$$Y = O \,.\, P^2 \,.\, Q^3 \,.\, R^4 \,.\, \text{ec.},$$
$$Y' = Y_1 \,.\, P \,.\, Q^2 \,.\, R^3 \,.\, \text{ec.},$$

queste due funzioni non potranno avere alcun divisore comune più grande di $P \,.\, Q^2 \,.\, R^3 \,.\, S^4$. ec., e se s' indica con Z quest' più gran comun divisore, si avrà

$$Z = P \,.\, Q^2 \,.\, R^3 \,.\, S^4 \,.\, \text{ec.},$$

la cui derivata sarà

$$Z' = Z_1 \,.\, Q \,.\, R^2 \,.\, S^3 \,.\, \text{ec.}$$

24. Proseguendo nella stessa maniera, fino a tanto che la funzione derivata non sarà ridotta all' unità, avremo le seguenti uguaglianze:

$$N \,.\, O^2 \,.\, P^3 \,.\, Q^4 \,.\, R^5 \,.\, \text{ec.} = X,$$
$$O \,.\, P^2 \,.\, Q^3 \,.\, R^4 \,.\, \text{ec.} = Y,$$
$$P \,.\, Q^2 \,.\, R^3 \,.\, \text{ec.} = Z,$$
$$Q \,.\, R^2 \,.\, \text{ec.} = U,$$
$$R \,.\, \text{ec.} = V;$$

e così dell' altre.

Dividendo ciascuna di queste equazioni per quella che la segue immediatamente,

si avrà

$$N \,.\, O \,.\, P \,.\, Q \,.\, R \,.\, ec. = \frac{X}{Y},$$

$$O \,.\, P \,.\, Q \,.\, R \,.\, ec. = \frac{Y}{Z},$$

$$P \,.\, Q \,.\, R \,.\, ec. = \frac{Z}{U},$$

$$Q \,.\, R \,.\, ec. = \frac{U}{V},$$

$$ec. = ec.$$

Finalmente, dividendo di nuovo ciascuna di quest' ultime per quella che la segue, si troverà

$$\frac{X \,.\, Z}{Y^2} = N,$$

$$\frac{Y \,.\, U}{Z^2} = O,$$

$$\frac{Z \,.\, V}{U^2} = P,$$

$$ec. = ec.,$$

equazioni con l' aiuto delle quali si ottiene, a parte, il prodotto delle radici *semplici*, quello delle radici *doppie*, quello delle radici *triple*, ec. di qualunque funzione razionale proposta.

24. Proponiamoci, per far conoscere l' applicazione di queste formule, di trovare i fattori multipli della funzione

$$X = x^9+2x^8+x^7+6x^6+7x^5-2x^4+3x^3+2x^2-12x-8.$$

La derivazione dà

$$X' = 9x^8+16x^7+7x^6+36x^5+35x^4-8x^3+9x^2+4x-12;$$

e cercando il più gran comun divisore tra X ed X', si trova

$$Y = x^4+x^3+x^2+3x+2.$$

Si ha dunque ancora,

$$Y' = 4x^3+3x^2+2x+3,$$

cercando di nuovo il più gran comun divisore tra Y e Y', si ottiene

$$Z = x+1,$$

la cui derivata è $Z' = 1$. Il più gran comun divisore tra Z e Z' è dunque $U = 1$, e l' operazione è terminata.

Sostituendo questi valori di X, Y, Z, U nelle precedenti equazioni, si trova per il prodotto dei fattori semplici della proposta,

$$N = x^2+x-2;$$

per quello dei suoi fattori doppi

$$O = x^2-x+2;$$

e per quello dei suoi fattori tripli

$$P=x+1.$$

L'equazione proposta è dunqne identica col prodotto

$$(x^2+x-2).(x^2-x+2)^2.(x+1)^3=0,$$

e riducendo N ed O nei loro fattori del primo grado, ovvero risolvendo l'equazioni

$$N=0,\quad O=0,$$

si vede che le nove radici della proposta sono:

$$x=-2,\quad x=1,\quad x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7},\quad x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7},$$

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7},\quad x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7},\quad x=-1,$$

$$x=-1,\quad x=-1.$$

25. Radici incommensurabili. Allorquando un'equazione di un grado superiore al quarto non contiene nè radici commensurabili, nè radici uguali, ovvero che dopo averla spogliata dell'une e dell'altre di queste radici, il suo grado supera ancora il quarto, non esiste alcun metodo diretto conosciuto per ottenere le sue radici, e bisogna allora aver ricorso ai metodi di approssimazione. Abbiamo fatto conoscere alla parola Approssimazione i processi con i quali si giunge alla conoscenza dei valori approssimati delle radici reali incommensurabili, processi spesso preferibili per l'equazioni del terzo e quarto grado all'espressioni teoriche delle radici, le quali spesso si complicano di quantità immaginarie (*Vedi* Caso irriducibile). Indicheremo dunque solamente in questo punto il metodo che bisogna seguire nella ricerca delle radici immaginarie. Sia sempre

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+Px^2+Qx+S=0$$

un'equazione del grado m.

Se quest'equazione contiene delle radici immaginarie, siccome la forma di qualunque quantità detta *immaginaria* (*Vedi* questa parola) è $a+b\sqrt{-1}$,

sostituiamo $a+b\sqrt{-1}$ in luogo di x, ed otterremo

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)^m+A\left(a+b\sqrt{-1}\right)^{m-1}+\text{ec.}\ldots\ldots$$

$$+Q\left(a+b\sqrt{-1}\right)+S=0.$$

Sviluppando le potenze dei binomi e indicando con M la somma dei termini reali, e con N quella dei termini ove si trova $\sqrt{-1}$, giungeremo all'uguaglianza

$$M+N\sqrt{-1}=0,$$

la quale non può evidentemente sussistere, quando non si abbia separatamente

$$M = o, \quad N = o.$$

Ma queste due equazioni di condizione contengono le indeterminate a e b, combinate con i coefficienti della proposta; così, eliminando a tra queste equazioni, otterremo un'equazione finale la quale non conterrà che b. Questa quantità essendo trovata, tanto direttamente, quanto per approssimazione, sostituendo il suo valore in M o in N, otterremo un'equazione che farà conoscere a. D'altra parte si sa che se la proposta ha una radice uguale ad $a+b\sqrt{-1}$, essa ne ha un'altra $a-b\sqrt{-1}$, (*Vedi* Equazione).

I calcoli complicati ai quali conduce la ricerca delle radici immaginarie possono rendersi più semplici mediante diversi processi, per i quali dobbiamo rimandare alla bell'opera del Lagrange, sopra l' Equazioni Numeriche.

RAGGIO (*Geom.*). Distanza del centro di un circolo alla sua circonferenza. Mediante la definizione o la generazione del circolo, tutti i suoi raggi son uguali. Un *raggio* è la metà del *diametro* (*vedi* Circolo.).

Raggio osculatore. Ciò indica il raggio del circolo che passa per tre punti infinitamente vicini di una curva qualunque. Questo circolo si chiama *circolo osculatore della curva*, e il suo raggio, *raggio di curvatura o raggio osculatore* (*vedi* Curvatura ed Evoluta). Possiamo ottenere direttamente l'espressione differenziale del *raggio osculatore* di una curva qualunque nella seguente maniera: Sia Bm questo raggio, (*Tav.* CXCVII, *fig.* 3) ed mm' un arco infinitamente piccolo, comune al circolo osculatore ed alla curva AM. Conduciamo le rette che si vedono nella figura, e dal centro B descriviamo l'arco pq' infinitamente piccolo. I triangoli $mm'n$ ed $q'pq$ saranno simili, essendo rettangoli l'uno in n e l'altro in q', ed avendo di più gli angoli uguali $mm'n$, pqq'; essi danno la proporzione.

$$mm' : mn :: pq : pq',$$

donde

$$pq = \frac{mm \times pq'}{mn},$$

ma pq è l'accrescimento che riceve Ap quando la *normale* mp diventa $m'q$, vale a dire quando l'arco Am cresce di mm', così pq è la differenziale di Ap; e siccome di più Ap è uguale all'ascissa Ap', più la sunnormale $p'p$, indicando Ap' con x ed mp' con y, abbiamo (*vedi* Sunnormale),

$$pq = d\,(x + \text{sunnormale}) = d\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right),$$

e per conseguenza

$$d\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right) = \frac{mm' \times pq'}{mn} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} . pq'$$

sostituendo l'arco mm' con la sua espressione

$$\sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)},$$

(*vedi* Rettificazione).

Ricavando il valore di pq', viene

$$pq' = \frac{dx \cdot d\left[x + \frac{ydy}{dx}\right]}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

Ora, supponendo dx costante

$$d\left[x + \frac{ydy}{dx}\right] = \frac{dx^2+dydy+yd^2y}{dx}.$$

Così, sostituendo in pq', si trova

$$pq' = \frac{dx^2+dy^2+yd^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

Ora, i triangoli simili mBm', pBq' danno

$$mm'-pq' : mm' :: mB-pB : mB$$

e, siccome $mB-pB = mp = normale$, donde (*vedi* SUSNORMALE)

$$mB-pB = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx},$$

e che di più

$$mm'-pq' = \sqrt{\left(dx^2+dy^2\right)} - \frac{dx^2+dy^2+yd^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$$

$$= \frac{-yd^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}},$$

questa proporzione ci dà

$$mB = \frac{\sqrt{\left(dx^2+dy^2\right)}\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}}{-\frac{yd^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}},$$

il che si riduce definitivamente a

$$\rho = -\frac{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} \quad \ldots\ldots (1),$$

indicando con ρ il raggio di curvatura.

Se non si fosse supposto dx costante, avremmo ottenuto

$$\rho = \frac{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x-dxd^2y}.$$

Il segno — dell' espressione (1) è relativo alla posizione di ρ che si considera come positivo quando la curva volge la sua concavità verso l' asse delle x. In-

fatti, in questo caso d^2y è negativo, e ρ diventa positivo. Quando al contrario la curva volge la sua convessità verso l'asse delle x, l'espressione (1) dev'essere affetta dal segno $+$, come l'avremmo trovata costruendo la nostra figura con queste condizioni: così l'espressioni generali del *raggio osculatore*, sono

$$\rho = \pm \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y},$$

$$\rho = \pm \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x - dxd^2y}.$$

Vedi alla parola CURVATURA le applicazioni di queste formule.

Si giunge a quest'espressioni del raggio *osculatore* in un modo più generale e più elegante mediante la teoria del contatto delle curve, ma dobbiamo rimandare ai trattati del calcolo differenziale e particolarmente a quello del Lacroix.

Per completare quanto è stato esposto sopra la curvatura delle linee e delle superficie, alla parola CURVATURA, AVOLUTA e quanto è stato detto sopra, daremo ora la deduzione della formula generale del *raggio di curvatura* delle sezioni piane di una superficie.

Sia M (*Tav.* CLXXXIX, *fig.* 6), un punto qualunque x, y, z, preso sopra una superficie rappresentata dall'equazione,

$$z = f(x,y) \;\ldots\ldots\; (2),$$

MT una tangente della superficie a questo punto ed MO la sua normale. Se s'immagina un piano che passi per le due rette MT ed MO, questo piano mediante la sua intersezione con la superficie (2) determinerà una curva AMB di cui si tratta di trovare il raggio di curvatura al punto M.

Osserviamo, per quest'effetto, che se prendiamo sopra la curva AB un punto M' infinitamente vicino ad M, la normale M'O di questo punto M' taglierà la normale MO del punto M in un punto O che sarà il centro del circolo osculatore della curva AB in M, vale a dire che MO sarà il raggio di curvatura domandato, e che basta, per conoscere la sua grandezza, determinare le coordinate x', y', z' del centro O, poichè la distanza dei due punti M(x, y, z), O(x', y', z') è data dalla formula conosciuta (*Vedi* APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA).

$$MO = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} \;\ldots\ldots\; (3).$$

Ora, il centro O è l'intersezione di tre piani, cioè del piano della curva AB e dei due piani normali consecutivi che passano per le normali consecutive MO ed M'O, ovvero semplicemente l'intersezione della normale MO col piano normale al punto M'; così i valori delle coordinate x, y, z che soddisfaranno nello stesso tempo all'equazioni della normale e all'equazione di quest'ultimo piano saranno esattamente i valori di x', y', z'.

Rappresentiamo con

$$x' = \varphi z', \quad y' = \psi z'$$

l'equazioni della curva AB, l'equazioni della sua tangente saranno (*vedi* PIANO

TANGENTE):

$$x'-x=\frac{dx}{dz}(z'-z),$$

$$y'-y=\frac{dy}{dz}(z'-z),$$

x', y', z' indicando le coordinate generali ed x, y, z, le coordinate particolari del punto M. Ma l'equazione del piano normale al punto x, y, z, essendo necessariamente della forma

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=o,$$

si ha (*Vedi* APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA)

$$\frac{A}{C}=\frac{dx}{dz},\quad \frac{B}{C}=\frac{dy}{dz},$$

poichè questo piano è perpendicolare alla tangente; la sua equazione diventa dunque

$$(x'-x)dx+(y'-y)dy+(z'-z)dz=o \ldots\ldots (4).$$

Quanto all'equazione del piano normale infinitamente vicino, o che passa pel punto M', essa si deduce assai facilmente dalla precedente, poichè basta di cangiarvi x in $x+dx$, y in $y+dy$ e z in $z+dz$, il che dà

$$\left.\begin{array}{l}(x'-x)d\,x+(y'-y)d\,y+(z'-z)d\,z\\(x'-x)d^2x+(y'-y)d^2y+(z'-z)d^2z\\\quad -dx^2-dy^2-dz^2\end{array}\right\}=o\ldots\ldots (5).$$

Abbiamo inoltre per l'equazioni della normale al punto M

$$\left.\begin{array}{l}(x'-x)+\dfrac{dz}{dx}(z'-z)=o\\[2ex](y'-y)+\dfrac{dz}{dy}(z'-z)=o\end{array}\right\}\ldots\ldots (6).$$

Ora, se consideriamo le coordinate generali x', y', z' come le medesime nell'equazioni (4), (5) e (6), esse rappresenteranno le coordinate del punto O comune ai due piani normali consecutivi (4) e (5) e alla normale (6). Ma in virtù dell'equazione (4), l'equazione (5) si riduce allora a

$$\left.\begin{array}{l}(x'-x)d^2x+(y'-y)d^2y+(z'-z)d^2z\\\quad -dx^2-dy^2-dz^2\end{array}\right\}=o\ldots\ldots\ldots (7),$$

così combinando quest'ultima con l'equazioni (6) se ne dedurrà

$$\left.\begin{array}{l}z'-z=\dfrac{du^2}{d^2z-pd^2x-qd^2y}\\[2ex]y'-y=\dfrac{-qdu^2}{d^2z-pd^2x-qd^2y}\\[2ex]x'-x=\dfrac{-pdu^2}{d^2z-pd^2x-qd^2y}\end{array}\right\}\ldots\ldots (8),$$

ponendo per abbreviare

$$\frac{dz}{dx}=p,$$

$$\frac{dz}{dy}=q,$$

$$dx^2+dy^2+dz^2=du^2.$$

Sostituendo i valori (8) nella formula (3), si otterrà dunque per la grandezza del raggio di curvatura MO, indicando questo raggio con ρ

$$\rho=\frac{du^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{d^2z-pd^2x-qd^2y} \quad . \; . \; . \; . \; (9).$$

La variabile q di quest' espressione essendo funzione delle due variabili indipendenti x ed y, ammette, nei diversi ordini, più derivate parziali che secondo l' uso s' indicano con

$$\frac{dz}{dx}=p,$$

$$\frac{dz}{dy}=q,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r,$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}=s,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=t,$$

dimodochè le sue differenziali totali del primo e del second' ordine sono:

$$dz=pdx+qdy,$$
$$d^2z=dpdx+dqdy+rdx^2+2sdxdy+tdy^2,$$

sostitnendo nell' equazione (9) d^2z col suo valore, viene

$$\rho=\frac{du^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Tale è l' espressione generale del raggio di curvatura della *sezione normale* AMB; vedremo in seguito come se ne deduce il valore del raggio di curvatura di una *sezione obliqua* (*Vedi* Sezione).

Possiamo dare all' espressione (10) un' altra forma introducendoci gli angoli α, β, γ, che fa la tangente MT con gli assi coordinati, bisogna osservare perciò, che du non è che la differenziale o l' elemento MM' della curva AB, e che

così si hanno i rapporti

$$\frac{dx}{du} = \cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{du} = \cos\beta,$$

$$\frac{dz}{du} = \cos\gamma,$$

dividendo dunque per du^2 i due termini del secondo membro dell'uguaglianza (10) e sostituendo invece dei rapporti i loro valori, si ottiene

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta} \ldots . (11),$$

nella quale gli angoli α e β son legati con una relazione particolare. Infatti le coordinate della curva AB debbono soddisfare non solamente alla condizione generale

$$dx^2+dy^2+dz^2 = du^2,$$

ma ancora all' equazione differenziale della superficie

$$dz = pdx+qdy,$$

il che dà

$$(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2 = du^2.$$

Dividendo due membri di quest' ultima equazione per du^2 e sostituendo i coseni ai rapporti delle differenziali, si trova

$$(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1 \ldots . (12),$$

vale a dire che l'angolo γ essendo arbitrario, i due altri angoli α e β non possono variare che restando sottoposti alla condizione (12).

Quando non si vuole impiegare che una sola indeterminata nell' espressione (11), si pone

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{dy}{dx} = m \ldots\ldots (13),$$

questo valore sostituito nell' equazioni (11) e (12) conduce, mediante l' eliminazione di $\cos^2\alpha$, all' espressione

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left[(1+p^2)+2pqm+(1+q^2)m^2\right]}{r+2sm+tm^2} \ldots . (14),$$

ed è quest' ultima espressione della quale abbiamo fatto uso alla parola Ombellico.

Raggio vettore. Linea retta che va dal fuoco di una curva ad un punto del suo perimetro. In *astronomia*, essa è la retta condotta dal centro di un pianeta al centro del sole, o più generalmente la retta condotta dal centro di un astro al suo centro di rivoluzione.

Raggio visuale. Linea retta seguendo la quale l'occhio si dirige guardando un oggetto attraverso dei traguardi di un' alidada ovvero attraverso di un canocchiale nell' operazioni della geometria pratica.

RAGIONE (*Alg.*). Resultamento del paragone di due quantità, tanto che si consideri l' eccesso dell' una sopra dell' altra, ovvero quante volte l' una contiene l' altra. Nel suo concepimento matematico questa parola è il sinonimo di *rapporto*. (*Vedi* RAPPORTO).

RAGIONE TRIPLA. Si chiama così il rapporto di una grandezza ad un' altra grandezza che essa contiene, o nella quale essa è contenuta tre volte; così il rapporto di 3 ad 1 è una ragione *tripla*. *Vedi* TRIPLICATO.

RALLIER DES OURMES (GIOVANNI GIUSEPPE), matematico francese, nato nel 1701 e morto nel 1771, ha scritto parecchie pregevoli memorie che si leggono nella Raccolta del dotti stranieri che fa parte della Collezione delle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi. È pure autore degli articoli dell' Enciclopedia relativi all' aritmetica.

RAMO DI CURVA (*Geom.*). Per intendere quello che significa la parola *ramo di curva*, s' immagini una curva geometrica, della quale si ha l' equazione in x ed in y, x rappresentando l' ascisse, ed y le ordinate. *Vedi* CURVA, ASCISSA, ORDINATA, ec. È evidente:

1.° Che prendendo x positivo, y avrà un dato numero di valori corrispondenti allo stesso valore di x.

2.° Che prendendo x negativo, y avrà ancora un dato numero di valori corrispondenti allo stesso x.

Ora la curva ha tanti *rami* quanti sono i valori che ha y corrispondenti alle x tanto positive quanto negative. (*Vedi* CURVA), purchè le ordinate positive si prendano dalla stessa parte dell' ascissa, e le negative dalla parte opposta.

Del rimanente, è utile osservare che i geometri, non hanno ancora ben fissato il significato della parola *ramo*. Per esempio, sia una curva che abbia per equazione.

$$y = \frac{x^2}{6x} x + \frac{5}{6} a,$$

ordinariamente si considera questa curva come se non avesse che un solo ramo, perchè y non ha che un solo valore. Ciò non ostante questo ramo alcune volte è contato per due, perchè esso si estende all' infinito dalla parte delle x positive, e dalla parte delle x negative. (Vedi, *Introduzione all' analisi delle Linee Curve* del Cramer).

Si chiama *ramo infinito* un *ramo* di curva che si estende all' infinito.

L' iperbola e la parabola hanno dei *rami infiniti*. Ma il circolo e l' ellisse non ne hanno; queste sono due curve che rientrano in sè stesse.

I *rami infiniti* di una curva sono *parabolici* o *iperbolici*.

I *rami parabolici* sono quelli che possono avere per asintoto una parabola di un grado più o meno elevato. Per esempio, la curva la cui equazione fosse

$$y = \frac{x^2}{a} + \frac{b^2}{x},$$

avrebbe un *ramo infinito parabolico*, il quale avrebbe, per asintoto una parabola ordinaria, la cui equazione sarebbe

$$y = \frac{x^2}{a}$$

Infatti x essendo infinito, l'equazione si riduce ad $y=\frac{x^2}{a}$, che è quella della parabola ordinaria. Ugualmente, se l'equazione fosse,

$$y=\frac{x^3}{a^2}+\frac{b^3}{x^2},$$

si troverebbe che il *ramo infinito* avrebbe per asintoto una parabola del terzo grado $y=\frac{x^3}{a^2}$.

I *rami iperbolici* sono quelli che hanno per asintoto, una linea retta; essi possono ancora avere, per asintoto, un'iperbola di un grado più o meno elevato. Per esempio, la curva

$$y=\frac{x^2}{a}+\frac{b^2}{x}$$

della quale abbiamo parlato, si riduce a

$$y=\frac{b^2}{x},$$

quando $x=0$; essa ha per asintoto l'ordinata infinita che passa per l'origine, ed essa può ancora avere per asintoto l'iperbola ordinaria.

Ugualmente la curva

$$y=\frac{x^3}{a^2}+\frac{b^3}{x^2},$$

ha per asintoto l'ordinata infinita, che passa pel punto in cui $x=0$; ed essa ha ancora per asintoto un'iperbola cubica.

Si troverà una teoria completissima dei *rami infiniti* delle Curve nel *capitolo* VIII *dell' introduzione all' analisi delle linee curve*, del signor Cramer. Esso dà in quest' opera il metodo per determinare i differenti *rami* di una curva, e i loro asintoti retti o curvi. Siccome questa teoria ci condurrebbe troppo in lungo, rimandiamo alla detta opera. Si trovano ancora eccellenti cose sopra questo soggetto *negli usi dell' Analisi del Descartes* del signore Abate Gua.

RAMO (*Astron.*). Costellazione boreale introdotta per riunire alcune stelle informi o sporadi vicine alla costellazione di Ercole. Il *Ramo* è situato nel mezzo dello spazio tra la Lira e il Serpentario, e vien rappresentato sulle carte sotto la figura di un ramoscello nella mano di Ercole.

RAMSDEN (Jessè), celebre ottico inglese, nato nel 1735 in Halifax nella contea di York. Dopo aver fatto in patria buoni studj elementari, si recò di ventun'anno a Londra, ove si diede all' arte dell' intaglio. Avendo allora avuto luogo di osservare l' imperfezione degli strumenti di matematica, gli nacque il desiderio di applicarsi a correggerli o ad immaginarne dei nuovi. Incominciò dal perfezionare il quarto di riflessione o sestante di Hadley. Il bisogno che aveva di una buona macchina da dividere, gliene fece immaginare una superiore a quelle che si conoscevano; e che gli fruttò una ricompensa di 15000 franchi dall' ufizio delle longitudini. Nel tempo stesso perfezionò il teodolito, che per le sue cure divenne uno strumento nuovo, atto a misurare le altezze non meno che a levare le piante. Fece non pochi miglioramenti al barometro, al pirometro,

alla macchina elettrica, ec. Costrusse una bilancia di tal sensibilità, che, carica di due libbre sopra ciascun piatto, la cinque milionesima parte di tal peso bastava per farle perdere l'equilibrio. Ma l'ottica soprattutto gli va debitrice di grandi perfezionamenti: gli si deve l'invenzione di un micrometro più esatto di quello di Bouguer: perfezionò singolarmente il cannocchiale dei passaggi, il quadrante murale, e l'equatoriale. Ramsden, che era membro della Società Reale di Londra, morì a Brighthelmstone il 5 Novembre 1800. Molte delle sue macchine si trovano descritte nelle *Transazioni filosofiche* e nei diversi trattati di astronomia.

RAMUS, in italiano RAMO (Pietro la Ramée, più conosciuto sotto il nome di), matematico, ed uno dei dotti più distinti del suo secolo, nacque verso l'anno 1502 in un villaggio del Vermandois, ove i suoi genitori caduti in bassa fortuna erano andati a nascondere la propria miseria. La vita di questo infelice martire della verità, che fu non meno celebre per le sue sventure che pei suoi talenti, presenta molte di quelle grandi lezioni che la storia non può passare sotto silenzio senza mancare al fine principale della sublime sua missione. Niuna corsa umana impiegata interamente nei lavori pacifici della scienza fu giammai travagliata da maggiori infortunii, nè terminò in modo tanto funesto. Da un lato infatti la vita di Pietro La Ramée offre un grande e nobile esempio di ciò che può una volontà ferma in una mente alta ad elevati concetti, e da un'altra parte le avversità che sempre la tormentarono ci rammentano nel modo il più energico i costumi e i pregiudizj del suo tempo: in questo doppio punto di vista esse è di un sommo interesse nella storia della scienza, e noi crediamo nostro indispensabile dovere l'accennarne le principali circostanze, quantunque già da lungo tempo i lavori di Ramo siano quasi interamente dimenticati.

La famiglia di questo dotto era nobile e di origine fiamminga, ma dalle vicende della guerra era stata ridotta alla più desolante miseria. Il giovane Pietro non potè ricevere educazione nessuna, e fino dalla sua infanzia fu obbligato a pascere il gregge. Ma nell'età di otto anni, già stimolato dal desiderio di conoscere e d'istruirsi, fuggì dalla capanna paterna e si recò a Parigi, ove nessuna pietà generosa accolse questo giovane e straordinario intelletto. Due volte gli riuscì inutile un simile tentativo. Finalmente un suo zio acconsentì a pagare alcuni mesi della sua pensione in una scuola, nella quale il fanciullo acquistò con maravigliosa celerità i primi elementi dell'istruzione. Allora Ramo tornò a Parigi, e per potere continuare i suoi studi entrò come servo nel collegio di Navarra, sacrificando così i pregiudizj della nascita e del grado al desiderio d'istruirsi. Ei seppe tanto profittare delle lezioni dei professori e del conversare cogli scolari, che in breve tempo fece grandi progressi nella cognizione delle lingue e dell'antica letteratura. L'umile servo del collegio di Navarra non tardò a deporre la sua livrea; fece successivamente il corso di umanità e di rettorica, e dopo avere assistito alle lezioni di filosofia, si presentò per ricevere il grado di maestro in belle lettere e in filosofia. Dotato di una mente esatta e di un raziocinio elevato, Ramo aveva di buon'ora compreso l'insufficienza e la frivolezza della filosofia della scuola, e nella sua tesi prese co' suoi giudici l'impegno di dimostrare che Aristotile non era infallibile. Questa novità destò un interesse generale; si accorse in folla per godere della confusione di questo giovine audace; ma il suo successo fu completo. Da quel giorno Ramo risolse di esaminare a fondo le dottrine del filosofo di Stagira e di riformare in questo rapporto gli studj scolastici. Il mezzo che gli parve il più conveniente per raggiungere questo scopo fu quello di sostituire le matematiche alle sterili discussioni della scuola, e poco dopo attaccò di fronte l'aristotelismo. Ma non era ancora venuto il momento di rompere l'antica catena sotto la quale da tanti

secoli gemeva l'umana intelligenza. Il tentative di Ramo fu considerato come un'empietà, e la sua nuova *Logica* e le sue *Osservazioni sopra Aristotile* suscitarono contro di lui nemici implacabili, e l'esposero a incredibili persecuzioni. Ramo fu obbligato a pronunziare avanti al parlamento l'apologia delle matematiche, ma Aristotile trionfò in questa strana prove, e rimase ancora per lungo tempo in possesso della cieca adorazione delle scuole. Una sentenza dichiarò Ramo *temerario, arrogante e impudente per aver riprovato e condannato il metodo ed arte di logica ricevuto da tutte le nazioni*: la stessa decisione infallibile soppresse le sue opere *come contenenti cose false e strane*, e gli proibì d'insegnare o di scrivere contro Aristotile sotto pena di punizione corporale.

Dopo quest'epoca, la vita di Ramo fu una lotta continua contro i pregiudizj e le cieche passioni della scuola. La sentenza che lo condannava fu affissa alla porta di tutti i collegj, ed egli ebbe a sopportare tutte le indegnità e tutti gli oltraggi che il fanatismo e l'ignoranza possono inspirare. Allontanato così dalla cattedra nella quale aveva cominciato a esporre i suoi principj e le sue idee, Ramo si diede allo studio delle matematiche con tutto lo zelo di cui poteva esser capace un animo forte come il suo. Fu in quel tempo ch'ei pubblicò dei nuovi elementi di aritmetica e di geometria, in un ordine differente da quello di Euclide ch'egli ebbe la disgrazia di disapprovare, dominato forse suo malgrado dalle idee che si era formato sugli antichi, compiutamente erronee su quasi ultimo particolare. Come abbiamo già detto di sopra, i lavori di Ramo in matematiche che debbono specialmente occuparci sono oggi compiutamente dimenticati e meritano di esserlo. Ma non si deve obliare che quest'uomo straordinario fu il primo a indicare il posto che queste scienze sublimi debbono occupare nell'istruzione, e che fu pure il primo ad attaccare con qualche successo, ad onta delle eventure personali che ne furono per lui la conseguenza, la tirannide dell'autorità magistrale di Aristotile, e che così preparò la strada alla gran rivoluzione intellettuale della quale il nostro gran Cartesio cominciò poi il realizzamento in tempi meno infelici.

Dopo una lunga seria di vicissitudini, Ramo tornato a Parigi fu una delle vittime della famosa strage di S. Bartolommeo. Fu trucidato nel collegio di Presles ove aveva ripreso le sue funzioni di professore di matematiche e di eloquenza. Col suo testamento, ch'egli aveva fatto nel 1568, lasciava al collegio reale una somma annua di cinquecento lire per il mantenimento di un professore di matematiche. Ramo è autore di un numero considerabile di scritti, fra i quali citeremo soltanto i seguenti: I *Proemium mathematicum*, ec. Parigi, 1567: è questa l'apologia cha pronunziò avanti al parlamento; II *Arithmeticae libri tres*, 1555: opera che non ha ottenuto l'approvazione dei matematici.

RAPPORTO (*Aritm. ed Alg.*). Relazione di due quantità ineguali. Due quantità qualunque considerate nella loro relazione reciproca elementare sono *uguali* o *ineguali* (*Vedi* MATEMATICHE); la relazione di *uguaglianza* non ha altre leggi che quelle dell'*identità*, ma la relazione di *ineguaglianza* può essere l'oggetto di una considerazione particolare, perchè essa implica *diversità*, ed è la determinazione di questa diversità che stabilisce la TEORIA DEI RAPPORTI.

Risalendo ai principii della generazione elementare delle quantità, è evidente che i differenti *rapporti* consistono nella differenza delle generazioni primitive elementari; così questi *rapporti* sono:

1.° La relazione delle quantità A e B con C, nell'algoritmo elementare della somma

$$A+B=C.$$

2.° La relaziona di queste medesima quantità nell'algoritmo della riproduzione

$$A\times B=C.$$

3.° E finalmente quella di queste quantità nell' algoritmo della graduazione

$$A^B = C.$$

L' espressioni di queste tre classi di *rapporti*, considerate in generale, sono dunque, per il *rapporto di somma*:

$$C - A = B, \quad \text{ovvero} \quad C - B = A,$$

per il *rapporto di riproduzione*

$$\frac{C}{A} = B, \quad \text{ovvero} \quad \frac{C}{B} = A$$

e per il *rapporto di graduazione*

$$\frac{\text{Log } C}{\text{Log } A} = B, \quad \text{e} \quad \sqrt[B]{C} = A;$$

ma le due relazioni delle due prime classi essendo le medesime, e la prima della terza classe essendo identica con quella della seconda, non esiste propriamente che tre relazioni d' ineguaglianze essenzialmente differenti.

Potremo dare alle tre classi di *rapporti* che possono esistere fra due numeri qualunque M ed N, legate mediante un terzo P, le forme:

1.° Rapporto di somma (chiamato *rapporto aritmetico*, o *rapporto per differenza*).

$$M\,[:]\,N, \quad \text{ovvero} \quad M - N = P.$$

2.° Rapporto di riproduzione (chiamato *rapporto geometrico*, o *rapporto per quoziente*).

$$M : N, \quad \text{ovvero} \quad \frac{M}{N} = P.$$

3.° Rapporto di graduazione (chiamato da alcuni geometri tedeschi *rapporto di salto*).

$$M\left(:\right)N, \quad \text{ovvero} \quad \sqrt[N]{M} = P.$$

I segni [:], :, (:) indicando queste tre classi di rapporti.

I due numeri paragonati insieme si chiamano i *termini* del *rapporto*. Il primo termine prende il nome particolare di *antecedente*, e il secondo termine quello di *conseguente*. Quì M è l' antecedente ed N il conseguente.

Rapporto Aritmetico. Le proprietà di questo rapporto non sono che conseguenze dirette delle leggi dell' identità e non possano dar luogo a nessune leggi particolari; ed è così, per esempio, che il *rapporto* o la *differenza* dei due numeri M ed N non cangia quando si aumentano o si diminuiscono i suoi due termini di una stessa quantità Q, poichè P indicando sempre questo rapporto, si ha evidentemente

$$(M+Q)-(N+Q) = P,$$

ed

$$(M-Q)-(N-Q) = P,$$

donde

$$M\,[:]\,N = (M+Q)\,[:]\,(N+Q) = (M-Q)\,[:]\,(N-Q).$$

È ugualmente evidente 1.° che si *aumenta* il rapporto P, di due numeri M [:] N, di una quantità Q, *aggiungendo* questa quantità all' antecedente M ovvero sottraendola dal conseguente N, poichè avendo

$$M-N=P,$$

si ha necessariamente.

$$M+Q-N=P+Q.$$
$$M-(N-Q)=P+Q.$$

2.° Che si *diminuisce* questo medesimo rapporto P della quantità Q *sottraendo* questa quantità dall' antecedente M, ovvero *aggiungendola* al conseguente N, poichè

$$(M-Q)-N=P-Q,$$
$$M-(N+Q)=P-Q.$$

Rapporto Geometrico. Questo rapporto gode mediante la sua costruzione di tutte le proprietà delle frazioni; così, mediante ciò che è stato detto, Algebra n.° 13.

1.° *Un rapporto geometrico* non cangia quando si moltiplicano o si dividono i suoi due termini per una medesima quantità.

2.° Moltiplicando l' antecedente ovvero dividendo il conseguente si *moltiplica* il rapporto.

3.° Dividendo l' antecedente ovvero moltiplicando il conseguente si *divide* il rapporto.

Infatti $M:N$ essendo la stessa cosa di $\frac{M}{N}=P$, si ha

$$1 \ldots\ldots \frac{M\times Q}{N\times Q}=P;\quad \frac{M:Q}{N:Q}=P,$$

$$2 \ldots\ldots \frac{M\times Q}{N}=P\times Q,\quad \frac{M}{N:Q}=P\times Q,$$

$$3 \ldots\ldots \frac{M:Q}{N}=\frac{P}{Q},\quad \frac{M}{N\times Q}=\frac{P}{Q}.$$

Rapporto di Salto. Non abbiamo parlato di quest' ultimo rapporto che per completare i differenti modi delle relazioni possibili tra le quantità, ma esso non è di verun uso nella scienza dei numeri.

Quando più rapporti di una medesima classe sono uguali, il loro paragone dà luogo ad un' uguaglianza che prende il nome di Proporzione. (*Vedi* Questa parola).

RATTE (Stefano Giacinto de), astronomo francese, nato a Montpellier nel 1722, si diede di buon' ora allo studio delle matematiche, nelle quali fece grandi e rapidi progressi. Fu uno dei primi a scoprire la cometa di Halley, al suo ritorno nel 1759, appena fu uscita dai raggi solari: osservò poi nel 1761 il passaggio di Venere, che servì di base agl' immensi suoi calcoli sulla parallasse del sole; e fece un numero grande di osservazioni sui passaggi di Mercurio, sugli ecclissi, sui satelliti di Giove e sulle occultazioni delle stelle. De Ratte arricchì di molte e interessanti memorie la Società Reale di Montpellier della quale era segretario perpetuo, e somministrò parecchi articoli al *Dizionario enciclopedico*. Morì il 15

Aprile 1805. Intorno a questo dotto potrà consultarsi il suo *Elogio* scritto da Poitevin, Montpellier, 1805, in-4.

RAZIONALE. Termine in uso in più rami delle matematiche, con differenti significazioni.

L'orizzonte razionale è quello il cui piano passa pel centro della terra; gli vien dato questo nome per opposizione con l'*orizzonte sensibile* o *apparente*; perchè esso non può essere che concepito e non veduto. L'addiettivo *razionale* deriva in questo caso da *ragione*, facoltà dell' intelligenza.

Quantità razionale, si chiama così quella quantità la quale non contiene verun numero incommensurabile. In questo caso, *razionale* deriva da *ragione* preso nel senso di *rapporto*.

REALE, (Quantità reali). In *algebra*, si chiamano così quelle quantità le quali non contengono radici pari delle quantità negative. Si chiamano così per opposizione alle quantità dette *immaginarie*; le quali esattamente si compongono di tali radici (*Vedi* Immaginario).

REAZIONE. (*Fisic.*). Quando un corpo agisce sopra un altro in un modo qualunque, quest' ultimo agisce sul primo e gli rende un' azione uguale e in senso contrario, che si chiama *reazione*.

Si era sempre ammesso, come un assioma di fisica, che non esiste azione senza reazione; ma s' ignorava che la reazione è sempre uguale all' azione. Dobbiamo al Newton la scoperta di questa legge, la cui esistenza può facilmente essere constatata nei fenomeni dell' urto dei corpi. Si sa, infatti, che, nella comunicazione del moto mediante l' urto, il corpo urtante trasmette al corpo urtato una certa parte della quantità di moto dalla quale esso è animato; dimodochè indicando con M la quantità primitiva del moto del corpo urtante, e con N quella che esso comunica al corpo urtato, questo corpo urtante non ha più, dopo l' urto, che una quantità di moto rappresentata da M—N. Il resultamento è dunque assolutamente lo stesso come se il corpo urtato avesse impresso al corpo urtante una quantità di moto —N, vale a dire una quantità di moto uguale ad N e in un senso opposto ad M; ma il corpo urtato ha ricevuto nel medesimo tempo, nel senso di M, la quantità di moto N; di cui l' azione che esso ha esercitato sul corpo urtante è uguale ed opposta a quella che esso ha ricevuto da questo corpo. Ora, la quantità di moto acquistata dal corpo urtato dicesi provenire dall' azione del corpo urtante, e la quantità di moto uguale perduta da quest' ultimo, dicesi provenire dalla reazione del corpo urtato. Così è vero che, in qualunque comunicazione di moto mediante l' urto, *la reazione è uguale all' azione*. E facile vedere *a priori* che non potrebbe mai essere diversamente; poichè, in qualunque maniera che un corpo agisca sopra un altro, esso non può farlo che consumando una parte della sua forza esattamente uguale a quella che acquista il secondo corpo.

Macchine a reazione. Sotto questo nome vengono indicati diversi apparecchi idraulici messi in moto dalla reazione di una vena fluida che sgorga.

Per ben comprendere il giuoco di queste macchine, bisogna rammentarsi che, quando un liquido è in riposo in un vaso, le pressioni che hanno luogo sopra le pareti opposte essendo uguali e contrarie, si distruggono scambievolmente e non possono dare alcun moto al vaso (*Vedi*, Pressione). Consideriamo, per meglio fissare le idee, un vaso rettangolare (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 3) ripieno d' acqua fino al livello *mn*, e osserviamo che la pressione che ha luogo in A sopra una piccola parte della parete verticale *mp* è uguale al peso di una colonna liquida che avrebbe questa piccola parte di parete per base, e per altezza la distanza A*m* del punto A al livello *mn*. Se questa pressione agisse sola, essa tenderebbe a trasportare il punto A, e per conseguenza il vaso, nella direzione

della linea AD normale in A alla parete mp; ma siccome, sopra la parete opposta nq, il punto B situato in faccia del punto A è ugualmente sottoposto ad una pressione la quale, se agisse liberamente, trasporterebbe il vaso nella direzione di BC opposta ad AD, queste due pressioni uguali e contrarie si distruggono; dimodochè il vaso non prova alcuna tendenza a muoversi orizzontalmente in un senso o nell' altro. Ciò che dicesi dal punto A applicasi evidentemente a tutti gli altri punti della parete verticale mp. Supponiamo ora che si pratichi in B un orifizio pel quale il liquido possa uscire; la pressione in A, la quale non sarà più controbbilanciata dalla resistenza della porzione della parete soppressa, tenderà ad imprimere al vaso un moto nella direzione AD, opposta a quella del getto, e in virtù di questa pressione, il vaso striscerà sopra la superficie orizzontale che lo sostiene, se però la resistenza dell' attrito non è più grande della forza di pressione. Possiamo verificare questo fenomeno facendo ondeggiare sopra l' acqua tranquilla un piccolo vaso pieno di un liquido qualunque e forato con un piccolo buco ad una delle sue pareti laterali, ovvero, meglio ancora, impiegando un apparecchio semplicissimo chiamato *arganello idraulico*: all' estremità di un tubo di vetro, si attacca in forma di T un altro tubo più stretto forato nel suo mezzo da un piccolo buco che si fa corrispondere con l' apertura del primo, poi si ricurvano i limiti di questo secondo tubo perpendicolarmente e in senso opposto, abbassandogli in becchi assai fini, e dopo aver ripieno d' acqua il primo tubo, si sospende ad un filo mediante la sua estremità aperta; l' acqua sgorga nel tubo orizzontale, zampilla per le sue estremità, e si vede ben tosto tutto l' apparecchio girare sopra se stesso con una gran rapidità. Le ruote idrauliche dette a reazione non sono, nel principio, che simili arganelli.

Immaginiamo un grosso tubo verticale, di cui MN (*Tav.* CLXXXII, *fig.* 2) sia la base, e che fosse mobile intorno dal suo asse A; alla sua parte inferiore è adattato un tubo orizzontale forato in a da un orifizio. Quando questo orifizio è chiuso, se si riempie d' acqua il tubo verticale, il liquido giunge nel tubo orizzontale; ma l' apparecchio non prende alcun moto, perchè l' equilibrio delle pressioni laterali si stabilisce immediatamente. Quando, al contrario, l' orifizio a è aperto, l' acqua sgorga, non vi è più pressione laterale in a, e la pressione che si esercita in b all' opposto spinge il tubo nella direzione da a in b; il getto che esce in a fa dunque girare, per reazione, la macchina intorno dall' asse C. Se supponiamo che diversi tubi simili a BC e similmente forati siano disposti intorno di MN come i raggi di un circolo, avremo una vera *ruota a reazione*.

Daniele Bernoulli ha constatato mediante l' esperienza che lo sforzo della reazione, quello che ha luogo sopra la parte b dei tubi, è perfettamente uguale allo sforzo il cui getto uscendo è capace, vale a dire che esso ha per misura il peso di un prisma di acqua che avrebbe per base l' orifizio a e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità di uscita. Questo resultamento, d' altra parte indicato dalla teoria è una verificazione diretta della legge di uguaglianza tra l' azione e la reazione.

L' Eulero, il Bossut, il Navier, e altri idraulici, si sono dedicati ad una quantità di ricerche sopra le circostanze del moto e dell' azione delle molecole fluide nelle diverse parti di una ruota a reazione. Siccome quello che più importa di conoscere nella pratica, è il limite dell' effetto utile, ci contenteremo in questo punto di riportare le considerazioni teoriche per mezzo delle quali il signor d' Aubuisson determina questo limite.

Consideriamo un vaso cilindrico ABCD (*Tav.* CLXXXIX, *fig.* 2) contenente dell' acqua fino in IK, a al quale s' imprime un moto di rotazione uniforme in-

torno dell'asse verticale EF. L'effetto di questo moto essendo d'imprimere una forza centrifuga alle molecole fluide, la soperficie dell'acqua abbandonerà la forma piana e orizzontale; essa si abbasserà verso il mezzo O, si eleverà verso le sponde, e prenderà finalmente nel suo taglio verticale, la forma curva GOH, di cui si tratta di riconoscere la natura.

Osserviamo, perciò, che poichè il moto di rotazione è uniforme, la superficie fluida avrà una figura permanente, e per conseguenza le molecole liquide saranno in equilibrio. Queste molecole saranno dunque ugualmente pressate in tutti i sensi; dimodochè se si prende sopra l'orizzontale OR una molecola qualunque P, essa sarà tanto pressata dall'alto in basso dal filo verticale MP, quanto da destra a sinistra dal filo verticale PR, o da sinistra a destra dal filo verticale OP. Ora, se immaginiamo che all'eccezione dei due fili MP ed OP, tutta la massa fluida diventi solida, niente sarà cangiato alle condizioni dell'equilibrio, e non avremo più da considerare che le azioni di questi due fili sopra la molecola situate in P all'angolo del piccolo canale OPM, che gli contiene. Per ciò che riguarda il filo MP, poichè la forza centrifuga che agisce sopra le sue molecole è diretta perpendicolarmente alle pareti del piccolo canale, essa è distrutta dalla loro resistenza; così le molecole di questo filo non hanno altra azione in P che quella che resulta dalla loro gravità, e per conseguenza la pressione in P è uguale alla somme dei loro pesi. Se indichiamo con m la massa di una molecola e con g la forza di gravità, mg rappresenterà il suo peso, e siccome l'altezza $MP = x$ può rappresentare la somma delle molecole del filo, il peso totale sarà

$$mgx.$$

Per ciò che riguarde ora il filo OP, poichè esso riposa sopra un piano orizzontale, l'azione della gravità sopra le sue molecole è distrutta; così esso non può agire in P che per l'effetto della forza centrifuga; ma questa forza anima ciascuna molecola liquida del filo OP in un modo differentissimo; essa cresce, a cominciare dal centro O di rotazione, ove essa è nulla, fino a P, dove essa è la più grande proporzionalmente alla distanza dal centro. In generale, se y', rappresenta la distanza al centro O di una molecola m, e v la sua velocità di rotazione, l'espressione della sua forza centrifuga sarà

$$\frac{mv^2}{y'},$$

ovvero più semplicemente

$$m w^2 y',$$

indicando con w la velocità angolare del filo OP. Chiamando dunque y la distanza totale OP, avremo mw^2y per la forza centrifuga della molecola situata in P, e siccome le forze dell'altre molecole diminuiscono in progressione aritmetica, come pure le distanze alle quali esse sono proporzionali, la somma di tutte queste forze sarà

$$m w^2 y \times \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} m w^2 y^2.$$

Questa somma essendo quella degli sforzi che fanno le molecole del filo OP per portarsi da O in P, o per pressare quest'ultimo punto, dev'essere equivalente alla pressione mgx esercitata sullo stesso punto P dalla colonna verti-

cala MP; dunque $\frac{1}{2} m w^2 y^2 = mgx$, ovvero

$$y^2 = \frac{2g}{w^2} x \; \ldots\ldots \; (1),$$

eqnazione la quale c' insegna che la corva OMH è una parabola conica il cui parametro è $\frac{2g}{w^2}$.

Per applicare questo resultamento alle ruote a reazione, supponiamo che al punto R, sul prolungamento di OP, si sia praticato un orifizio pel quale l'acqua esce dal vaso, nel tempo che esso gira; supponiamo inoltre che il vaso riceva costantemente tanta acqua quanta ne perde. Si chiamino A ed H' le coordinate OR ed HR del punto R e v la sua velocità di rotazione, che sarà uguale ad Aw, chiamando sempre w la velocità angolare del raggio OR. L'equazione (1) dovendo essere soddisfatta quando ci facciamo $y = A$, $x = H'$, abbiamo

$$A^2 = \frac{2g}{w^2} H',$$

e per conseguenza

$$H' = \frac{v^2}{2g}.$$

Vale a dire che l' altezza alla quale la forza centrifuga eleva l' acqua al di sopra dell' orifizio R, aperto al livello di O, è uguale all' altezza dovuta alla velocità di rotazione di quest' orifizio; ma H è ancora il carico in R; dunque la velocità dello sgorgo che è dovuto a questo carico; sarà uguale alla velocità di rotazione dell' orifizio.

Se l' acqua fosse somministrata al vaso da un tubo avente lo stesso asse, di una sezione orizzontale considerabilmente più grande di quella dell' orifizio di uscita, e nella quale il fluido si manterrebbe in L, nel tempo della durata del moto di rotazione, l' acqua uscirebbe in R in virtù dell' altezza H' e dell' altezza del nuovo carico LO, che indichiamo con H. Così l' altezza dovuta alla velocità di uscita sarebbe H'+H, e la velocità di sgorgo sarebbe

$$\sqrt{2g(H'+H)},$$

ovvero

$$v + \sqrt{2gH},$$

poichè $\sqrt{2gH'} = v$.

Ammettiamo ora che un ostacolo fisico, come un diaframma orizzontale situato nel vaso un poco al di sopra del punto O metta ostacolo all' elevazione del fluido al di sopra dell' orifizio R, lo sforzo H resultante dalla tendenza ad elevarsi o dalla forza centrifuga, avrà sempre luogo, e produrrà ciò non ostante il suo effetto sopra la velocità di uscita, che sarà sempre

$$v + \sqrt{2gH}.$$

Premesso ciò, ecco le conseguenze che ne deduce il signor d'Abuisson per l'effetto delle ruote a reazione.

Si sa che chiamando P il peso dell'acqua sgorgata nell'unità di tempo ed H l'altezza dovuta alla velocità di quest'acqua, la sua forza è rappresentata da PH. Ora, dice il signor d'Abuisson, perchè la ruota prendesse la forza intera PH del motore, bisognerebbe che dopo che gli si fosse dato l'altezza H, l'acqua vi entrasse e la percorresse senza provare cangiamento brusco di velocità. Affinchè sia così, si renderanno liberi più che sarà possibile gl'ingressi dei tubi, si curveranno in modo che le loro estremità siano perpendicolari al raggio della ruota, e si farà uscire l'acqua da quest'estremità, come si vede nella figura 5 della tavola CLXXXII. Bisognerebbe, in secondo luogo, che la velocità assoluta del fluido, al momento in cui esso abbandona la ruota fosse nulla; e per conseguenza che la sua velocità relativa, in questo medesimo momento, fosse uguale e direttamente opposta all'orifizio di uscita. Chiamando v quest'ultima e osservando, mediante ciò che abbiamo detto, che quella del fluido che esce è $v+\sqrt{2gH}$, bisognerebbe che si avesse

$$v=v+\sqrt{2gH}.$$

Questa condizione non potrebbe essere adempita se non che nel caso di H nullo, o che v fosse infinitamente grande. Ora, il primo caso non può esistere; l'effetto è d'altra parte proporzionale ad H; il secondo non può ancora aver luogo, ma può avvicinarsi allo stesso. Concludiamo dunque che l'effetto dinamico di una semplice ruota a reazione sarà tanto più grande quanto essa si muoverà più veloce senza che, in alcun caso, possa essere PH, valore che si raggiunge, in teoria, nelle ruote ad ale curve.

Queste considerazioni teoriche sono lungi, senza dubbio dall'essere rigorose, ma esse fanno almeno conoscere le condizioni sotto le quali possiamo sperare il più grande effetto utile possibile; e ne resulta che la proprietà caratteristica delle ruote a reazione è interamente opposta a quella delle ruote a palette; poichè, in quest'ultime il maximum di effetto corrisponde al minimum di velocità. Non possiamo dunque impiegare vantaggiosamente le ruote a reazione che quando si hanno delle cadute d'acqua elevatissime; nel caso contrario, le ruote a palette, le quali in generale producono un maggiore effetto utile, saranno sempre preferibili. La *danaide* (*Vedi* Questa parola) del signor Manoury d'Hectot era considerata come la miglior macchina a reazione avanti l'invenzione del *Turbine a reazione* (*Vedi* Turbine) del signor Burdin.

Si è tentato di applicare il principio della reazione alle macchine a vapore, ma fin qui tutti i tentativi sono stati inutili.

RECIPROCITA' (*Alg.*). Il Legendre, nella sua *teoria dei numeri*, chiama *legge di reciprocità* una proprietà osservabile dei numeri primi la quale consiste in ciò che se m ed n sono due numeri tali, il resto di $m^{\frac{n-1}{2}}$ diviso per n sarà sempre uguale al resto di $n^{\frac{m-1}{2}}$ diviso per m, se m ed n non sono tutti due della forma $4x+3$, ovvero sarà uguale a quest'ultimo resto preso negativamente se m ed n sono tutti due di questa forma. Questi resti sono d'altra parte costantemente uguali a $+1$ o a -1. *Vedi*, Legendre, *Teoria dei numeri*, III[a] parte.

RECIPROCO. (*Alg.*). Due quantità sono *reciproche* l'una dell'altra, quando il

loro prodotto è l'*unità*. Così $\frac{1}{A}$ è *reciproco* di A, $\frac{M}{N}$ è *reciproco* di $\frac{N}{M}$ e così di seguito. In generale, si ottiene la *reciproca* di una quantità qualunque dividendo l' *unità* par questa quantità.

Due quantità sono in *ragione reciproca* o *inversa* di due altre, quando il loro rapporto è *reciproco* di quello di quest' ultime. Per esempio, A e B saranno in *ragione reciproca* di C e D, se si ha.

$$\frac{A}{B} = Q, \quad \frac{C}{D} = \frac{1}{Q};$$

quando si tratta di *rapporto*, ci serviamo più comunemente della parola *inverso* che della parola *reciproco*.

Si chiama ancora *Proposizione reciproca* quella nella quale i *dati* sono la *conclusioni* di un' altra proposizione e *vice-versa*. Così la proposizione: *la retta condotta dal vertice di un triangolo isoscele al mezzo della sua base è perpendicolare a questa base*, è la *reciproca* della proposizione; *la perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo isoscele sopra la sua base divide questa base in due parti uguali.*

RECORDE (ROBERTO), dotto matematico inglese del XVI secolo, fu il primo a introdurre nella sua patria lo studio dell' analisi. Nacque verso il 1500 a Tenby nella contea di Pembroke: studiò ad Oxford, ove in seguito insegnò con molto grido la rettorica, le matematiche, la musica e l' anatomia. Inclinato ad abbracciare con troppa facilità i progetti più rischiosi, finì col rovinare interamente la sua fortuna. Morì nel 1558 nella prigione del banco del re, nella quale trovavasi chiuso per debiti. Delle molte opere di Recorde, scritte tutte in inglese, non citeremo che quelle relative alle matematiche: I *The Grounde of Artes* (*I Principj delle Arti*), Londra, 1540. Quest' opera altro non è che un trattato di aritmetica, contenente la numerazione, l' addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, sì dei numeri interi che dei rotti, le progressioni, la regola del tre, un trattato sul modo di calcolare per mezzo di piccoli pezzetti di legno a somiglianza dell' abaco dei Chinesi, un metodo per rappresentare i numeri colla mano come l' alfabeto dei sordo-muti, le regole di alligazione, di società e di falsa posizione. Intorno a quest' ultima regola, ci narra come era solito di far maravigliare i suoi amici col proporre dei quesiti difficili e collo scioglierli prendendo i numeri che a caso gli venivano dati da fanciulli o da persone idiote. II *The Pathway to Knowledge* (*Il Sentiero della Scienza*), Londra, 1551: è questo un breve compendio di geometria estratto dagli *Elementi* di Euclide; III *The Castle of Knowledge* (*Il Palazzo della Scienza*), ivi, 1556: è un trattato di astronomia scritto in forma di dialogo tra il maestro e lo scolare. Comincia con un' esposizione del sistema di Tolomeo, e quindi in un passo apparentemente nascosto procede a spiegare gli elementi del sistema copernicano: se Recorde non fu il primo ad introdurre in Inghilterra questo sistema, sembra però essere stato uno dei primi ad adottarlo. IV *The Whetstone of Witte* (*La Cote dell' Intelletto*), Londra, 1557. In quest'opera, Recorde ha raccolto le ricerche e gli studj degli scrittori stranieri sull' algebra, che allora era nell' infanzia, aggiungendovi non pochi miglioramenti da lui immaginati. È l' inventore del segno dell' eguaglianza, ed è a lui dovuto il metodo per estrarre la radice quadrata dei polinomj algebrici. Considerando il complesso degli scritti di Recorde e lo stato della scienza al suo tempo, egli deve essere riguardato come un talento straordinario e come uno dei primi matematici della sua epoca.

REFLESSIBILITÀ. Proprietà che hanno alcuni corpi di tornare indietro allorchè nel loro moto incontrano un ostacolo insormontabile. La *reflessibilità* è il carattere distintivo dei corpi elastici.

Newton ha scoperto il primo che i raggi luminosi che sono di differenti colori hanno pure differenti gradi di reflessibilità. Resulta da altre esperienze che i raggi i più reflessibili sono anco i più refrangibili.

REFLESSIONE (*Mec.*). Moto retrogrado di un mobile, occasionato della resistenza di un ostacolo che gl' impedisce di continuare a muoversi nella primitiva sua direzione, e lo fa tornare indietro dopo l' urto. La causa di questo cangiamento di direzione, è l' elasticità dei corpi, perchè se i corpi non avessero questa proprietà non potrebbe esservi *reflessione* (*Vedi* Elasticità). I corpi elastici sono dunque i soli che siano suscettibili di un moto reflesso; ma siccome non hanno tutti lo stesso grado di elasticità, i resultati della teoria matematica della *reflessione* non debbono esser considerati che come approssimazioni quando si tratta di corpi diversi dalla luce, dall' aria e dai gas. *Vedi* Urto.

Le leggi della *reflessione* della luce formano l' oggetto della *Catottrica*. *Vedi* Catottrica.

REFLESSO (*Ottica*). Si dà questo nome a qualunque raggio luminoso che abbia provato un cangiamento di direzione in forza dell' incontro di un ostacolo per esso impenetrabile. *Vedi* Reflessione.

REFRANGIBILITÀ. Proprietà che hanno i raggi della luce di rompersi o refrangersi nel passare da un mezzo in un altro.

REFRAZIONE (*Mecc.*). Cangiamento di direzione di un mobile che passa obliquamente da un mezzo in un altro, che esso penetra più o meno facilmente.

Se, per esempio, si getta in aria una palla A (*Tav.* CXCVI, *fig.* 1), in modo che essa vada ad incontrare obliquamente in B la superficie MN di un vaso d'acqua, la palla, penetrando nell' acqua, non continuerà a muoversi nella direzione AF, ma devierà per prendere una direzione BE, che farà un angolo colla prima nel punto di contatto dei due mezzi; cosicchè la direzione primitiva sembrerà come spezzata nel punto B, e di qui è derivato il nome che le è stato dato di *refrazione*.

Questo fenomeno è prodotto dalle resistenze ineguali che i mezzi di una densità differente oppongono al moto di un mobile, e può facilmente spiegarsi mediante le appresso considerazioni.

Quando un corpo solido, posto in moto, passa da un mezzo in un altro, come dall' aria nell' acqua o dall' acqua nell' aria, questi mezzi non essendo egualmente penetrabili da esso, per la differenza delle loro densità, l' uno gli opporrà più o meno resistenza dell'altro, e questa maggiore o minor resistenza, che non potrebbe fare altro che rallentare o aumentare la celerità del mobile senza cambiare la sua direzione se esso incontrasse perpendicolarmente la superficie di contatto dei due mezzi, deve necessariamente farlo deviare dalla sua direzione primitiva se incontra obliquamente questa superficie di contatto. Infatti, sia MN (*Tav.* CXCVI, *fig.* 5) la linea di separazione dei due mezzi e CH una perpendicolare a questa linea: ogni corpo che si movesse per questa perpendicolare continuerebbe a muoversi nella direzione CH, perchè, penetrando nel secondo mezzo, che supporremo il più denso, la resistenza che dovrà vincere non potrà evidentemente fare altro che diminuire la sua celerità senza alterare la sua direzione, perchè questa resistenza agisce nel senso stesso della perpendicolare. Ma se il mobile si muova lungo la retta AB, obliqua rispetto ad MN, si può decomporre la forza che lo mette in moto in altre due, una delle quali parallela ad MN e l' altra perpendicolare a questa stessa retta; ora, nell' istante in cui questo mobile penetra nel secondo mezzo, la forza che agisce secondo la per-

pendicolare si trova diminuita in forza della resistenza maggiore del mezzo: così, supponendo che le forze primitive siano rappresentate da BM e BH, dimanierachè senza l'influenza del secondo mezzo il mobile potesse percorrere la diagonale BG in linea retta con AB, se la forza diminuita è rappresentata da BE, il mobile percorrerà la diagonale BF, vale a dire che si allontanerà dalla primitiva sua direzione, facendo colla perpendicolare CH un angolo FBH più grande dell'angolo d'incidenza ABC. Il contrario avverrebbe se il mobile passasse da un mezzo più denso in un altro meno denso.

La refrazione dipende dunque da due condizioni essenziali e senza le quali non avrebbe luogo. La prima è il passaggio di un mobile da un mezzo in un altro più o meno resistente, la seconda è l'obliquità d'incidenza del mobile. Se dunque il mobile passa obliquamente da un mezzo raro in uno più denso, da un mezzo meno resistente in uno più resistente, si rompe o si refrange, allontanandosi dalla perpendicolare alla superficie di contatto dei due mezzi, vale a dire facendo un angolo di *refrazione* più grande del suo angolo d'*incidenza*. Mentre, se il mobile passa obliquamente da un mezzo denso in uno più raro, da un mezzo più resistente in uno meno resistente, si rompe e si refrange, avvicinandosi alla perpendicolare e facendo il suo angolo di *refrazione* minore del suo angolo d'*incidenza*.

I raggi della luce che passano da un mezzo in un altro procedono come i corpi materiali, in quanto che provano anch'essi una refrazione, ma questa refrazione si effettua in un modo interamente opposto.

Refrazione della luce. La deviazione che prova un raggio di luce che passa da un mezzo in un altro si dimostra mediante un'esperienza semplicissima. Se nel fondo di un vaso formato di pareti non trasparenti e pieno di acqua si pone in C (*Tav.* CXCV, *fig.* 3) una moneta, e quindi ci si allontana in modo da avere l'occhio in A, nella direzione BA del raggio refratto BC, si scorgerà la moneta nella direzione AB, come se fosse posta in D nel fondo del vaso: ma se si toglie l'acqua del vaso, lasciando il resto nelle stesse condizioni, non si potrà più vedere la moneta.

La legge generale di questa refrazione della luce viene formulata nei seguenti termini.

Quando un raggio luminoso passa obliquamente da un mezzo trasparente in un altro, si allontana dalla sua direzione primitiva e soffre una refrazione. Se pel punto d'incidenza, nel quale il raggio incontra il secondo mezzo, si immagina una linea perpendicolare alla superficie refrangente, il raggio nel refrangersi si avvicinerà a questa perpendicolare se il mezzo in cui entra è più denso di quello dal quale esce, ed al contrario se ne allontanerà se è più raro.

Supponiamo che O (*Tav.* CXCVI, *fig.* 2) sia il punto in cui il raggio di luce RO passa da un mezzo in un altro, tanto se la superficie che separa i due mezzi è piana come MN, o concava come AB, o finalmente convessa come CD: supponiamo inoltre che il mezzo più raro sia al di sopra della superficie di separazione, e il mezzo più denso al di sotto: se si alza in O la retta EF perpendicolare alla superficie di separazione, e se s'immagina un piano che passi per RO ed EF, il raggio refratto OL rimarrà anch'esso nello stesso piano, ma l'angolo LOF che esso fa colla perpendicolare EF sarà minore dell'angolo ROE, che il raggio incidente RO fa con questa stessa perpendicolare.

Se dal punto O come centro e con un raggio arbitrario si descrive il circolo EGFL, e se dai punti G ed L in cui il raggio incidente e il raggio refratto tagliano la sua circonferenza si conducono le rette GP ed LQ perpendicolari ad EF, queste rette saranno i seni degli angoli d'incidenza e di refrazione ROE,

LOF. Ora, Cartesio ha scoperto che questi seni hanno sempre un rapporto invariabile, qualunque sia l'angolo d'incidenza, rimanendo gli stessi i due mezzi nei quali si muove la luce (*Vedi* Ottica). Questo rapporto costante del seno d'incidenza al seno di refrazione è la legge fondamentale della diottrica, che viene così annoziata:

Quando un raggio luminoso passa da un mezzo in un altro, si refrange in modo che il seno dell'angolo d'incidenza e quello dell'angolo di refrazione stanno tra loro in un rapporto costante.

I fisici chiamano questo rapporto il *rapporto di refrazione*, come sono pure soliti di chiamare gli angoli ROE, LOF col nome del mezzo in cui si trovano: l'angolo *nell'aria*, l'angolo *nell'acqua*, *nel vetro*, ec.

I rapporti di refrazione i più importanti sono quelli che esistono tra l'aria e il vetro, tra l'aria e l'acqua. L'ultimo è presso a poco quello di 4 a 3; quanto al primo, esso varia a seconda della natura del vetro; così tra l'aria e il vetro comune è di circa $\frac{3}{2}$, o più esattamente di $\frac{17}{11}$; tra l'aria e il crown-glass di $\frac{155}{100}$; e tra l'aria e il flint-glass di $\frac{158}{100}$.

Refrazione atmosferica. Deviazione che provano i raggi luminosi emanati dagli astri nell'attraversare la nostra atmosfera, in forza della quale questi astri ci sembrano più elevati al di sopra dell'orizzonte di quello che lo siano realmente.

Supponiamo T (*Tav.* CXCVII, *fig.* 1) la terra, C il luogo di un osservatore ed A un astro qualunque da cui parta un raggio luminoso. Questo raggio percorrerà una linea retta fino al suo incontro coll'atmosfera terrestre in P; in quel punto comincerà a subire un cangiamento di direzione, e penetrando successivamente in strati d'aria sempre più densi a misura che si avvicinerà alla terra, giungerà all'occhio dell'osservatore in C dopo aver descritto nell'atmosfera una linea curva PC. Ma siccome l'osservatore non può giudicare della situazione dell'astro sulla volta celeste che dall'impressione che ha ricevuto, invece di riferirlo al punto A, lo riferirà al punto A' della retta CA', nella direzione della quale la luce dell'astro è giunta al suo occhio: dunque vedrà l'astro più elevato di quello che lo sia effettivamente.

Le deviazioni successive che prova un raggio di luce penetrando nell'atmosfera hanno sempre luogo in un medesimo piano verticale; così la refrazione non produce altro effetto che quello di far comparire gli astri più elevati di quello che lo siano. Perciò noi vediamo il sole, la luna, ec. al di sopra dell'orizzonte, mentre sono ancora al di sotto, e in generale il levare apparente degli astri precede sempre il loro levare reale, mentre il loro tramonto apparente non ha luogo che dopo il loro tramonto reale.

Gli antichi avevano notati gli effetti della refrazione, ma siccome non avevano mezzo nessuno per misurarli, gli trascurarono sempre nei loro calcoli astronomici. Nel 1583, Ticone Brahé riconobbe che la refrazione all'orizzonte è maggiore di 30', e prese a calcolare una tavola per le differenti altezze al di sopra dell'orizzonte, ma Domenico Cassini è il primo che abbia proposto un'ipotesi atta a calcolare le refrazioni per tutte le altezze, e la tavola ch'ei formò era già di una notabile esattezza.

Picard riconobbe nel 1669, per mezzo delle altezze meridiane del sole, che le refrazioni sono più considerabili in inverno che in estate; e le trovò anco più grandi nella notte che nel giorno. In seguito si è osservato che quelle della zona

torrida sono minori di quelle dei nostri climi; donde si può concludere che le refrazioni dipendono in generale dallo stato dell'atmosfera, che debbono essere più o meno considerevoli a misura che l'aria diviene più o meno densa, e che le loro variazioni debbono seguire quelle del barometro e del termometro.

Le differenze delle refrazioni occasionate dalla differenza della temperatura dell'aria possono trascurarsi nei calcoli nautici che non esigono una gran precisione; ma la loro irregolarità in vicinanza dell'orizzonte, ove i vapori, l'umidità dell'aria e i venti sono più variabili che nelle regioni più elevate, deve fare evitare per quanto è possibile di osservare gli astri quando sono troppo prossimi al loro levare o al loro tramonto.

Le altezze corrispondenti del sole o di una stella sono mezzi adattatissimi per far conoscere la quantità della refrazione. Se si osserva, per esempio, con un buono strumento l'altezza del sole la sera e la mattina alla distanza di 6 ore dal meridiano, e se si trova essa di 9°, mentre calcolando quest'altezza osservata non si troverebbe che di 8° 54′, la differenza di 6′ tra l'osservazione e il calcolo sarà la quantità di refrazione ad un'altezza apparente di 9°, vale a dire che a quest'altezza il sole sembra più elevato di 6′ di quello che lo sia in realtà.

Con questo metodo si è trovato primieramente che la refrazione orizzontale, la maggiore di tutte le refrazioni astronomiche, è di circa 33′ nelle zone temperate e di 27′ nella zona torrida. In seguito poi si è trovato, mediante un numero grande di esperienze, che la refrazione diminuisce a misura che cresce l'altezza, e che diviene assolutamente nulla allo zenit.

Dopo avere osservato con accuratezza le refrazioni a diversi gradi di altezza, si scoprì finalmente che dallo zenit fino a circa il grado 80° esse conservano tra loro presso a poco il rapporto delle tangenti delle distanze dallo zenit; e Bradley, guidato dalle ricerche di Simpson su questo soggetto, fece vedere il primo che *le refrazioni sono proporzionali alle tangenti delle distanze dallo zenit diminuite del triplo della refrazione.* Vale a dire che indicando con r la refrazione corrispondente alla distanza z dallo zenit, si ha

$$r = A.\tang(z-3r),$$

ove A è una quantità costante per uno stesso stato dell'atmosfera, ossia per una stessa pressione e per una stessa temperatura.

In seguito delle esperienze dei sigg. Biot e Arago, il valore di questo coefficiente è 60″,666 alla pressione atmosferica di $0^m,76$ e alla temperatura del ghiaccio che si fonde; talmentechè la formula della refrazione, modificandovi il coefficiente di r che è troppo piccolo, diviene

$$r = 60'',666\ \tang(z-3,25r).$$

Questa formula, indipendente da qualunque ipotesi sulla costituzione dell'atmosfera, non vale che per le altezze orizzontali che oltrepassano 10°; ma quando il raggio luminoso fa coll'orizzonte un angolo minore, diviene indispensabile l'introdurre nella teoria delle refrazioni la legge che regola la densità dell'aria a diverse altezze, e siccome questa legge non è ancora sufficientemente nota, non si possono considerare che come approssimazioni i resultati ottenuti dai geometri; fino ad ora le formule di Laplace sono le più esatte di tutte quelle che sono state trovate, e secondo queste formule sono state calcolate le tavole seguenti.

L'uso della prima è facilissimo quando si trascura la temperatura e la pressione, come spesso fanno i navigatori; vi si cerca il numero che corrisponde all'altezza data diminuita delle unità dei minuti e dei secondi, quindi s'interpo-

lando le parti trascurate dividendo proporzionalmente la differenza che corrisponde a 10' di variazione d'altezza. Sia, per esempio, da trovarsi la refrazione che ha luogo ad un'altezza di 12° 34' 18''. La tavola dà 4' 17'',2 per 12° 30'; e la differenza fra 12° 30' e 12° 40' è 3'',4: per conseguenza si stabilirà la proporzione

$$10' : 4'\,18'' :: 3'',4 : x,$$

o approssimativamente

$$10 : 4,3 :: 3'',4 : x = 1'',462.$$

Perciò si ha

per 12° 30'	4' 17'',2
per 4',3	− 1 ,46
Refrazione	= 4' 15'',74

La parte intercalata è sempre negativa, perchè la refrazione diminuisce a misura che aumenta l'altezza.

Così, siccome bisogna togliere la refrazione dall'altezza apparente per avere l'altezza vera, un astro che ci comparisse ad un'altezza di 12° 34' 18'' avrebbe per altezza vera

$$12^\circ\,34'\,18'' - 4'\,15'',7, \text{ ossia } 12^\circ\,30'\,2'',3.$$

TAVOLA DELLE REFRAZIONI ATMOSFERICHE.

Barometro, 0m,77, e Termometro centigrado, 10°.

Altezze apparenti		Refrazioni		Differenze per 10′	Altezze apparenti		Refrazioni		Differenze per 10′
G.	M.	M.	S.	S.	G.	M.	M.	S.	S.
0.	0	33.	46,3		7.	0	7.	24,8	
	10	31.	54,3	112,0		10	7.	15,3	9,5
	20	30.	9,3	105,0		20	7.	6,3	9,0
	30	28.	32,0	97,3		30	6.	57,7	8,6
	40	27.	2,2	89,8		40	6.	49,6	8,1
	50	25.	38,6	83,6		50	6.	41,9	7,7
1.	0	24.	21,2	77,4	8.	0	6.	34,4	7,5
				71,6					7,3
	10	23.	9,6	66,2		10	6.	27,1	7,1
	20	22.	3,4	61,5		20	6.	20,0	6,9
	30	21.	1,9	57,1		30	6.	13,1	6,7
	40	20.	4,8	53,3		40	6.	6,4	6,5
	50	19.	11,5	49,8		50	5.	59,9	6,3
2.	0	18.	22,0		9.	0	5.	53,6	
				46,9					6,2
	10	17.	36,3	43,1		10	5.	47,4	5,9
	20	16.	53,2	39,8		20	5.	41,6	5,7
	30	16.	13,4	37,4		30	5.	35,8	5,5
	40	15.	36,0	35,1		40	5.	30,3	5,3
	50	15.	0,9	32,8		50	5.	25,0	5,2
3.	0	14.	28,1		10.	0	5.	19,8	
				30,8					5,1
	10	13.	57,3	28,8		10	5.	14,7	5,0
	20	13.	28,5	27,2		20	5.	9,7	4,8
	30	13.	1,3	25,7		30	5.	4,9	4,6
	40	12.	35,6	24,3		40	5.	0,3	4,4
	50	12.	11,3	23,0		50	4.	55,9	4,2
4.	0	11.	48,3		11.	0	4.	51,7	
				21,7					4,1
	10	11.	26,6	20,5		10	4.	47,6	4,0
	20	11.	6,1	19,4		20	4.	43,6	4,0
	30	10.	46,7	18,4		30	4.	39,6	3,9
	40	10.	28,3	17,4		40	4.	35,7	3,9
	50	10.	10,9	16,6		50	4.	31,8	3,8
5.	0	9.	54,3		12.	0	4.	28,0	
				15,9					3,7
	10	9.	38,4	15,0		10	4.	24,3	3,6
	20	9.	23,4	14,4		20	4.	20,7	3,5
	30	9.	9,0	13,7		30	4.	17,2	3,4
	40	8.	55,3	13,0		40	4.	13,8	3,2
	50	8.	42,3	12,4		50	4.	10,6	3,1
6.	0	8.	29,9		13.	0	4.	7,5	
				11,8					3,1
	10	8.	18,1	11,5		10	4.	4,4	3,0
	20	8.	6,6	11,0		20	4.	1,4	3,0
	30	7.	55,6	10,6		30	3.	58,4	2,9
	40	7.	45,0	10,3		40	3.	55,5	2,9
	50	7.	34,7	9,9		50	3.	52,6	2,8
7.	0	7.	24,8		14.	0	3.	49,8	

TAVOLA DELLE REFRAZIONI ATMOSFERICHE.

Barometro, 0m,77, e Termometro centigrado, 10°.

Altezze apparenti	Refrazioni		Differenze per 10′	Altezze apparenti	Refrazioni	Differenze per 10′
G.	M.	S.	S.	G.	S.	S.
14	3.	49,8	2,38	56	39,3	0,25
15	3.	34,3	2,20	57	37,8	0,24
16	3.	20,6	2,02	58	36,4	0,24
17	3.	8,5	1,82	59	35,0	0,23
18	2.	57,6	1,65	60	33,6	0,22
19	2.	47,7	1,48	61	32,3	0,22
20	2.	38,8	1,37	62	31,0	0,21
21	2.	30,6	1,24	63	29,7	0,21
22	2.	23,2	1,11	64	28,4	0,20
23	2.	16,5	1,05	65	27,2	0,20
24	2.	10,2	0,98	66	25,9	0,20
25	2.	4,3	0,90	67	24,7	0,20
26	1.	58,9	0,83	68	23,5	0,20
27	1.	53,9	0,78	69	22,4	0,20
28	1.	49,2	0,73	70	21,2	0,20
29	1.	44,8	0,70	71	20,0	0,19
30	1.	40,6	0,65	72	18,9	0,18
31	1.	36,7	0,60	73	17,8	0,18
32	1.	33,1	0,58	74	16,7	0,18
33	1.	29,6	0,56	75	15,6	0,18
34	1.	26,2	0,53	76	14,5	0,17
35	1.	23,1	0,50	77	13,5	0,17
36	1.	20,1	0,48	78	12,4	0,17
37	1.	17,2	0,47	79	11,3	0,17
38	1.	14,4	0,43	80	10,3	0,17
39	1.	11,8	0,42	81	9,2	0,17
40	1.	9,3	0,40	82	8,2	0,17
41	1.	6,9	0,38	83	7,2	0,17
42	1.	4,6	0,32	84	6,1	0,17
43	1.	2,4	0,35	85	5,1	0,17
44	1.	0,3	0,34	86	4,1	0,17
45	0.	58,2	0,33	87	3,1	0,17
46	0.	56,2	0,32	88	2,0	0,17
47	0.	54,3	0,31	89	1,0	0,17
48	0.	52,4	0,30	90	0,0	
49	0.	50,6	0,29			
50	0.	48,9	0,28			
51	0.	47,2	0,27			
52	0.	45,5	0,26			
53	0.	43,9	0,26			
54	0.	42,3	0,25			
55	0.	40,8	0,25			
56	0.	39,3				

TAVOLA PER CORREGGERE LE REFRAZIONI MEDIE.

Barometro.		Fattore.	Barometro		Fattore.	Termometro		Fattore.
M.	PO.		M.	PO.		Centigr.	Réaumur	
0. 710	26. 23	0. 934	0. 750	27. 71	0. 987	— 20	— 16,0	1. 128
711	27	935	751	74	988	18	14,4	1. 118
712	30	937	752	78	989	16	12,8	1. 109
713	34	938	753	82	990	14	11,2	1. 100
714	38	939	754	85	992	12	9,6	1. 091
715	41	0. 941	0. 755	89	993	11	8,8	1. 087
716	45	942	756	93	995	10	8,0	1. 082
717	49	943	757	27. 96	996	9	7,2	1. 077
718	52	945	758	28. 00	997	8	6,4	1. 073
719	56	946	759	04	999	7	5,6	1. 069
720	60	0. 947	760	08	1. 000	6	4,8	1. 064
721	63	949	761	11	001	5	4,0	1. 060
722	67	950	762	15	003	4	3,2	1. 056
723	71	951	763	19	004	3	2,4	1. 052
724	75	953	764	22	005	2	1,6	1. 048
725	78	0. 954	765	26	1. 007	— 1	— 0,8	1. 044
726	82	955	766	30	008	0	0,0	1. 040
727	86	957	767	33	009	+ 1	+ 0,8	1. 035
728	89	958	768	37	010	2	1,6	1. 031
729	93	959	769	41	012	3	2,4	1. 027
730	26. 97	0. 960	770	44	1. 013	4	3,2	1. 023
731	27. 00	962	771	48	014	5	4,0	1. 019
732	04	963	772	52	016	6	4,8	1. 015
733	08	964	773	56	017	7	5,6	1. 012
734	11	966	774	59	018	8	6,4	1. 008
735	15	0. 967	775	63	1. 020	9	7,2	1. 004
736	19	968	776	67	021	10	8,0	1. 000
737	23	970	777	70	022	11	8,8	0. 996
738	26	921	778	74	023	12	9,6	0. 992
739	30	922	779	78	025	13	10,4	0. 989
740	34	0. 973	780	81	1. 026	14	11,2	0. 985
741	37	975	781	85	027	15	12,0	0. 981
742	41	976	782	89	029	16	12,8	0. 977
743	45	977	783	92	030	17	13,6	0. 974
744	48	979	784	28. 96	031	18	14,4	0. 971
745	52	0. 980	785	29. 00	1. 033	20	16,0	0. 964
746	56	981	786	04	034	22	17,6	0. 956
747	60	983	787	07	035	24	19,2	0. 949
748	63	984	788	11	037	26	20,8	0. 942
0. 749	27. 67	985	789	15	038	+ 30	+ 24,0	0. 929

Quando si vogliono dei valori precisi, bisogna correggere la refrazione media, data dalla tavola, secondo le diverse altezze del barometro e del termometro nell' istante dell' osservazione. Questa correzione si eseguisce per mezzo della seconda tavola, la quale per ogni divisione del barometro e del termometro somministra i fattori pei quali si deve moltiplicare la refrazione media onde ottenere quella che si conviene allo stato attuale dell' atmosfera. Supponiamo, per esempio, che nell' istante di una osservazione il barometro sia a $0^m,755$ e il termometro a $+16^\circ$; cercando nella tavola, si trova accanto a $0^m,755$ il fattore 0,993, e accanto a $+16^\circ$ il fattore 0,964; dunque, per questi due fattori, o, il che è lo stesso, pel loro prodotto 0,957 deve moltiplicarsi la refrazione media.

Siccome i due fattori dovuti alla pressione e alla temperatura danno un prodotto che differisce sempre pochissimo dall' unità, posto questo prodotto sotto la forma $1 \pm x$, x sarà sempre piccolissimo, e allora potrà semplificarsi l' operazione moltiplicando soltanto per x la refrazione media; e il prodotto ottenuto, preso col segno di x, sarà la correzione da aggiungersi alla refrazione media. Daremo ora un esempio di tutti questi calcoli.

Quale è l' altezza vera dell' orlo superiore del sole, l' altezza apparente del quale è di 9° 25′ 30″, segnando il barometro $0^m,741$ e il termometro centigrado + 13°?

La tavola delle refrazioni dà per

9° 20′		5′ 41″,50
5′		— 2 ,85
0′,5		— 0 ,28
Refrazione media		5′ 38 ,37 = 338″,37
Barometro $0^m,741$	fattore = 0,975	
Termometro + 13	fattore = 0,989	
	Prodotto = + 0,964	
	ovvero 1 — 0,036	
Refrazione media		338″,37
Fattore		— 0,036
Correzione		— 13″,20
Refrazione corretta		325″,17 = 5′ 25″,17
Altezza apparente		= 9° 25′ 30″
Refrazione		= 0° 5 25″,17
Altezza vera		= 9° 20′ 4″,83

Gli astri sembrando più elevati sull' orizzonte di quello che lo siano realmente, il loro luogo apparente differisce sempre dal loro luogo reale, eccetto il caso che si trovino allo zenit, talchè le loro latitudini, longitudini, ascensioni rette e declinazioni si trovano alterate di una piccola quantità che prende il nome di *refrazione in latitudine*, o *in longitudine*, ec. Quando si conosce la *refrazione in altezza*, che è quella di cui ci siamo fin qui occupati, si calcolano facilmente le altre mediante la risoluzione di un triangolo sferico. Si consulti per la teoria delle refrazioni la *Meccanica celeste* di Laplace, ed un' opera notabilissima di Kramp intitolata: *Refrazioni astronomiche*.

I crepuscoli sono anch' essi fenomeni prodotti dalla refrazione dei raggi solari. Quando il sole è al di sotto dell' orizzonte ed i suoi raggi refratti dall' atmo-

sfera non fanno che radere la terra senza giungere all' occhio, la reflessione che fanno loro provare le molecole dell' aria rende la loro luce visibile, cosicchè il giorno comincia qualche tempo prima del levare apparente del sole, come non finisce che qualche tempo dopo il suo tramonto. Nei nostri climi i crepuscoli cominciano o cessano quando il sole è al di sotto dell' orizzonte circa 18°. Il crepuscolo del mattino dicesi l' *aurora*.

Refrazione Terrestre (*Geodesia*). Gli oggetti situati in vicinanza della superficie della terra e veduti da lungi sembrano ordinariamente più elevati di quello che lo siano in realtà, perchè la trajettoria luminosa che ne trasmette l' immagine volge la sua convessità verso il cielo. Per esempio, l' oggetto D (*Tav.* CLXXXIX, *fig.* 3), osservato dal punto A alla distanza di 12000 metri almeno, è veduto in D' per l' effetto della refrazione, vale a dire nella direzione della tangente AD' alla trajettoria AMD, e l' angolo D'AD è la misura di questa refrazione.

Siccome la curva descritta dalla luce ha poca estensione, le si sostituisce il suo circolo osculatore, e allora l' angolo di refrazione DAD', che ha per misura la metà dell' arco AMD, è sensibilmente proporzionale alla distanza orizzontale AB, intercetta tra le due verticali dei punti A e D. Se dunque r indica la refrazione, e C è l' angolo di queste due verticali, si avrà in generale

$$r = nC,$$

ove n è un coefficiente costante per un medesimo stato dell' atmosfera e variabile con questo stato. Per determinarne il valore mediante l' osservazione, chiamiamo δ la distanza zenitale apparente ZAD', e δ' la distanza zenitale apparente Z'DA'; e supponiamo che queste due distanze reciproche siano prese nel medesimo istante da due osservatori, affinchè le circostanze atmosferiche siano le stesse pei due punti. Le distanze zenitali vere saranno respettivamente $\delta + r = $ ZAD, e $\delta' + r = $ ZDA; perchè, per supposizione, la refrazione alza gli oggetti A e D di una stessa quantità; e il triangolo ACD offrirà necessariamente questa relazione

$$\delta + r + \delta' + r = 180^\circ + C,$$

che dà

$$r = 90^\circ + \frac{C}{2} - \frac{1}{2}(\delta + \delta').$$

Così si ha

$$n = \frac{r}{C} = \frac{90^\circ + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{C}.$$

Tale è l' espressione trigonometrica del coefficiente della refrazione terrestre. Per ottenerla numericamente, si valuterà in secondi l' angolo al centro della terra, per mezzo dell' arco AB = K dato dalla triangolazione, e si avrà $C = \frac{K}{R \text{ sen } 1''}$, essendo R = 6366198^m il raggio terrestre.

Le operazioni trigonometriche hanno fatto conoscere che nello stato medio dell' atmosfera si ha $n = 0{,}08$; la refrazione è dunque circa $\frac{1}{12}$ dell' arco che misura la distanza alla quale si vedono gli oggetti. *La Base del sistema metrico*

decimale di Delambre presenta per la prima volta un numero grande di esempj di questa determinazione.

È pure per effetto delle refrazioni, le quali nelle regioni basse dell'atmosfera sono spesso tanto alterate da rendere talvolta negativo il valore di n, che in alcuni luoghi riscaldati dalla presenza del sole si manifesta il fenomeno singolare conosciuto sotto il nome di *Fata Morgana*. Si consulti una Memoria di Biot intitolata: *Ricerche sulle refrazioni straordinarie che si osservano in vicinanza dell' orizzonte.*

La teoria della refrazione terrestre essendo una conseguenza di quella delle refrazioni atmosferiche in generale, il lettore potrà vedere principalmente nel libro X della *Meccanica celeste* su quali considerazioni fisiche e analitiche essa riposi. Quanto alle sue applicazioni, sono esse l'oggetto di una nota inserita da Puissant nel *Rendiconto delle sedute dell' Accademia delle Scienze* (15 Maggio 1837), e successivamente nel secondo volume della *Nuova descrizione geometrica della Francia*, pag. 24. In appresso ne daremo un'idea.

Non termineremo questo articolo senza far vedere come si potrebbero determinare con una certa precisione le altezze relative di una serie di sommità visibili le une dalle altre, osservando semplicemente le distanze zenittali reciproche di queste sommità confrontate l'una coll' altra, ma in circostanze atmosferiche favorevolissime.

Primieramente si osserverà che la formula della quale si fa uso per calcolare la differenza di livello di due stazioni per mezzo delle loro differenze zenittali reciproche è la seguente

$$dE = \frac{K \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)} \ldots\ldots (2),$$

ove C è l'angolo delle verticali delle due stazioni. Questa formula, sviluppando il suo denominatore, può mettersi sotto questa forma

$$dE = \frac{2R \tan \frac{1}{2} C \tan \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{1 - \tan \frac{1}{2} C \tan \frac{1}{2}(\delta' - \delta)},$$

perchè, essendo R il raggio medio della terra, si ha $K = 2R \operatorname{sen} \frac{1}{2} C$, ritenendo sempre come si è fatto di sopra che C è l'angolo delle verticali nelle due stazioni. Ora, tra l'angolo C, le distanze zenittali apparenti δ e δ' e le refrazioni corrispondenti r, r' esiste la relazione

$$\delta + \delta' + r + r' = 180° + C;$$

e siccome in generale $r = nC$, $r' = n'C$ in forza di ciò che abbiamo dimostrato, è evidente che supponendo $r = r'$ si ha

$$\frac{1}{2} C = \frac{90° - \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{2n - 1};$$

così, senza errore sensibile, si ha

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \frac{\cot \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{2n - 1}$$

Basta dunque conoscere il coefficiente n della refrazione per poter calcolare l'angolo C delle verticali e conseguentemente la differenza (1) di livello. Come abbiamo di sopra avvertito, non si commetterà verun errore sensibile supponendo $n = 0,08$, e si potrà ancora a motivo delle piccolezza di C e della semidifferenza delle distanze zenittali ridurre la formula (1) alla seguente

$$dE = \frac{2R \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)}{2n - 1} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \ldots (2).$$

Questo metodo meriterebbe di esser tanto più usato in una esplorazione scientifica, in quanto che procurerebbe il mezzo di livellare prontamente, con poca spesa e con sufficiente esattezza le altezze relative di tutti i punti che offrissero maggiore interesse ai geologi: ed è anco con questo metodo che si otterrebbero in un modo approssimato le distanze respettive degli oggetti che fossero stati osservati, perchè si dedurrebbero naturalmente dalla espressione

$$K = 2R \operatorname{sen} \frac{1}{2} C.$$

Quantunque la teoria fisica della refrazione terrestre, quale è stata esposta da Laplace nel libro X della sua *Meccanica celeste*, lasci ancora qualche cosa a desiderare per esser posta in perfetta armonia coi fenomeni naturali, non se ne ottengono per questo resultati meno soddisfacenti in tutti i casi nei quali lo stato dell'atmosfera si allontana poco dall'ipotesi di questo illustre geometra. Per esempio, egli ha dimostrato che il coefficiente della refrazione che di sopra abbiamo indicato con n, e che è proporzionale alla densità dell'aria nel luogo dell'osservazione, ha per espressione

$$n = \frac{1}{4} P \rho \frac{r}{l},$$

indicando con P il potere refrangente dell'aria, con ρ la sua densità, con r il raggio della terra supposta sferica e con l il rapporto delle densità del mercurio a quella dell'aria moltiplicato per l'altezza del barometro nello stesso luogo; nel qual caso si ha $l = 7960$. Si consulti la *Geodesia* di Puissant, tom. II, pag. 25, non meno che il suo supplemento.

Non ostante riesce più esatto il moltiplicare l'espressione precedente di n pel fattore $(1 - il)$ nel quale i è un coefficiente dipendente dalla legge del decrescimento del calore nell'atmosfera, coefficiente in generale variabilissimo, ma che si può supporre ordinariamente eguale a 0,0000193 pei calcoli di Piana. Per un altro lato, secondo le esperienze esattissime dei sigg. Biot e Arago, si è trovato a Parigi

$$\frac{1}{4} P = 0,00014718,$$

sotto la pressione $0^m,76$ e alla temperatura zero, essendo l'aria perfettamente asciutta: e siccome d'altronde

$$\rho = \frac{h_0}{0^m,76(1 + 0,00375t)},$$

indicando con h_0 l'altezza del barometro ridotta alla stessa temperatura zero, e con t la temperatura attuale dell'aria; ed essendo il coefficiente $\beta = 0{,}00375$ di t la dilatazione di un volume d'aria per un grado centigrado. Ciò posto, si ha approssimativamente

$$\text{Log}\, n = 3{,}09095 + \text{Log}\, h_0 - \text{Log}\,(1 + \beta t) + \text{Log}\left(\frac{1}{l} - 0{,}0000\,1393\right)$$

e

$$\text{Log}\, \frac{1}{l} = 6{,}09909 - \text{Log}\,(1 + \beta t)\,;$$

ma occorre prima ridurre alla temperatura zero la lunghezza h della colonna del mercurio del barometro, il che si otterrà facendo

$$h_0 = \frac{h}{1 + \frac{1}{5550}t'} = \frac{h}{1 + \beta' t'}\,,$$

nella quale espressione t' indica la temperatura segnata dal termometro del barometro, e $\beta' = \frac{1}{5550} = 0{,}00018$ la dilatazione cubica del mercurio.

Determinando in tal guisa il coefficiente della refrazione, possono spesso ottenersi con un grado di precisione sufficiente le differenze di livello per mezzo delle operazioni trigonometriche accompagnate da simultanee misure barometriche, facendo uso soltanto di una delle distanze zenittali dei due oggetti posti in confronto. Per darne un esempio, scegliamo alcuni degli elementi angolari e meteorologici presi al Monte d'Oro e al Puy-de-Dôme, in occasione della misura di un arco di parallelo (Si riscontri la *Nuova Descrizione della Francia*, tom. II, pag. 650).

1.° Sul *Monte d'Oro*, nel Settembre 1811, dopo venti ripetizioni, si è ottenuto per la distanza zenittale dal *Puy-de-Dôme*, ridotta al vertice del segnale, $Z = 90° \; 55' \; 48'',54$.

Allora il barometro segnava .... $0^m,59605 = h$
il termometro del barometro......... $+ 14°,75 = t'$
il termometro libero............... $+ 12,9 = t$

Inoltre erasi ottenuto dalla triangolazione

$$\text{Log}\, K = 4{,}4709248\,,$$

essendo K la distanza orizzontale compresa tra i due segnali. Se dunque s'indica con C l'angolo delle verticali alle due estremità di K, e se d'altronde si sa che il raggio R della terra, o piuttosto la normale nella stazione del Monte d'Oro, ha per logaritmo

$$\text{Log}\, R = 6{,}8053366\,,$$

si troverà facilmente

$$C = \frac{K}{R \,\text{sen}\, 1''} = 955'',02.$$

2.° Sul *Puy-de-Dôme*, nel Giugno 1812, e con dieci ripetizioni, la distanza zenittale dal Monte d'Oro, ridotta al vertice del segnale di questa stazione, era $Z' = 89° \; 17' \; 48'',91$

Allora il barometro segnava .... $0^m,64407 = h$
il termometro del barometro........ $+17° = t'$
il termometro libero .... $+15° = t$

Si tratta ora di calcolare approssimativamente le refrazioni locali nell'istante stesso della misura delle distanze zenittali: ora si ha in generale

$$\text{Refrazione } \theta = nC,$$

e dalle altezze barometriche e termometriche relative alla stazione del Monte d'Oro e introdotte nell'espressione precedente di Log n, ritenuto che si abbia

$$\frac{1}{l} = 0.00011983, \quad \text{e} \quad \text{Log}\left(\frac{1}{l} - \varepsilon\right) = 6,02490,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} & 3,09095 \\ \text{Log } h &= 9,77525 \\ \text{comp. Log}(1 + \beta t) &= 9,97947 \\ \text{comp. Log}(1 + \beta' t') &= 9,99887 \\ \text{Log}\left(\frac{1}{l} - \varepsilon\right) &= 6,02490 \\ \hline \text{Log } n &= 8,86944 \\ \text{Log C} &= 2,98001 \\ \hline \text{Log } \theta &= 1,84945 \\ \text{Refrazione } \theta &= 70'',71 \end{aligned}$$

Operando nella stessa maniera per la stazione del Puy-de-Dôme, si ha primieramente

$$\frac{1}{l} = 0,00011894, \quad \text{Log}\left(\frac{1}{l} - \varepsilon\right) = 6,02123,$$

e quindi

$$\begin{aligned} & 3,09095 \\ \text{Log } h &= 9,80893 \\ \text{comp. Log}(1 + \beta t) &= 9.97625 \\ \text{comp. Log}(1 + \beta' t') &= 9.99866 \\ & 6,02123 \\ \hline \text{Log } n' &= 8,89602 \\ \text{Log C} &= 2,98001 \\ \hline \text{Cog } \theta' &= 1,87603 \\ \text{Refrazione } \theta' &= 75'',16. \end{aligned}$$

La somma di queste due refrazioni locali, cioè

$$\theta + \theta' = 145'',87 = 2' \; 25'',87,$$

aggiunta a quella delle due distanze zenittali apparenti Z, Z', dà per la somma delle distanze zenittali vere

$$Z + Z' + \delta + \delta' = 180^\circ\ 16'\ \ 3'',32$$

$$\text{ma bisognerebbe che si avesse}\ \ 180^\circ + C = 180\ \ 15\ \ 55\ ,02$$

$$\text{dunque l' errore è di}\ \ldots\ldots\ldots\ \ 8'',30$$

errore che deve in gran parte attribuirsi alla formula della quale ci siamo serviti per calcolare le refrazioni: quest' errore però è così piccolo che la sua influenza sulla determinazione della differenza di livello per mezzo di una delle due distanze zenittali non può essere di nessuna importanza. Infatti, calcolando questa differenza di livello per mezzo della nota formula

$$dE = \frac{K \cot Z}{\cos \frac{1}{2} C} + (0,5 - n)\,\frac{K^2}{R\ \text{sen}^2 Z},$$

si ha pel Monte d' Oro, la cui sommità è elevata 1886 metri al di sopra del livello medio dell' Oceano,

$$\begin{aligned}
\text{Log}\,K &= 4,4709248 \\
\text{Log}\cot Z &= 8,2104685 - \\
\text{comp. Log}\cos \tfrac{1}{2} C &= 0,0000011 \\
\text{Log del } 1^\circ \text{ termine } & \overline{2,6813944} -
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{Log}\,(0,5 - n) &= 9,62938 + \\
2\,\text{Log}\,K &= 8,94185 \\
\text{comp. Log}\,R &= 3,19466 \\
2\,\text{comp. Log sen}\,Z &= 0,00012 \\
\text{Log del } 2^\circ \text{ termine} &= \overline{1,76601}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1^\circ \text{ termine} \ldots\ldots\ &- 480^m,17 \\
2^\circ \text{ termine} \ldots\ldots\ &+ \ \ 58\ ,35 \\
\text{Differenza di livello} \ldots\ dE &= -\overline{421^m,82}
\end{aligned}$$

Pel Puy-de-Dôme, la cui altezza assoluta è di metri 1466, si ha

$$\begin{aligned}
\text{Log}\,K &= 4,4709248 \\
\text{Log}\cot Z' &= 8,0889059 \\
& \ \ \underline{0,0000011} \\
\text{Log del } 1^\circ \text{ termine } & 2,5598318
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{Log}\,(0,5 - n) &= 9,62458 \\
2\,\text{Log}\,K &= 8,94185 \\
\text{comp. Log}\,R &= 3,19466 \\
& \ \ \underline{0,00012} \\
\text{Log del } 2^\circ \text{ termine} &= 1,76121
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1^\circ \text{ termine} \ldots\ldots\ &+ 362^m,94 \\
2^\circ \text{ termine} \ldots\ldots\ &+ \ \ 57\ ,70 \\
\text{Differenza di livello} \ldots\ dE &= \overline{420^m,64}
\end{aligned}$$

Nel primo caso, il valore di dE è negativo, perchè il Monte d' Oro essendo più elevato del Puy-de-Dôme, la cotangente della distanza zenittale Z è negativa; e nel secondo caso ha luogo il contrario. Questi due valori, che servonsi reciprocamente di riprova, non differendo tra loro che di $18^m,8$, il loro medio $421^m,23$ rappresenta con sufficiente esattezza la differenza di livello cercata: ed è da notarsi che questo resultato è quasi affatto indipendente dagli errori che alterano le refrazioni calcolate teoricamente.

Si può ricorrere per maggiori particolarità su questo metodo alla *Nuova Descrizione della Francia*, tomo II, alla *Geodesia* di Puissant, non meno che ad una interessante memoria *Sulla teoria fisica delle refrazioni terrestri*, inserita da Biot nella *Connoissance des temps* pel 1842.

REGGIO (Francesco), celebre astronomo italiano, nato nel 1743 a Genova. Entrò giovanissimo nei Gesuiti, ed insegnò teologia nel collegio della sua città nativa: ma alla soppressione del suo ordine si diede tutto alle matematiche e specialmente all' astronomia, scienze che innanzi coltivate aveva solo per suo sollievo. Divenne compagno di Oriani e di De Cesaris nell' osservatorio di Brera. Nel 1776 determinò la latitudine e la longitudine di Pavia e di Cremona, e stabilì la differenza del meridiano di queste due città con quello di Milano. Cooperò alla formazione della carta dell' alta Italia, che non fu terminata che nel 1794, e si occupò finchè visse in una moltitudine di altri lavori e osservazioni. Morì a Milano il 10 Ottobre 1804. Il p. Reggio, che era socio delle accademie di Torino e di Mantova, ha composto un numero grande di memorie che leggonsi nelle *Effemeridi astronomiche* del De Cesaris dal 1775 in poi. Le principali sono le seguenti: sull' *Anello di Saturno*, 1775; — sui *Diametri del sole e della luna*, 1776; — sugli *Strumenti dell' osservatorio di Milano*, 1782; — sull' *Obliquità dell' ecclittico*, 1785; — *Osservazioni sui pianeti di Piozzi e di Olbers*, 1802.

REGIOMONTANO. *Vedi* Muller.

REGOLA. (*Aritm.*). Operazione che si eseguisce sopra numeri per ottenere un resultamento. Le operazioni o le *regole primitive* dell' aritmetica si chiamano: *l' addizione*, *la sottrazione*, *la moltiplicazione*, *la divisione*, *l' elevazione alle potenze*, e *l' estrazione delle radici*. (*Vedi* Questa diversa parola).

Tutte le altre regole nascono da queste. (*Vedi* Alligazione, Compagnia, Sconto, Falsa posizione, Interesse, Regola del tre, ec.).

REGOLATORE (*Mecc.*). Nome generico di tutti gli ordegni meccanici destinati a regolare i movimenti delle macchine. *Vedi* Pendolo Conico e Volano.

REGOLARE. (*Geom.*). Una figura regolare è quella di cui tutti gli angoli e tutti i lati sono respettivamente uguali.

Il triangolo equilatero e il quadrato sono figure regolari. Tutti i poligoni *regolari* possono essere inscritti e circoscritti al circolo. (*Vedi* Circolo e Poligono).

Un *solido regolare* è un corpo terminato da tutte le parti con superficie piane, le quali sono poligoni regolari eguali tra loro, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali. (*Vedi* Solido).

Non vi sono che cinque corpi *regolari*, cioè: l' *essaedro*, o il *cubo*, il *tetraedro*, l' *ottaedro*, il *dodecaedro*, e l' *icosaedro*. (*Vedi*. Poliedro).

Questi cinque solidi regolari possono essere inscritti in una *sfera* (*vedi* questa parola), e se s' indica con r il raggio della sfera, le dimensioni dei solidi inscritti saranno espresse dalle seguenti formule:

$$\text{Tetraedro}\begin{cases}\text{Lato} \ldots\ldots\ldots & \frac{3}{2}r\\ \text{Superficie} \ldots\ldots & \frac{9}{4}r^2\sqrt{3}\\ \text{Volume} \ldots\ldots & \frac{3}{8}r^3\sqrt{3}\end{cases}$$

Essaedro:

- Lato .... $\frac{1}{3} r \sqrt{10}$
- Superficie ..... $\frac{20}{3} r^2$
- Volume .... $\frac{40}{27} r^3$

Ottaedro:

- Lato .... $\frac{1}{4} r \sqrt{21}$
- Superficie ..... $\frac{21}{8} r^2 \sqrt{3}$
- Volume....... $\frac{21}{32} r^3 \sqrt{3}$

Dodecaedro:

- Lato .... $\frac{1}{6} r \sqrt{\left[\frac{11\sqrt{5}}{2}-\right]} . \sqrt{\left[\sqrt{5}-1\right]}$
- Superficie ..... $\frac{55}{12} r^2 \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]} . \sqrt{\left[1+\sqrt{5}\right]}$
- Volume ..... $\frac{275}{216} r^3 \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]} . \sqrt{\left[1+\sqrt{5}\right]}$

Icosaedro:

- Lato .... $\frac{1}{10} r \sqrt{57}$
- Superficie ..... $\frac{57}{20} r^2 \sqrt{3}$
- Volume ..... $\frac{171}{200} r^3 \sqrt{3}$

Si potranno paragonare queste dimensioni con quelle della sfera osservando che se s' indica con π la semi-circonferenza il cui raggio è l' unità, si ha per la sfera il cui raggio è r

Circonferenza di un gran circolo ..... $2\pi r$
Superficie di un gran circolo .... πr^2
Superficie della sfera .... $4\pi r^2$

Volume della sfera .... $\frac{4}{3}\pi r^3$

(*vedi.* Sfera).

REGOLO (*Astron.*). Nome di una stella di prima grandezza nella costellazione del Leone.

REGRESSO (Punto di) (*Geom.*) Il punto di *regresso* è quello nel quale una curva cangia bruscamente direzione e ritorna in addietro. *Vedi* Punto Singolare.

RENDITA VITALIZIA. *Vedi* Vitalizio.

RESIDUO. (*Alg.*). Questa parola la cui significazione ordinaria è la stessa di quella di *resto*, è stata impiegata dal Gauss per indicare i numeri la cui differenza

può esser divisa esattamente per un altro numero, preso per termine di paragone, e che si chiama il *modulo*. Per esempio se *m* divide la differenza di due numeri *a* e *b*, ciascuno di questi numeri è *residuo* dell'altro in rapporto al *modulo m*. (*Vedi* CONGRUENZA).

RESISTENZA (*Mec.*). Si dà generalmente questo nome a qualunque forza che agisce in senso contrario di un'altra, di cui essa distrugge o diminuisce gli effetti.

Nelle macchine in moto, si dividono le resistenze in *attive* e in *passive*. La *resistenza attiva* è quella che corrisponde all'*effetto utile*, e la *resistenza passiva* quella che resulta dalla costituzione stessa della macchina. Supponiamo, per esempio, che per elevare una secchia piena di acqua dal fondo di un pozzo alla sua sponda, con l'aiuto di una corda che passa sopra una puleggia, sia necessario di esercitare uno sforzo costante equivalente ad un peso di 16 chilogrammi, e che il peso dell'acqua elevato non sia che di 11 chilogrammi, la resistenza totale vinta dal motore si comporrà dunque, 1° di una resistenza *attiva* di 11 chilogrammi, rappresentante l'effetto utile che essa produce, 2° di una resistenza *passiva* di 5 chilogrammi, resultante dall'attrito della puleggia sul suo asse, dalla rigidezza della corda e dal peso della secchia. (*Vedi* EFFETTO UTILE).

Le *resistenze* possono essere classate mediante la natura dei corpi resistenti e le diverse circostanze nelle quali essi sono posti. Così possiamo considerare:

1. La resistenza tra le superficie di due corpi contigui. (*Vedi* ADESIONE e ATTRITO).

2. La resistenza tra le molecole contigue dei corpi tanto solidi, quanto fluidi.

3. La resistenza che i corpi solidi oppongono alla penetrazione. (*Vedi* PERCUSSIONE).

4. La resistenza che i fluidi oppongono ai moti dei corpi i quali vi sono immersi.

La teoria matematica della resistenza dei fluidi tanto importante per le costruzioni navali, è ancora disgraziatamente poco avanzata, e fin qui gli sforzi dei più gran matematici sono stati insufficienti per stabilirla in un modo, non solamente rigoroso, ma almeno soddisfacente. Mediante il Newton, si era generalmente ammesso che questa resistenza è nel rapporto composto del quadrato della velocità del corpo in moto, dell'estensione della superficie del fluido che resiste e della densità del fluido; ma un gran numero di esperienze, fatte principalmente in Francia, hanno provato che questi principii sono incerti. Essi non si accordano presso a poco con i fatti che per le velocità medie; ma per le velocità grandissime e piccolissime essi se ne allontanano molto. *Vedi* sopra questo soggetto la *meccanica* dell'Eulero, l'*Idrodinamica* di D. Bernoulli, il *Trattato d'Artigliería* del Robins, la Memoria del Borda (*Mémoires de l'Acad.*, 1763), e i lavori del D'Alembert, del Condorcet e del Bossut. *Vedi* ancora in questo *Dizionario*, per la resistenza dell'aria, l'articolo BALISTICA e l'articolo RESISTENZA DEI FLUIDI.

SOLIDO DELLA MINIMA RESISTENZA. È uno dei più semplici della classe dei problemi chiamati gli *isoperimetri*. Il primo a proporlo e risolverlo fu il Newton; dopo di esso è stato trattato dall'Eulero, dal Simpson, dall'Emerson, dal Lacroix (*Vedi* il tomo II del *gran trattato del calcolo differenziale* del Lacroix) e dal Maclaurin.

Ecco la figura di questo solido: sia DNG (*Tav.* XLVII, *fig.* 2), una curva tale che se da un punto qualunque N si conduca una tangente NG, e che da un punto dato F si conduca a questa tangente la parallela FR, prolungata fino a tanto

che essa incontri l'asse in R, l'ordinata MN stia a GR come $\overline{GR}^3$ sta a $4BR\times\overline{BG}^2$. Il solido descritto dalla rivoluzione di questa curva intorno del suo asse AB e che si muove in un fluido da A verso B, troverà meno resistenza che qualunque altro solido circolare della stessa base.

RESISTENZA DEI FLUIDI. (*Idrodinam.*). Forza mediante la quale i corpi solidi che si muovono nei fluidi sono ritardati nel loro moto.

Un solido non può evidentemente muoversi in un fluido senza mettere in moto le molecole fluide che esso incontra successivamente, e senza sviluppare inoltre una certa forza per vincere l'aderenza di queste molecole. La resistenza che esso prova proviene da due cause distinte: la prima resulta dalla velocità che esso comunica alle molecole fluide, e che gli fa perdere a ciascuno istante una parte della sua quantità di moto (*vedi* Comunicazione di moto); la seconda dall'aderenza delle molecole o di ciò che chiamasi la *viscosità del fluido*. Quest'ultima, nei fluidi elastici, è molto più piccola della prima in tutti i liquidi aventi poca viscosità.

1. Lasciando da parte la resistenza dovuta alla viscosità, consideriamo un corpo solido M (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 1) del quale indicheremo con A l'area della superficie anteriore, quella che colpisce il fluido, e supponiamo che questo corpo si muova in una direzione MD perpendicolare alla sua superficie A. In un tempo infinitamente piccolo dt, nel quale possiamo supporre costante la velocità v del corpo, il mobile si avanzerà nella direzione MD di una quantità vdt, e conseguentemente muoverà un volume di fluido che avrà per espressione

$$Avdt.$$

Indicando con δ la densità del fluido, $\delta Avdt$ rappresenterà la massa mossa, e ammettendo che questa massa possa essere assomigliata ad un corpo duro urtato da un altro corpo duro, di una massa M e di una velocità v, la velocità che gli sarà comunicata avrà per valore, (*vedi*. Urto)

$$\frac{\delta A\,vdt\,.\,v}{M+\delta\,Avdt},$$

ovvero semplicemente

$$\frac{\delta\,Av^2dt}{M},$$

perchè la massa $\delta Avdt$ è infinitamente piccola rapporto ad M. Ora, questa velocità guadagnata dalla massa fluida è esattamente quella che è perduta dalla massa M; così nell'istante dt, questa massa M perde una quantità di moto uguale a

$$\frac{\delta\,Av^2dt}{M}\times M,\quad \text{ovvero}\quad \delta\,Av^2dt.$$

Se ora si ammette che il prisma fluido urtato si annulli dopo l'urto, e che un altro prisma fluido gli succeda per produrre lo stesso effetto, la quantità δAv^2dt, nella quale v varierà a ciascun istante, indicherà la forza che la reazione del fluido fa perdere al mobile o la resistenza che esso prova a ciascun istante, e chiamando R questa resistenza, si avrà l'equazione

$$R=\delta\,Av^2dt\,\ldots\ldots\,(1);$$

ma, per le stesse ragioni, un altro corpo di una superficie anteriore, A' muovendosi con una velocità v', in un fluido di una densità δ', proverà una resistenza

$$r = \delta' A' v'^2 dt.$$

dunque

$$R : r = \delta A v^2 : \delta' A' v'^2,$$

vale a dire che se due corpi si muovono con velocità differenti in fluidi differenti, le resistenze che essi proveranno in un medesimo istante, saranno in ragione composta delle densità, delle superficie e dei quadrati delle velocità.

Per ricavare dall' espressione (1) una misura della resistenza, osserviamo che indicando con h l'altezza dovuta alla velocità v^2, si ha

$$v^2 = 2gh,$$

g essendo la forza di gravità, e conseguentemente

$$R = 2g\delta Ahdt.$$

Ma poichè g è la velocità che la gravità genera in un secondo di tempo, gdt è la velocità generata da questa stessa forza nell' istante dt, e siccome $2\delta Ah$ esprime la massa di un prisma di fluido avente $2A$ per base ed h per altezza, $2\delta Ah \times gdt$ rappresenta la quantità di moto che questo prisma acquisterebbe nell' istante infinitamente piccolo dt per l'azione libera della gravità, vale a dire il peso di questo prisma; così *la resistenza che prova un solido il quale si muove in un fluido in riposo, è uguale al peso di un prisma di questo fluido, che avrebbe per base la superficie urtata, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità con la quale il solido si muove all' istante in cui si vuol misurare la resistenza.*

3. Questa misura non si riferisce che al caso in cui la direzione del moto è perpendicolare alla superficie urtante, se l' urto è obliquo, vale a dire se la direzione del moto fa un angolo $AMD = \alpha$ (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 3), con la superficie urtante, bisogna, per ottenere l'espressione della resistenza, decomporre la velocità v che ha luogo nella direzione MD in due altre, l' una nella direzione MF, perpendicolare alla superficie, l' altra nella direzione MA, parallela a questa stessa superficie; la prima componente, il cui valore è $v \operatorname{sen} \alpha$, operando sola per respingere il fluido; la questione si trova riportata a determinare la resistenza che ha luogo sopra la superficie A, che si muove con una velocità $v \operatorname{sen} \alpha$, in una direzione perpendicolare MF, e basta, per conseguenza, di sostituire $v \operatorname{sen} \alpha$ a v in tutte le formule precedenti; l' espressione (1) della resistenza diviene così

$$R = \delta A v^2 dt \operatorname{sen}^2 \alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

e ne resulta che nel caso di un urto obliquo la resistenza è proporzionale: 1.° al quadrato della velocità effettiva; 2.° alla densità del fluido; 3.° all' area della superficie urtante: 4.° al quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, o dell' angolo che fa la superficie con la direzione del moto. D' altra parte, è evidente, che per misurare la resistenza in peso, bisogna moltiplicare il peso che misura la resistenza che si avrebbe supponendo l' urto diretto, per il quadrato del seno dell' angolo d' incidenza.

4. La teoria che abbiamo esposto è quella che altre volte era generalmente ammessa; non l' abbiamo riprodotta in questo punto che pel motivo che essa è impiegata in diverse opere stimabili, che ancora al giorno d' oggi possiamo

consultare con qualche vantaggio; ma non dobbiamo però contentarci delle indicazioni che essa dà che in casi particolarissimi, e nell'impossibilità, in cui si trova ancora la scienza, di stabilirne un'altra che meglio si accordi con i fatti, bisogna però aver ricorso all'esperienza della quale ora indicheremo i resultamenti.

5. Nel 1775 il Bossut, il D'Alembert e il Condorcet intrapresero, per ordine del governo francese, diverse serie d'osservazioni sopra la resistenza dei fluidi. Queste osservazioni, fatte sopra una scala molto più vasta di tutto ciò che era stato tentato fin allora, ebbero luogo in un vasto recipiente di acqua, situato nel recinto della scuola militare a Parigi, si servirono di molti battelli, di forme e dimensioni differenti, i quali erano messi in moto mediante la discesa di un peso, e si poterono constatare i seguenti fenomeni.

Si è cominciato dall'osservare che nei primi istanti del moto dei battelli, la velocità si accelera per gradi; fintantochè essa è piccolissima, l'acqua si divide facilmente e scorre lungo le pareti laterali del corpo galleggiante, in modo che il liquido rimane sensibilmente a livello col davanti e col di dietro di questo corpo; ma a misura che la velocità aumenta, il liquido con maggior pena si allontana, esso si ammonticchia sul davanti della prora, o superficie anteriore, esso ci forma un gonfiamento che ha più o meno estensione, secondo che la velocità è più o meno grande, e che la prora ha più o meno larghezza; nello stesso tempo il liquido si abbassa verso la parte posteriore del battello e ci forma un vuoto; questo doppio effetto, che si chiama *dilivellazione*, è tanto più sensibile, tutte le cose uguali d'altra parte, quanto la velocità è più grande, dimodochè l'aumento di velocità deve necessariamente aumentare la resistenza che il battello prova per dividere il liquido. Ecco i principali resultamenti di queste esperienze.

1.° Le resistenze di uno stesso corpo, il quale si muove in un fluido con differenti velocità sono sensibilmente proporzionali ai quadrati di queste velocità, almeno tra i limiti di $0^m,60$ a 4^m per secondo.

2.° Le resistenze dirette e perpendicolari delle superficie piane sono sensibilmente proporzionali per una stessa velocità, all'estensioni di queste superficie.

3°. Le resistenze che provengono dai moti obliqui non diminuiscono, con pochissima differenza, d'altra parte tutte le cose uguali, nel rapporto dei seni quadrati degli angoli d'incidenza; dimodochè la teoria precedente dev'essere interamente abbandonata, per ciò che riguarda questo rapporto dei seni, quando gli angoli d'incidenza sono piccoli, poichè essa darebbe allora dei resultamenti molto difettosi; ma pel caso in cui gli angoli d'incidenza sono grandi, come nei limiti da 50° a 90°, possiamo impiegare questa teoria come un mezzo di approssimazione, osservando che essa darà delle resistenze più piccole che le resistenze reali e tanto minori quanto gli angoli si allontaneranno di più dall'angolo retto.

4.° La misura della resistenza diretta e perpendicolare che prova una superficie piana in un fluido indefinito è il peso di un prisma di questo fluido che avrebbe per base questa superficie e per altezza l'altezza dovuta alla velocità. Questo resultamento è la metà di quello che dà la teoria, ma non conviene a tutti i corpi galleggianti.

5.° La viscosità dell'acqua è una resistenza che si deve considerare come infinitamente piccola o come nulla, rapporto a quella che un battello prova spingendo l'acqua, soprattutto quando la velocità è piccolissima.

6.° Finalmente, quando un battello si muove in un canale stretto e poco profondo, la resistenza varia tra limiti alcune volte assai lontani.

6. Altre esperienze fatte dal Dubuat, dal Borda, dallo Smeaton, dal Vince, ecc., tutti confermando questi resultamenti, hanno fatto conoscere diverse

modificazioni resultanti dalla forma dei corpi galleggianti. Così la resistenza non è proporzionale alle superficie che quando i corpi hanno una grossezza almeno uguale ad uno dei lati della faccia urtante, o più generalmente alla radice quadrata dell'area di questa faccia; nel caso contrario, vale a dire per un corpo sottile, la resistenza cresce in un rapporto più grande della superficie.

7. L'espressione della resistenza, che, dopo l'esperienze che abbiamo citate, è

$$\Delta sh,$$

s rappresentando l'area della faccia urtante, h l'altezza dovuta alla velocità e Δ il peso dell'unità di volume del liquido, non può dunque convenire a tutti i corpi galleggianti che aggiungendoci un coefficiente di correzione il cui valore dev'essere determinato per ciascuna specie di corpo in particolare. Indicando questo coefficiente con n e facendo $\Delta = 1000$ chileg., avremo pel peso P che misura la resistenza dell'acqua, espresso in chilogrammi

$$P = 1000nsh \ldots \text{(2)}.$$

Non abbiamo bisogno di fare osservare che s ed h debbono essere riportati al metro come unità.

Il coefficiente n è sensibilmente costante per i solidi simili; esso si riduce all'unità quando la lunghezza del prisma, la sua dimensione orizzontale, è cinque o sei volte più grande di $\sqrt{s}$, e si eleva 1,2 quando questa dimensione differisce poco da $\sqrt{s}$. Se la lunghezza del prisma supera $6\sqrt{s}$, n, in luogo di diminuire, diventa più grande dell'unità; dimodochè in tutti i casi, questo numero non discende al di sotto dell'unità, fintantochè almeno la superficie urtante è piana; poichè si può diminuire considerabilmente la resistenza ponendo, in guisa di prora, sopra la superficie anteriore del prisma un corpo che presenti un tagliente al fluido e cangi l'urto diretto in urto obliquo.

8. L'espressione (2) è identica con quella che esprime gli effetti dell'urto di una vena di acqua sopra un corpo in riposo, e possiamo conchiuderne, questo principio ammesso fin dai tempi del Newton, che lo sforzo necessario per ritenere un corpo colpito da un liquido nel quale esso è immerso è uguale a quello che è necessario per far muovere lo stesso corpo, con la stessa velocità, nel liquido in riposo. Ciò non ostante un'esperienza del Dubuat sembra provare che l'acqua in riposo offre più facilità a lasciarsi dividere che l'acqua corrente; poichè, avendo fatto urtare una piastra quadrata da una corrente di acqua, e in seguito avendola fatta muovere con la stessa velocità in un'acqua in riposo, trovò che la resistenza era più piccola dell'urto nel rapporto dei numeri 1,86 e 1,43. Ma altre esperienze di differenti osservatori non hanno dato i medesimi resultamenti; e siccome d'altra parte le leggi che segue la resistenza sono le madesime di quelle dell'urto, il signor d'Aubisson, eccellente autorità in tutte le questioni d'idraulica, non pensa che vi sia luogo ad ammettere, in generale, una differenza tanto grande nei due casi.

9. Quando il corpo urtante si muove in un canale stretto, la resistenza che esso prova è molto più grande di quella che avrebbe luogo in un canale assai largo perchè si possa considerare l'estensione del liquido come indefinita, perchè l'acqua che scorre sopra le pareti laterali del corpo è racchiusa tra questi parati e le sponde del canale. Mediante l'analisi fatta dal Dubuat delle belle

esperienze del Bossut sopra la resistenza dei canali, se si chiama c la sezione del canale, s la sezione della porzione del prisma immerso nell'acqua, P la resistenza che questo prisma proverebbe in un fluido indefinito, e P' quella che esso prova nel canale, si avrebbe

$$P' = \frac{8,46P}{\frac{c}{s}+2},$$

Le resistenze misurate dal Bossut hanno molto diminuito quando si è adattato alle basi dei prismi retti, impiegati nelle sue esperienze, delle prore angolari; ma la diminuzione è stata molto più piccola che in un fluido indefinito, e tanto minore quanto il canale era più stretto. Il Dubuat ha tenuto conto dell' effetto delle prore angolari esprimendo la resistenza effettiva mediante la formula

$$P'' = P' \left\{ 1 - 0,183(1-q)\left(\frac{c}{s} - 1\right) \right\},$$

nella quale q indica il rapporto tra la resistenza del prisma con prora a quella del prisma senza prora.

10. Queste formule rappresentano assai bene l' esperienze del Bossut, ma esse non sembrano convenire ai grandi canali; poichè nell' applicazione che ne ha fatta il signor d' Aubisson al canale della Linguadoca, le resistenze calcolate sono state sempre quasi doppie delle resistenze date dall' esperienza. Le osservazioni del signor d' Aubisson l' hanno condotto alla formula semplicissima

$$140\frac{s^2v^2}{c+2s},$$

che rappresenta in chilogrammi la resistenza delle barche le quali navigano sul canale della Linguadoca. Sarebbe utilissimo fare simili osservazioni sopra altri canali di navigazione.

11. Abbiamo veduto che, quantunque l' antica teoria dell' urto obliquo sia difettosa (n.° 5, 3°), si poteva impiegarla come un metodo di approssimazione, riserbandosi a correggere i resultamenti del calcolo mediante un coefficiente conveniente di riduzione; ci rimane da indicare i processi d' applicazione, e, per quest' effetto, a far conoscere come si valuta in una data direzione la resistenza perpendicolare alla superficie urtante.

Sia AB il profilo della superficie (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 2) il quale colpisce obliquamente o il quale riceve obliquamente l' urto della vena d' acqua DCBE, lo sforzo normale esercitato contro questa superficie è, mediante ciò che abbiamo veduto (n.° 3),

$$R = \delta A v^2 dt \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Per superare ciò che diventa questo sforzo nella direzione MN perpendicolare ad un piano qualunque il cui profilo è PQ, bisogna decomporre la forza R che opera nella direzione OR in due altre di cui l' una, parallela ad AB, sarà senza azione sopra la superficie, e di cui l' altra, perpendicolare a PQ, rappresenterà lo sforzo cercato; ora, la componente seguendo ON, è

$$R \cos NOS, \quad \text{ovvero} \quad R \operatorname{sen} \alpha.$$

Così lo sforzo esercitato nella direzione MN sopra la superficie A è espresso da

$$\delta A v^2 dt \operatorname{sen}^2 \alpha \,.\, \operatorname{sen} \alpha.$$

Ora, se conduciamo pel punto B un piano CB parallelo a PQ, e che si projetti AB sopra questo piano, la projezione CB sarà equivalente all' area projettata AB moltiplicata pel coseno dell' angolo ABC dei due piani; ma quest' angolo è il complemento dell' angolo α; dunque A sen α è la projezione dell' area A sopra un piano perpendiculare alla direzione MN, e indicando con A' questa projezione, la resistenza nella direzione MN diventa

$$\delta A' v^2 dt \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Osservando che $\delta A' v^2 dt$ esprime la resistenza perpendicolare sopra la superficie A', ne concluderemo che quando una superficie piana qualunque A è esposta obliquamente all' urto di un fluido, se vogliamo sapere l' effetto che quest' urto produce seguendo una data direzione, bisogna immaginare questa superficie projettata sopra un piano perpendicolare alla direzione, e moltiplicare lo sforzo dell' urto diretto sopra la projezione pel quadrato del seno dell' angolo d' incidenza del fluido sopra la superficie primitiva A.

12. Proponiamoci, per esempio, di valutare la resistenza che proverebbe il prisma retto troncato ABCD a muoversi in un' acqua stagnante, in una direzione parallela alla sua lunghezza, presentando all' urto dell' acqua la sua base obliqua AB. (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 4).

Sia l' angolo d' incidenza $\alpha = 30°$ e l' area ABQ $= 4$ metri quadrati. Supponendo che la direzione CB del moto, nel senso della quale si valuta la velocità v, non possa cangiare, la diminuzione di velocità e conseguentemente la resistenza dovrà calcolarsi seguendo questa stessa direzione; così, projettando l' area ABQ sopra un piano perpendicolare a CB, l' area della projezione sarà AEFQ, ovvero

$$4 \,.\, \operatorname{sen} 30° = 4 \times 0,5 = 2.$$

La resistenza diretta sopra quest' area espressa in chilogrammi essendo (n.° 7)

$$P = 1000\, n \,.\, 2 \,.\, h = 2000\, nh,$$

la resistenza cercata sarà

$$P' = 2000\, nh \operatorname{sen}^2 30° = 500\, nh.$$

Se la velocità effettiva è $v = 1^m,50$, si avrà (*vedi* la *Tavola delle altezze* all' articolo Porta) $H = 0,1147$, e ammettendo che la lunghezza del prisma sia cinque a sei volte la radice quadrata dell' area AEFQ, caso in cui si ha $n = 1$, verrà definitivamente

$$P' = 500 \times 0,1147 = 57^{ch.},35.$$

Se si volesse dunque movere il prisma che consideriamo con una velocità costante di $1^m,50$, bisognerebbe esercitare uno sforzo costante di 57 chilogrammi.

Supponiamo ora che il prisma debba presentare la sua piccola base CD, di cui l' area $= 2$ metri quadrati, perpendicolarmente all' urto dell' acqua, la resistenza sarebbe allora

$$P = 1000 \times 2 \times 0,1147 = 229^{ch.},40,$$

vale a dire quattro volte più grande che nel primo caso.

Il primo resultamento $P' = 57^{ch.},35$ è molto piccolo, poichè l'esperienza ha provato che in simili circostanze si avrebbe presso a poco $P = 2P'$.

13. Si scelga un altro esempio proprio a farci apprezzare la teoria. Sia EB (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 5) un parallelepipedo rettangolo avente per dimensione

$$ED = 1^m,30;\quad DC = 0^m,65;\quad AD = 0^m,84.$$

Immaginiamo che questo corpo sia immerso nell'acqua per $0^m,65$ e che esso sia tirato perpendicolarmente alla sua faccia ABCD.

L'area della superficie immersa, sopra la quale si effettua la resistenza, essendo

$$0,65 \times 0,65 = 0^{mq},4225,$$

se facciamo $n = 1,1$, valore che conviene alle dimensioni del prisma, avremo

$$P = 1000 \times 1,1 \times 0,4225\, h = 4647,5\, h,$$

e non rimane più che da dare una velocità qualunque per determinare h e compire la valutazione di P.

Supponiamo ora che si adatti alla faccia urtante una prora il cui taglio orizzontale AGB (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 6) sia un triangolo isoscele, e che il corpo sia sempre tirato perpendicolarmente alla sua faccia AB; gli sforzi sopra le facce inclinate della prora GB ed AG dovendo essere stimate nella direzione del moto, si vede che le projezioni di queste facce inclinate compongono la faccia primitiva AB, dimodochè la somma degli sforzi o la resistenza totale è

$$P \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

α essendo l'angolo d'incidenza mGn o la metà dell'angolo AGB al vertice del triangolo isoscele. Indicando con P' la resistenza del prisma munito della sua prora, avremo dunque

$$P' = 4647,5\, h \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

e, per conseguenza, la resistenza provata dal prisma senza prora starà, alla resistenza con una prora, per una stessa velocità nel rapporto delle quantità

$$4647,5 : 4647,5 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 : \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Facendo successivamente

$$\alpha = 90°,\ 78°,\ 66°,\ \text{ec.},$$

troveremo

Angolo della prora = 2 α	Rapporto della resistenza
180°	1,00
156	0,96
132	0,83
108	0,65
84	0,45
60	0,25
36	0,09
12	0,01.

Rammentiamoci l'esperienze del Bossut. Ad un parallelepido rettangolo di $1^m,30$ di lunghezza, e la cui base aveva $0^m,65$ di larghezza e $0^m,84$ di altezza, si adattarono successivamente un seguito di prore, il cui taglio orizzontale era un triangolo isoscele e il cui angolo anteriore era di mano in mano più acuto. Questo corpo fu convenientemente stabilito in un gran bacino, dove esso s'immergeva di $0^m,65$: esso fu tirato successivamente da diversi pesi, e quando il moto era giunto all'uniformità, si contava il tempo impiegato a percorrere uno spazio di 31 metri. Il rapporto inverso dei quadrati dei tempi, il quale era il rapporto diretto dei quadrati delle velocità, e per conseguenza quello delle resistenze, è indicato alla seconda colonna della seguente tavola; la resistenza del prisma privo di prora è stata presa per unità.

Angolo della prora	Rapporto delle Resistenze
180°	1,00
156	0,96
132	0,85
108	0,69
84	0,54
60	0,44
36	0,41
12	0,40

Si vede che la teoria non si accorda più con la pratica quando l'angolo della prora è più piccolo di 130°, ovvero quando l'angolo d'incidenza è al disotto di 65°.

Questi ultimi rapporti delle resistenze sono preziosi, poichè possiamo prendergli pel valore del coefficiente n dell'espressione generale

$$P = 100unsh,$$

quando il corpo galleggiante è munito di una prora angolare formante un angolo al vertice uguale ad uno di quelli della tavola, e che inoltre la lunghezza di questo corpo è cinque a sei volte la sua larghezza.

14. Se la superficie urtante fosse curva, i calcoli diventerebbero complicatissimi. Bisognerebbe decomporre questa superficie in un grandissimo numero di parti perchè si potesse considerare ciascuna di esse come piana; determinare la projezione di ciascuna parte sopra un piano perpendicolare alla direzione nella quale si trattasse di valutare la resistenza; determinare similmente il seno d'incidenza del fluido sopra ciascuna parte; poi, dopo aver moltiplicato ciascuna projezione pel quadrato del seno d'incidenza, prendere la somma di tutti i prodotti. Ma questa teoria della resistenza proporzionale ai quadrati del seno d'incidenza, che dà resultamenti troppo deboli per le superficie piane, ne dà al contrario dei troppo forti per le superficie curve; dimodochè essa dev'essere rigettata in tutti i casi; e quantunque sia ben constatato che una prora terminata da superficie curva diminuisce molto più la resistenza di una prora angolare a superficie piane, la determinazione della forma da dare alle diverse parti di un corpo galleggiante perchè provi la più piccola resistenza possibile, dipende dal problema conosciuto sotto il nome del *solido della minima resistenza* e che interessa l'arte nautica ad un sì alto grado, questa determinazione, diciamo, è ancora impossibile nello stato attuale delle nostre conoscenze. Vedremo che la teoria della resistenza dei fluidi elastici non è molto più avanzata di quella della resistenza dei liquidi; ma che siamo almeno giunti a rappresentare i principali fatti con formule empiriche sufficientemente esatte.

15. La teoria (n.° 1) che altre volte si applicava ai fluidi elastici come ai liquidi indica che la resistenza provata da una superficie piana, la quale si muove in un fluido qualunque, è proporzionale alla densità del fluido, all'estensione della superficie urtante, e al quadrato della sua velocità effettiva; dimodochè indicando con ϖ il peso dell'unità di volume del fluido, con s l'area della superficie, con v la velocità effettiva, e con m un numero costante, si avrebbe, qualunque sia il fluido, per la resistenza normale R valutata in peso

$$R = m \varpi s v^2.$$

Ma l'esperienze del Borda e dell'Hutton hanno fatto conoscere che la resistenza sopra le piastre sottili e ancora sopra i solidi simili cresce in un rapporto più grande delle superficie, e che essa è sensibilmente proporzionale alle potenza $\frac{11}{10}$ ossia 1,1 della superficie. Quanto alle velocità, la resistenza non è proporzionale ai loro quadrati che quando esse non superano molto i 10^m; nelle grandi velocità, per esempio in quelle delle palle da cannone, la resistenza cresce molto più rapidamente, e l'Hutton fa entrare nella sua espressione non solamente il quadrato, ma ancora la prima potenza della velocità. (*Vedi*. BALISTICA). Il coefficiente sarebbe mediamente $= 0,11$ secondo il Borda e l'Hutton. Modificando l'espressione di R mediante questi dati, avremo nel caso delle velocità ordinarie,

$$R = 0,11 \, \varpi s^{1,1} v^2 \; \ldots\ldots (3).$$

Quest' espressione indica la resistenza quando la superficie s riceve direttamente l'urto; quando l'urto è obliquo, bisogna moltiplicare il valore di R per una funzione del seno d'incidenza, che l'Hutton rappresenta con

$$\left(\text{sen } \alpha\right)^{1.84 \cos \alpha}.$$

La resistenza dovuta all'urto obliquo sarebbe dunque data dalla formula

$$R' = 0,11 \, \varpi s^{1,1} v^2 \left(\text{sen } \alpha\right)^{1,84 \cos \alpha} \; \ldots\ldots (4),$$

e la resistenza nel senso del moto, che ordinariamente è quella che importa conoscere, diventerà

$$R'' = 0,11 \, \varpi s_1^{1,1} v^2 \left(\text{sen } \alpha\right)^{1,84 \cos \alpha} \; \ldots\ldots (5),$$

s_1 indicando la projezione dell'aree s sopra un piano perpendicolare alla direzione del moto.

Il peso ϖ dell'unità di volume dell'aria, quello di tutti i fluidi elastici che più interessa le arti fisiche, è una quantità assai variabile la quale dipende a ciascun istante dallo stato dell'Atmosfera, vale a dire dalla sua pressione e dalla sua temperatura. Indicando con h l'altezza del barometro, espressa in metri, e con θ il numero dei gradi che segna il termometro centigrado, si ha, per il peso in chilogrammi di un metro cubo d'aria sotto questa pressione e a questa temperatura,

$$\varpi = \frac{1^{ch.},2991}{1 + 0,003759} \cdot \frac{h}{0,76}.$$

(*Vedi* Forza elastica). Per correggere un poco l'effetto dei vapori acquosi, i quali sempre diminuiscono il peso dell'aria atmosferica, possiamo stabilire generalmente

$$\varpi = 1^{ch.}, 709 \cdot \frac{h}{1+0,004\,\theta} \;\ldots\ldots\; (6).$$

16. Cercheremo di render più chiaro l'uso di queste formule mediante alcuni esempii, i quali si applicano ugualmente all'urto e alla resistenza dell'aria.

I. *Determinare lo sforzo esercitato da una corrente d'aria, la quale urta perpendicolarmente una piastra di un metro quadrato, con una velocità di 6 metri.*

Supponiamo che il barometro segni $0^m,755$ e il termometro 11°, il che è lo stato medio dell'atmosfera in Francia, cominceremo da avere

$$\varpi = 1,709 \cdot \frac{0,755}{1,048} = 1^{ch.},231.$$

Facendo dunque

$$\varpi = 1,231, \quad s = 1, \quad v = 6, \quad v^2 = 36,$$

e sostituendo questi valori nella formula (3), verrà

$$R = 0,11 \times 1,231 \times 1^{1,1} \times 36 = 4^{ch.},87.$$

Lo sforzo domandato sarà dunque equivalente a $4^{ch.},87$.

II. *Un vento di 10 metri di velocità urta obliquamente una piastra rettangolare di 4 metri di lunghezza sopra un metro di larghezza, si domanda quale sforzo normale essa sopporta; la sua inclinazione rapporto alla direzione del vento e di 75°.*

In questo caso bisogna impiegare la formula (4). Ammettendo come sopra il valore medio di ϖ, abbiamo

$$\varpi = 1^{ch.},231; \quad s = 4^{mq}; \quad v^2 = 100; \quad \alpha = 75;$$

e, per conseguenza,

$$s^{1,1} = 4^{1,1} = 4,595$$

$$\left(\text{sen}\,75^o\right)^{1,84\cos 75^o} = \left(0,9639\right)^{1,84 \times 0,2588} = 0,9836.$$

Sostituendo questi valori nella formula (4), si ottiene

$$R' = 0,11 \times 1,231 \times 4,595 \times 100 \times 0,9836 = 61^{ch.},20.$$

17. Le formule (3), (4) e (5) daranno una resistenza solamente troppo forte di alcuni centesimi, quando si applicheranno a corpi diversi dalle piastre sottili che presentano una superficie piana all'urto; ma esse non possono più convenire ai corpi i quali presentano all'urto un angolo o una superficie curva, la resistenza di questi è molto più piccola. Per quest'ultimi corpi, l'espressione della resistenza valutata nella direzione del moto diventa

$$R = 0,11\, n\, \varpi\, s^{1,1} v^2 \;\ldots\ldots\; (7),$$

nella quale s_1 è la projezione della superficie urtante sul piano perpendicolare alla direzione del moto, ed n un coefficiente il cui valore varia con la forma della superficie. Dall' esperienze del Borda e dell' Hutton, i valori di n relativi ai diversi corpi sono

Indicazione dei corpi	Valore di n
Prisma presentante all' urto un angolo piano di 90°	0,728
Prisma . . . . id. . . . . 60°	0,520
Cono, angolo al vertice di 90°	0,691
Cono . . . . . id. 60	0,543
Cono . . . . . . id. . . . . . 51, 22′	0,433
Semi-cilindro	0,570
Semi-sfera e sfera intera, secondo il Borda	0,410
Semi-sfera, secondo l' Hutton	0,413

18. Cerchiamo, come applicazione di quest' ultimi resultamenti, qual resistenza proverà una palla di 6 centimetri di diametro, per muoversi in una corrente d' aria comune velocità iniziale d' impulsione di 5 metri, supponendo di più che essa sia lanciata direttamente contro la corrente dell' aria, la cui velocità è di 3 metri. Il barometro segna $0^m,74$ e il termometro 5°.

Comincieremo dal fare un' osservazione generale applicabile tanto ai fluidi elastici quanto ai liquidi; questa è che quando un corpo solido si muove in un fluido in moto, possiamo considerare come in riposo quello dei due corpi che ha una velocità più piccola, supponendo che l' altro si muova con la somma o la differenza delle due velocità: la somma, quando le direzioni dei moti sono opposti; la differenza quando queste direzioni sono le stesse. Non vi è niente dunque da cangiare alle formule in questo caso, osservando di dare a v o ad h il valore che corrisponde alla velocità relativa dei due corpi.

In questo caso la direzione della palla essendo opposta a quella del vento, la velocità relativa è $5+3=8^m$; di più, la projezione della superficie urtante, la quale è la metà di quella della palla, è l' area del gran circolo di questa palla; così

$$s_1 = 3,1416 \times \frac{1}{4}(0,06)^2 = 0^{m.q},002827\,;$$

ma tutte le potenze a esponente >1 di una frazione essendo un' altra frazione più piccola della base, se eleviamo il numero 0,002827 alla potenza 1,1, in luogo di aumentare la superficie, la diminuiremo, il che non si accorderebbe più col principio della formula (3). Bisogna dunque in questo caso, o considerare la resistenza come proporzionale alla superficie, il che può permettersi per superficie piccolissime, ovvero cangiare unità di misura, col fine d'esprimere s mediante un numero intero che aumenti prendendo la potenza 1,1, salvo quindi a riportare il resultamento al metro, che è l' unità comune di tutte le altre quantità. Prendendo, per esempio, il *centimetro* per unità ausiliare, l' area s_1 è espressa con

$$s_1 = 28^{c.q},27,$$

e si trova

$$s_1^{1,1} = (28,27)^{1,1} = 39^{c.q},49,$$

il che, riportato al metro quadrato diventa

$$0^{mq},003949.$$

Abbiamo di più

$$\varpi = 1,709 \cdot \frac{0,74}{1,02} = 1^{ch.},24,$$

e, mediante la tavola precedente, $n = 0,41$. Questi valori messi nella formula (7), danno

$$R = 0,11 \times 0,41 \times 1,24 \times 0,003949 \times 64 = 0^{ch.},01413.$$

Tale sarà dunque lo sforzo costante che bisognerebbe esercitare sopra la palla per neutralizzare la resistenza dell'aria, o tale sarà la forza ritardatrice del moto se la palla è abbandonata a se stessa.

19. Non possiamo più contare sopra i resultamenti delle precedenti formule quando le velocità sono grandissime, e malgrado i lavori tanto raccomandabili dell' Hutton, la scienza attende ancora, tanto dell' esperienza che possano dare dell' indicazioni esatte, quanto un teorico abbastanza abile per stabilire *a priori* le leggi della meccanica dei fluidi, leggi che fin qui non hanno potuto scoprire le investigazioni dei più gran geometri. Esiste, per verità, una quantità di processi pratici dei quali gli idraulici e gl' ingegneri della marina si servono in alcuni casi particolari; ma i resultamenti che se ne deducono non sono che approssimazioni più o meno grossolane, le quali non fanno che far conoscere la necessità di nuove ricerche.

RESISTENZA DEI SOLIDI. S' intende alcune volte per *resistenza dei solidi* la forza con la quale i corpi solidi si oppongono al moto degli altri corpi che gli sono contigui; ma, più generalmente, questa è la forza sviluppata da un solido contro qualunque azione che tende a cangiare la sua forma o a disunire le sue parti. La prima specie di queste resistenze, che altre volte si chiamava *resistenza delle superficie*, essendo propriamente ciò che s' indica presentemente sotto il nome di *attrito* (*Vedi* QUESTA PAROLA), non ci occuperemo in questo punto che delle resistenze dovute all' aderenza che hanno tra loro le particelle integranti di uno stesso solido.

La determinazione della forza capace di cangiare la forma di un solido o di romperlo è una questione di una grandissima importanza per le arti fisiche e principalmente per l' architettura; così, da Galileo (*Vedi* LEGNO), al quale dobbiamo le prime vedute teoriche sopra questo oggetto, diversi distinti sapienti, come il Mariotte, il Varignon, i due Duhamel, il Muschenbroeck, il Buffon, il Lamblardie, il Coulomb, il Girard, il Perronet, il Rondelet, l' Aubrì, il Lamandè, il Robins, il Barlow, il Navier, il Tredgold, il Duleau, il Dupin e il Séguin, hanno fatto numerose esperienze sopra la resistenza dei materiali da costruzione. Quantunque i resultamenti delle loro ricerche presentino notabili differenze, essi sono ciò non ostante preziosi per la pratica, alla quale essi somministrano dei principii che indicheremo.

1. *Resistenza alla compressione e all' estensione*. La duttilità e l' elasticità sono proprietà comuni a tutti i corpi solidi, ma a gradi differentissimi e difficilissimi ad apprezzarsi. Quando un solido è sottoposto ad una forza capace di comprimerlo, senza giungere ciò non ostante fino a romperlo, succede o che il suo cangiamento di forma è accidentale, vale a dire che esso cessa con la pressione, o che esso è permanente, vale a dire che la disposizione primitiva delle parti costituenti del solido si trova alterata in un modo durabile. Nel primo caso, la forza elastica della materia supera la forza di pressione; nel secondo,

il contrario ha luogo, e la duttilità è diventata sensibile. Ora, ciò che importa conoscere, per impiegare con sicurezza i diversi materiali che debbono sopportare, in una costruzione qualunque, dei carichi dati, non è solamente la pressione sotto la quale essi sono capaci di rompersi, ma ancora quella che fa equilibrio alla loro forza elastica; poichè è riconosciuto che quando un corpo è sottoposto ad una pressione prolungata più grande della sua forza elastica, l' alterazione delle sue parti aumenta col tempo e finisce col determinarne la rottura. È dunque essenziale di non superare i limiti dell' elasticità.

2. L' esperienze fatte fin qui sopra la resistenza dei corpi alla compressione sono in più piccolo numero di quelle, che hanno avuto per oggetto la resistenza all' estensione; ciò non ostante, le une e le altre si accordano sufficientemente perchè si possa stabilire questo principio:

I. *I corpi resistono all' estensione e alla compressione con forze uguali fintantochè la potenza alla quale essi resistono non supera i limiti della forza elastica della materia che gli compone.*

3. Per misurare la resistenza dei corpi all' estensione, si sospendono verticalmente per un' estremità, e si fissa all' altra un piatto di bilancia che si carica successivamente di pesi continuamente più grandi fino a tanto che la rottura abbia luogo, o solamente fino a tanto che sia determinato il peso al di sopra del quale il corpo non riprende più la sua forma primitiva: quest' ultimo rappresenta la forza di elasticità. Ed è con questo metodo che si è constatato che la resistenza di un prisma, tirato nel senso della sua lunghezza, era indipendente da questa lunghezza e proporzionale all' area della sezione perpendicolare alla direzione delle forze. Ciò non ostante i metalli in filo fanno eccezione a questa regola; tutte l' esperienze si accordano per far conoscere che la loro resistenza è tanto più grande, sotto l' unità di sezione, quanto il diametro dei fili è più piccolo. Facendo dunque astrazione dai fili metallici possiamo ammettere questo secondo principio pratico:

II. *La resistenza di un solido tagliato in prisma o in cilindro, ad una forza che agisca nel senso della sua lunghezza, sta in ragione diretta dell' area della sezione perpendicolare alla lunghezza, fintanto che l' elasticità rimane intera e che la forza coincide con l' asse.*

Qualunque siano d' altra parte la natura del corpo e il suo diametro, si è riconosciuto inoltre che;

III. *L' estensione di una sbarra, mediante una forza che agisce nel senso della sua lunghezza, sta in ragione diretta di questa forza, quando l' area della sezione è la stessa e che la forza non supera l' elasticità della sbarra.*

4. I tre principii che abbiamo enunciati servono di base alla teoria della resistenza dei materiali; ma la loro applicazione esige la conoscenza dei limiti della forza elastica dei diversi corpi impiegati nelle costruzioni, limiti assai variabili d' altra parte, per una stessa sostanza, e dei quali non possiamo determinare che i valori medii. Indicheremo col nome di *forza elastica* il più gran peso in chilogrammi sotto la pressione del quale un corpo non prova alterazione costante, e riunir emo nella seguente tavola i resultamenti meglio constatati.

Sostanze teotate	Forza elastica psr un centimetro quadrato di sezione	Estensione corrispondente per on metro di lunghezza
Ferro lavorato	1250 chilog.	0^m,000713
Lavori di getto	1075	0 ,000830
Bronzo dei cannoni . .	703	0 ,001043
Ottone	1265	0 ,000750
Piombo fuso	105	0 ,002088
Stagoo	202	0 ,000625
Zinco colato	401	0 ,000238
Querce	278	0 ,002325
Olmo.	228	0 ,002415
Faggio	166	0 ,001754
Pino d' America. . . .	274	0 ,002415
Abeto rosso	302	0 ,002128
Abeto bianco	255	0 ,001984
Marmo bianco	127	0 ,000528
Pietra da taglio (Calcare).	60	0 ,000559
Stecche di Balena . . .	351	0 ,006857

I segoenti esempii, nei quali rammenteremo le formule impiegate per calcolare i diversi casi di resistenza, indicheranno l'uso di questa tavola.

I. Problema. *Determinare l' area della base di una sbarra o colonna capace di sostenere verticalmente un peso dato.*

Qoì si suppone che ona sbarra fissata verticalmente per la sua estrèmità superiore sia tirata da on peso situato alla soa estremità inferiore, caso dove la lungbezza della sbarra non esercita alcuna influeoza sopra la resistenza che essa poò opporre.

Sia Q il carico dato. Si chiami P on peso tale che una sbarra della materia in qoestione, di on centimetro qoadrato di base, non ne potrebbe sostenere ono più considerabile senza che la sua forza elastica sia alterata, vale a dire il peso indicato nella tavola sotto il nome di forza elastica, e indichiamo con A l'area della base cercata. Abbiamo in virtù del secondo principio prendendo il centimetro quadrato per onità di soperficie

$$P : Q = 1 : A;$$

donde

$$\frac{Q}{P} = A \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (1).$$

Cosi l'area della seziona dev' essere in ragione diretta del peso cha il pezzo deva sostenere, e in ragione inversa di qoello che potrebbe alterare la forza elastica della materia di qoesto pezzo.

Nel caso in coi si tratterebbe di ona sbarra di ferro lavorato, sostanza per la quale la tavola dà $P = 1250$ *chilog.*, destinata a sostenere un peso $Q = 2000$ chilogrammi, si avrebbe

$$A = \frac{2000}{1250} = 1,6 \text{ centimetri quadrati.}$$

Se la sbarra dovesse essere a base quadrata, si troverebbe il lato a di questa base ponendo

$$a=\sqrt{\frac{Q}{P}} \ldots\ldots\ldots (2),$$

a motivo di $a=\sqrt{A}$.

Se si trattasse di una sbarra cilindrica, il raggio r della base dovendo essere tale che $A=\pi r^2$, uguaglianza nella quale π indica il rapporto della circonferenza al diametro ovvero il numero 3,1415926..., si avrebbe per il valore di questo raggio

$$r=\sqrt{\frac{Q}{\pi P}} \ldots\ldots (3).$$

Con i dati precedenti, si troverebbe

$$a=\sqrt{\frac{2000}{1250}}=1^{\text{cent.}},265$$

$$r=\sqrt{\left[\frac{2000}{3,1416\times 1250}\right]}=0^{\text{cent.}},714.$$

II. Problema. *Determinare il più gran carico che può sopportare in un punto qualunque una sbarra rettangolare uniforme appoggiata per le sue estremità* (Tav. CLVII, fig. 2).

Si chiami

P il peso equivalente alla forza elastica della sbarra;
l la distanza dei punti di appoggio;
p e q le distanze del punto caricato ai punti d'appoggio;
b la larghezza della sbarra;
d la sua grossezza o la sua dimensione parallela alla forza di pressione;
Q il carico cercato.

Mediante considerazioni teoriche il cui particolare non può trovar luogo in questo punto, si trova la formula

$$Q=\frac{Pbd^2l}{6pq} \ldots\ldots (4),$$

la quale contiene la soluzione del problema e di tutte le altre questioni che ne dipendono.

Se la sbarra fosse caricata nel suo mezzo, si avrebbe

$p=q=\frac{1}{2}\,l$, e la formula diventerebbe

$$Q=\frac{2Pbd^2}{3l} \ldots\ldots (5).$$

Prendiamo per esempio una sbarra rettangolare di lavoro di getto di 6 metri di lunghezza, tra i punti d'appoggio, di 45 millimetri di larghezza e di 80 millimetri di grossezza, avremo, riportando tutte queste dimensioni al centime-

tro come onità,

$$l=600,\quad b=4,5,\quad d=8;$$

e, di più, la tavola ci fa conoscere $P=1075$. Così, nel caso in cui il carico debba agire nel mezzo della sbarra, si ha

$$Q=\frac{2\times1075\times4.5\times8^2}{3\times600}=344\ chilog.,$$

vale a dire che non si potrebbe caricare questa sbarra nel suo mezzo di un peso maggiore di 344 *chilog.* senza alterare la sua elasticità.

III. Problema. *Essendo data la larghezza di una sbarra uniforme e la sua lunghezza tra i punti d' appoggio, trovare la grossezza che essa deve avere per resistere, ad un peso che agisce sopra uno dei suoi punti.*

L' equazione (4) dà, ricavando il valore di d che in questo caso è l' incognita,

$$d=\sqrt{\frac{6pqQ}{Pbl}}\ \ldots\ldots(6),$$

e, semplicemente, nel caso di $p=q=\frac{1}{2}l$, vale a dire quando il peso agisce nel mezzo,

$$d=\sqrt{\frac{3lQ}{2Pb}}\ \ldots\ldots(7).$$

Se si trattasse di trovare la larghezza b, la grossezza p essendo data, si avrebbe evidentemeote

$$b=\frac{6pqQ}{Pd^2l}\ \ldots\ldots(8),$$

$$b=\frac{3lQ}{2Pd^2}\ \ldots\ldots(9).$$

La prima di queste formule si riferisce ad un carico situato in un punto qualunque della sbarra, e la seconda ad un carico situato nel mezzo.

Faremo osservare che tutte queste formule possono applicarsi a sbarre inclinate come AB (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 8), avendo la cura di prendere per l la distanza CD degli appoggi.

IV. Problema. *Determinare il più gran carico che può sopportare una sbarra rettangolare appoggiata per le sue estremità, nel caso in cui questo carico è distribuito uniformemente tra i punti d' appoggio.*

L' esperienza ha fatto conoscere che quando il peso è repartito uniformemente, lo sforzo non è che i $\frac{5}{8}$ di quello che avrebbe luogo riunendo lo stesso peso al centro; così moltiplicando il secondo membro della formula (5) per $\frac{8}{5}$, viene

$$Q=\frac{16Pbd^2}{15l}\ \ldots(10),$$

formula nella quale inseguito si potrà prendere b ovvero d per l' incognita.

V. Problema. *Trovare il più gran carico che può portare ad una delle sue estremità una sbarra rettangolare orizzontale incastrata per l'altra sua estremità.* (Tav. CLXXXVI, fig. 1.)

Quando un pezzo è fortemente fissato per un' estremità e che esso è caricato all' altra, il peso che esso può sopportare non è che $\frac{1}{4}$ di quello che un pezzo della stessa lunghezza, sostenuto alle due estremità, potrebbe portare nel suo mezzo. Conservando dunque le medesime denominazioni, abbiamo

$$Q = \frac{Pbd^2}{6l} \;\ldots\ldots\; (11).$$

Se il carico fosse repartito uniformemente, lo sforzo sarebbe metà minore, e si avrebbe

$$Q = \frac{Pbd^2}{3l} \;\ldots\ldots\; (12).$$

5. Tutte le formule precedenti si riferiscono a sbarre rettangolari; per applicarle a sbarre cilindriche, basta moltiplicare il valore di Q pel fattore numerico 0,589, e allora b e d rappresentano l' uno e l' altro il diametro del cilindro.

6. Le sbarre caricate dal peso prendono un' inflessione nel loro mezzo che, in certe circostanze, non permette di far loro sopportare il più gran carico di cui esse sono capaci. I seguenti problemi c' insegnano a calcolare quest' inflessione.

VI. Problema. *Determinare la freccia di curvatura che prenderà una sbarra caricata nel suo mezzo e sostenuta per le sue estremità nel caso del maximum del carico.*

Si chiami I l' inflessione espressa in metri, e l' estensione un metro corrispondente al più gran carico e dato dalla tavola del n.° 4, e indichiamo sempre con l la lunghezza della sbarra o piuttosto la distanza dei punti d' appoggio, e con d la grossezza. Avremo

$$I = \frac{el^2}{6d} \;\ldots\ldots\; (13).$$

Cerchiamo, per esempio, la freccia di curvatura che prenderà la sbarra del problema II sotto il carico maximum di 344 chilogrammi. In questo caso, abbiamo $l=6$ metri, $d=80$ millimetri, e la tavola ci fa conoscere $e=0^m,00083$. Sostituendo questi valori nella formula (13), osservando che bisogna porre $d=0^m,08$ per riportare tutto al metro come unità, verrà

$$I = \frac{0,00083\times 6^2}{6\times 0,08} = 0^m,0625,$$

vale a dire che la sbarra di metallo fuso sarà inflessa nel suo mezzo da un poco più di 62 millimetri; dimodochè se questa inflessione fosse troppo grande per l' uso che si vorrebbe fare della sbarra, bisognerebbe aumentare la sua grossezza o diminuire il carico.

VII. Problema. *Trovare l' inflessione che prenderà una sbarra rettangolare caricata nel suo mezzo da un peso Q' più piccolo di quello che fa equilibrio alla sua forza elastica.*

Conservando le medesime denominazioni e rappresentando con i l' inflessione

domandata, avremo

$$i=\frac{Q'el^3}{4Pbd^3}\ \ldots\ldots\ (14).$$

Questa formola ci dà il mezzo di determinare il carico corrispondente ad un'inflessione data; non è necessario che isolare Q' nel primo membro; il che dà

$$Q'=\frac{4iPbd^3}{el^3}\ \ldots\ (15).$$

Cerchiamo, per esempio, il carico che si può far sopportare alla sbarra di ferro fuso delle precedenti questioni, senza che la sua inflessione superi 15 millimetri. Abbiamo

$$i=0^m,015;\quad b=0^m,045;\quad d=0^m,080;\quad l=6;\quad e=0^m,00083;$$

e siccome tutto è riportato al metro per unità, daremo a P un valore 10000 volte più grande di quello della tavola, vale a dire che porremo $P=10750000^{ch.}$. Sostituendo questi valori nella formula, viene

$$Q'=\frac{4\times0,015\times10750000\times0,045\times(0,08)^3}{0,00083\times(6)^3}=83 \text{ chilog.}$$

Dunque, se non vogliamo che la sbarra in questione prenda un'inflessione più grande di 15 millimetri, non bisogna caricarla che di 83 chilogrammi.

Nel caso in cui i pezzi fossero uniformente caricati sopra tutta la loro lunghezza, l'inflessione sarebbe i $\frac{5}{8}$ di quelle che danno le formule (13) e (14).

7. *Resistenza dei vasi a pressioni interne.* Quando un vaso cilindrico chiuso esattamente contiene un fluido elastico la cui tensione superi la tensione atmosferica esterna, le pareti sono pressate internamente dal di dentro al di fuori e ugualmente sopra tutti i punti. Questa pressione tende a fare spezzare il cilindro il quale ciò non ostante non può rompersi che seguendo una costola o un circolo perpendicolare al suo asse; ma siccome lo sforzo che ha luogo nel senso della costola è due volte più grande di quello che tende a rompere il cilindro perpendicolarmente al suo asse, non ci occuperemo di quest'ultimo. Ora, se si chiami R il raggio del cilindro e p la pressione sopra l'unità di lunghezza, è facile vedere che il prodotto pR rappresenta la forza che tende a rompere il cilindro a ciascuno dei suoi punti. Così, perchè la parete possa resistere senza alterazione a questa forza, bisogna che la sua grossezza sia uguale alla grossezza di una sbarra rettangolare che, avendo l'unità di larghezza, potrebbe sopportare senza alterazione la pressione pR, p essendo allora la pressione del fluido sopra l'unità di superficie. Ora, prendendo il centimetro quadrato per unità di superficie, il più gran carico di una sbarra rettangolare di una larghezza uguale ad un centimetro e di una grossezza $=d$ è (I. Problema),

$$Q=Pd,$$

P rappresentando sempre il peso equivalente alla forza elastica della materia; dunque, mediante ciò che abbiamo detto,

$$Pd=pR,$$

donde si deduce

$$d=\frac{pR}{P}\ldots\ldots(16).$$

Così, per determinare la grossezza della parete di un cilindro che deve sopportare una pressione interna p sopra l'unità di superficie, bisogna moltiplicare questa pressione p pel raggio del cilindro, e dividere il prodotto pel peso equivalente alla forza elastica della materia del cilindro.

Proponiamoci di trovare la grossezza di un vaso cilindrico di ferro lavorato capace di contenere senza alterazione un gas, compresso a 15 atmosfere, pressione effettiva, ed avente $1^{m},20$ di diametro. Riportando tutto al centimetro come unità, abbiamo

$$R=60,\ p=15^{ch},512,\ P=1250^{ch},$$

e per conseguenza

$$d=\frac{15,512\times60}{1250}=0^{cent},7445.$$

La grossezza domandata è dunque di 7 millimetri e mezzo. Nella pratica, e quando si tratta di caldaie destinate a contenere del vapore, si prende una grossezza 5 volte più grande di quella che darebbe il calcolo, perchè è riconosciuto che la tenacità dei metalli diminuisce a misura che la loro temperatura aumenta.

8. *Resistenza alla torsione.* La resistenza che un albero o asse oppone ad una forza che tende a torcerlo si chiama resistenza alla torsione.

Sia Q il peso portato dall'estremità del raggio R di una ruota situata sopra un albero e che produce la più gran torsione che quest'albero possa prendere senza alterare la sua elasticità, il valore di Q è dato dalla formula

$$Q=\frac{Pd^2(d^2+l^2)}{12Rl},$$

che si può ugualmente impiegare per trovare d quando Q è dato.

Le formule che abbiamo date si applicano ai casi i più ordinari della pratica; ma ne esistono una quantità di altre non meno utili per le quali non possiamo che rimandare all'opere speciali, spiacendoci non ostante che veruna di queste opere non presenti un trattato completo sopra questa materia importante. (*Vedi il saggio pratico* del Tredgold *sopra la resistenza del ferro e altri metalli*)

RESTO (*Alg.*). Nome che si dà alla quantità che si produce, quando si sottrae una quantità da un'altra. (*Vedi* SOTTRAZIONE).

RETICO. *Vedi* RHETICO.

RETROGRADAZIONE (*Mecc.*) Azione mediante la quale un corpo si muove in senso contrario alla sua direzione primitiva.

In astronomia, si dà questo nome al moto apparente dei pianeti, in forza del quale sembrano essi talvolta tornare indietro nell'ecclittica e muoversi in un senso opposto all'ordine dei segni.

RETROGRADAZIONE *del sole*. Quando il sole è osservato nella zona torrida, se la sua declinazione è maggiore di quella del luogo, sembra muoversi indietro o retrogradare prima e dopo mezzogiorno.

Infatti, s'immagini il circolo verticale ZGN (*Tav.* CCXVII, *fig.* 1) tangente

al parallelo o circolo diurno MGL, del sole in G, ed un altro verticale ZON pel punto O in cui si leva il sole: è evidente che tutti i verticali intermedj taglieranno il circolo diurno del sole in due luoghi, cioè nell'arco GO e nell'arco GI: quindi, a misura che il sole si alzerà nell'arco GO, si avvicinerà sempre più al verticale ZGN il più lontano dal polo P: ma siccome continuerà ad alzarsi nell'arco GI, così ritornerà a' suoi primi verticali retrogradando per qualche tempo prima di mezzodì. Lo stesso accade dopo mezzogiorno; perciò, siccome l'ombra cade sempre dalla parte opposta al sole, così deve essa retrogradare due volte al giorno in tutti i luoghi della zona torrida dei quali la latitudine è minore della declinazione del sole.

RETTANGOLARE (*Geom.*). Diconsi così di quelle figure che generalmente hanno degli angoli retti, e di tutto ciò che è ad angoli retti. Le coordinate *rettangolari* di una curva sono quelle le quali sono perpendicolari tra di esse.

Gl' antichi, avanti Apollonio, chiamavano la parabola *sezione rettangolare del cono*, perchè essi non consideravano questa curva che in un cono la cui sezione per l'asse era un triangolo rettangolo al vertice del cono.

RETTANGOLO (*Geom.*). Figura rettilinea di quattro lati i quattro angoli della quale sono retti.

Un *rettangolo* è ancora un parallelogrammo, perchè i suoi lati opposti sono paralleli. *Vedi* Parallelogrammo.

La superficie di un *rettangolo* essendo uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, vale a dire, al prodotto di due dei suoi lati contigui (*Vedi* Area), si è dato il nome di *rettangolo* al prodotto di due linee qualunque di grandezze differenti, ed è con questo metodo che per esprimere, per esempio, che nel circolo la seconda potenza di una tangente è uguale al podotto della secante intera moltiplicato per la sua parte esterna, quando queste due linee partono da uno stesso punto, si dice che il *quadrato* della tangente è uguale al *rettangolo* compreso tra la secante e la sua parte esterna.

Rettangolo si prende ancora adiettivamente come nel *triangolo rettangolo*, *vedi* Triangolo.

RETTIFICAZIONE. (*Geom.*). Rettificare una curva, equivale a trovare una linea retta uguale ad un arco di questa curva. Le specie di curve esattamente rettificabili sono in piccol numero, ma quando il problema non ammette soluzione esatta si può sempre ottenere una soluzione approssimata con quel grado di approssimazione che possiamo desiderare.

La prima rettificazione di una curva fu ottenuta da Van-Heuraet con l'aiuto di costruzioni geometriche complicatissime, ed è quella della seconda parabola cubica. Il Wallis, nel suo trattato sopra la cissoide, reclama la priorità della scoperta per il suo alunno Guglielmo Neil, ma siccome i metodi impiegati da questi geometri sono differenti, sembra probabile che essi siano giunti allo stesso resultamento senza aver niente preso l'uno dall'altro.

Il problema della rettificazione delle curve non è stato completamente risoluto, e non siamo giunti a *misurare* una linea curva qualunque che dopo la scoperta del calcolo differenziale; poichè *rettificare* una curva o *misurare* la sua lunghezza mediante l'aiuto di una linea retta presa per unità di misura, equivale esattamente alla stessa cosa. Quando l'arco di curva non è incommensurabile con l'unità di misura, si ottiene il numero esatto che esprime la sua lunghezza; nel caso contrario, l'espressione di questo numero è sempre data da una serie che permette di avvicinarsene indefinitamente. Esporremo il metodo estremamente semplice che al giorno d'oggi porta il nome di *rettificazione delle curve*.

1. Si troverebbe facilmente la lunghezza di un arco di una curva dato, se si

conoscesse la differenziale di quest' arco; poichè indicando con s questa lunghezza e ammettendo che ds sia conosciuto, si avrebbe immediatamente

$$\int[ds]=s.$$

Così, il problema è riportato a trovare l' espressione della differenziale di un arco di curva dato.

Ora, qualunque sia la curva di cui AQ (*Tav.* XLV, *fig.* 2) è un arco, se supponiamo che quest' arco cresca di una quantità infinitamente piccola QQ', siccome allora l' ascissa AP diventa AP' e l' ordinata PQ diventa P'Q', se conduciamo Qm parallela all' asse delle ascisse, avremo un triangolo rettangolo QmQ' i cui tre lati sono respettivamente le differenziali dell' ascissa, dell' ordinata e dell' arco, cioè: Qm = PP', la differenziale di AP; Q'm, differenziale di PQ, e QQ', differenziale di AQ. Abbiamo dunque, indicando l' ascissa con x l' ordinata con y e l' arco con s

$$ds^2=dx^2+dy^2,$$

donde

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Tale è l' espressione generale della differenziale dell' arco in funzione delle coordinate rettangolari. Così, l' equazione di una curva qualunque essendo data si tratta di ricavarne il valore di dx^2 o dy^2, di sostituirlo in quest' espressione e d' integrare inseguito. Questo è quello che i seguenti esempii renderanno più chiaro.

2. Problema. I. Rettificare la circonferenza del circolo. Contando le ascisse dall' estremità del diametro, l' equazione di questa curva è

$$y^2=2ax-x^2,$$

si ottiene differenziando

$$2ydy=2adx-2xdx$$

donde

$$dy=\frac{(a-x)dx}{y},$$

e

$$dy^2=\frac{(a-x)^2dx^2}{y^2}.$$

Rimettendo per y^2 il suo valore, si ha definitivamente

$$dy^2=\frac{(a-x)^2dx^2}{2ax-x^2}.$$

Se ora si sostituisce questo valore di dy^2 nell' espressione generale di ds, essa diventa

$$ds=\sqrt{\left[dx^2+\frac{(a-x)^2.dx^2}{2ax-x^2}\right]}$$

$$=\frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=adx\,(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

si ha dunque

$$s = a\int dx\left(2ax - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + costante.$$

Quest' integrale non potendo ottenersi sotto una forma finita, ne resulta che la circonferenza del circolo non è una curva rettificabile; ciò che digià abbiamo riscontrato in altra parte. (*Vedi* Quadratura del circolo.)

Sviluppando $(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in serie e integrando quindi termine per termine, si otterrà la serie che dà il valore di un arco di circolo in funzione del raggio a, e inseguito si determinerà la costante mediante la posizione dell' arco; se quest' arco comincia all' origine o dev' essere o quando $x = o$, la costante sarà o.

L' equazione del circolo riportata al centro $y^2 = a^2 - x^2$ conduce ad una serie più semplice. L' espressione che bisogna integrare è allora

$$s = a\int dx\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + costante,$$

e prendendo l' integrale da $x = o$ fino ad $x = a$, il che dà l' arco uguale al quarto della circonferenza, si trova

$$\frac{1}{4}\text{ circonf.} = a + \frac{a}{2.3} + \frac{3a}{2.4.5} + \frac{3.5a}{2.4.6.7} + \text{ec.}\ldots$$

Il raggio a essendo preso per unità, quest' espressione diventa

$$\frac{1}{4}\pi = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.6} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9} + \text{ec.}$$

3. Problema. II. Rettificare l' ellisse. L' equazione di questa curva riportata al centro essendo

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

se ne ricava

$$dy^2 = \frac{b^4x^2dx^2}{a^4y^2},$$

e per conseguenza

$$ds = \frac{dx\sqrt{[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Per maggior semplicità facciamo il semi-grand' asse $a = 1$, siccome $a^2 - b^2$ è il quadrato dell' eccentricità, che indicheremo con e (*Vedi* Ellisse), verrà

$$a^2 - b^2 = 1 - b^2 = e^2,$$

e l' espressione precedente si ridurrà a

$$dz = \frac{dx\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$(1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}$ essendo sviluppata in serie, bisogna integrare l' espressione

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left[1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}e^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6-\text{ec.}\right],$$

tutti i termini della quale sono della forma $\int\frac{Ax^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, il che si effettuerà con i processi indicati all' articolo Integrale. Si otterrà con questo metodo, indicando con M l' arco il cui seno $= x$, il quale è dato da

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arco}\left(\text{sen} = x\right).$$

$$\int\frac{dx\,.\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = M + \frac{1}{2}e^2\left\{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}M\right\}$$

$$+\frac{1.1}{2.4}e^4\left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1.3}{2.4}M\right\}$$

$$+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \textit{costante}.$$

Facendo $x = a = 1$, caso nel quale si ha la *costante* $= 0$ ed $M = \frac{1}{2}\pi$, si ottiene pel valore del quarto dell' ellisse

$$\frac{1}{2}\pi\left[1-\frac{1.1}{2.2}e^2-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}e^4-\frac{1.1.1.1.3.3.5}{2.2.3.3.6.6}e^6-\text{ec.}\right];$$

serie convergentissima quando l' eccentricità e è una piccola frazione.

4. Problema III. Rettificare le parabole dei diversi gradi rappresentate dall' equazione $y = px^n$, nella quale n è un numero qualunque intero o frazionario.

Quest' equazione dà $dy = npx^{n-1}dx$, donde

$$\sqrt{\left[dx^2+dy^2\right]} = dx\sqrt{\left[1+n^2p^2x^{2n-2}\right]}.$$

Così l' arco parabolico è espresso da

$$\int dx\left[1+n^2p^2x^{2n-2}\right]^{\frac{1}{2}}\ \ldots\ldots (a),$$

integrale che possiamo ottenere sotto una forma finita, quando l' esponente $2n-2$ è uguale all' unità ovvero ci si trova contenuta un numero esatto di volte (*Vedi*, Integrale).

Nel caso di $2n-2 = 1$, il che dà $n = \frac{3}{2}$, la curva è data dall' equazione

$y = px^{\frac{3}{2}}$, ovvero $y^2 = p^2x^3$, questa è la *seconda parabola cubica*, e si ottiene per l'espressione del suo arco, contato a cominciare dall'origine dove $x = 0$,

$$\frac{8}{27p^2}\left(\left[1+\frac{9}{4}p^2x\right]^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Abbiamo detto che questa curva è la prima che sia stata rettificata.

Se poniamo $2n-2=\frac{1}{m}$, m indicando un numero intero, avremo $n=\frac{2m+1}{2m}$, e l'equazione $y^{2m}=p^{2m}x^{2m+1}$ corrisponderà ad un'infinità di parabole tutte esattamente rettificabili. Quanto alle altre non è possibile di rettificarle che per approssimazione.

L'equazione della parabola ordinaria o *conica* è $y=px^2$; facendo dunque $n=2$ nell'espressione (a), otterremo integrando per parti

$$\int\left[1+4p^2x^2\right]^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}x\left(1+4p^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+4p^2x^2)}}$$

$$=\frac{1}{2}x\left(1+4p^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{4p}\operatorname{Log}\left[2px+\sqrt{\left(1+4p^2x^2\right)}\right]$$

$$+\textit{costante}.$$

Si sopprimerà la costante se si conta l'arco parabolico a partire dal punto dove $x=0$.

5. Problema IV. Rettificare la cicloide. L'equazione di questa curva è (*vedi* Cicloide)

$$x=\text{arco}\left(\text{sen}=\sqrt{\left[2ry-y^2\right]}\right)-\sqrt{\left(2ry-y^2\right)}.$$

Osservando che il seno il quale entra in quest'espressione è preso nel circolo generatore il cui raggio è r, otterremo mediante la differenziazione

$$dx=\frac{ydy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}.$$

Elevando alla seconda potenza e sostituendo invece di dx^2 il suo valore, in $ds=\sqrt{\left[dx^2+dy^2\right]}$, viene

$$ds=\frac{dy\sqrt{2r}}{\sqrt{(2ry-y^2)}},$$

il cui integrale è

$$\sqrt{2r}\int\frac{dy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}=-2\sqrt{\left[2r\left(2r-y\right)\right]}+\textit{costante}.$$

Per interpetrare questo resultamento, osserviamo che la parte variabile dell' integrale si annulla quando si fa $y = 2r$, e, per conseguenza, che se si conta l' arco cicloidale a partire da questo punto, non ci è bisogno di aggiungere costante. Si ha dunque pel valore assoluto dell' arco compreso tra questo punto, mezzo della cicloide, e il punto la cui ordinata è y,

$$s = 2\sqrt{\left[2r\left(2r-y\right)\right]}.$$

Ora, (*Tav.* X, *fig.* 6), se consideriamo l'arco cicloidale DM, si vede che la parte BN del diametro del circolo generatore è uguale all' ordinata del punto M, così ponendo $\mathrm{BD} = 2r$ e $\mathrm{BN} = y$, è facile riconoscere che la corda DH è uguale a

$$\sqrt{\left[\mathrm{BD} \times \mathrm{DN}\right]} = \sqrt{\left[2r\left(2r-y\right)\right]};$$

dunque

arco cicloidale $\mathrm{DM} = 2\mathrm{DH}$.

Facendo $y = 0$, quest' arco è la metà della cicloide, e la corda diventa il diametro del circolo generatore; così, la *cicloide intera* ADC *è uguale a quattro volte il diametro del circolo generatore.*

6. Quando l' equazione delle curve è data in coordinate polari, bisogna impiegare la differenziale dell' arco espressa in funzione di queste stesse coordinate; quest' espressione è

$$ds = \sqrt{\left[dz^2 + z^2 dv^2\right]},$$

z indicando l' ordinata, e v l' angolo di quest' ordinata con l' asse.

Infatti, abbiamo veduto (Polare) che per passare dalle coordinate rettangolari a delle coordinate polari, bisognava porre l' equazioni

$$x = a + z\cos(v + \beta),$$
$$y = b + z\,\mathrm{sen}(v + \beta).$$

Così, differenziando quest' espressioni, avremo

$$dx = dz \,.\, \cos(v + \beta) - z \,.\, \mathrm{sen}\,(v + \beta) \,.\, dv,$$
$$dy = dz \,.\, \mathrm{sen}\,(v + \beta) + z \,.\, \cos(v + \beta) \,.\, dv.$$

Elevando ciascuna di queste uguaglianze alla seconda potenza e aggiungendo, viene

$$dx^2 + dy^2 = \left[\cos^2\left(v + \beta\right) + \mathrm{sen}^2\left(v + \beta\right)\right]dz^2$$
$$+ \left[\cos^2\left(v + \beta\right) + \mathrm{sen}^2\left(v + \beta\right)\right]z^2 dv^2$$

e finalmente,

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 + z^2 dv^2$$

a motivo di $\cos^2(v + \beta) + \mathrm{sen}^2(v + \beta) = 1$.

In altra parte daremo degli esempii dell'applicazione di quest' ultima formola. (*Vedi* SPIRALE).

RETTIFICAZIONE (*Geodesia*). Il differenziale ds di un arco di ellisse in funzione dell'ascissa x prende una forma comodissima per le applicazioni della geodesia, quando nel volere determinare la lunghezza di un arco di meridiano si esprime quest' ascissa in funzione della latitudine del punto al quale l'ascissa stessa appartiene. Chiamando primieramente λ questa latitudine, ossia l'angolo che la normale in questo punto fa col piano dell'equatore, ed osservando che $\frac{dy}{dx}=\cot\lambda$, si ha

$$ds=-dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=-dx\sqrt{(1+\cot^2\lambda)},$$

quando l' origine dell' arco s si prende all' equatore. Per un'altra parte, l'equazione dell' ellisse riferita al suo centro essendo

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

se ne ottiene per mezzo della differenziazione

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=\cot\lambda,$$

ed allora si hanno due equazioni tra x e y che danno, dopo tutte le riduzioni e trasformazioni ed a motivo di $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$,

$$x=\frac{a\cos\lambda}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\lambda)}},\quad y=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\lambda)}},$$

ove e^2 è il quadrato dell' eccentricità di un' ellisse il cui semiasse maggiore è l' unità.

Se ora si differenzia il primo di questi due valori, si ottiene

$$dx=\frac{-a(1-e^2)\operatorname{sen}\lambda d\lambda}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

e per conseguenza

$$ds=\frac{a(1-e^2)d\lambda}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se quindi si fa l'integrazione tra i limiti zero e λ, si otterrà

$$s=a(1-e^2)\left[m\lambda-\frac{1}{2}n\operatorname{sen}2\lambda+\frac{1}{4}p\operatorname{sen}4\lambda\ldots\ldots\right]\ldots\ldots(1)$$

serie nella quale si ha

$$m=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4\ldots\ldots$$

$$n=\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4$$

$$p=\frac{15}{64}e^4$$

ovvero, prendendo l'integrale tra i limiti λ e λ', e facendo per brevità

$$\lambda-\lambda'=\varphi, \quad \lambda+\lambda'=\phi,$$

si otterrà

$$s=a(1-e^2)\left[m\varphi-n\,\text{sen}\,\varphi\cos\phi+\frac{1}{2}p\,\text{sen}\,2\varphi\cos 2\phi\ldots\right]\ldots\ldots(2).$$

Per far servire questa formula alla rettificazione di un arco di meridiano misurato per mezzo di una serie di triangoli, bisogna determinare esattamente l'*amplitudine geodetica* di quest'arco, vale a dire il numero di gradi e di parti di grado che esso contiene, calcolando di mano a mano colle formule della *Trigonometria sferoidica* le differenze di latitudine dei vertici dei triangoli di cui si tratta; il che esige allora che si spinga l'esattezza fino ai termini del terz'ordine inclusive, onde avere queste differenze con una approssimazione di uno o due centesimi di secondo.

Per esempio, le operazioni geodetiche dei sigg. Biot e Arago, fatte in Spagna per prolungare la meridiana di Francia fino all'isola di Formentera, hanno dato luogo a triangoli grandissimi che sono stati calcolati sotto la direzione di Puissant al Deposito della guerra, e si è ottenuto in gradi centesimali

Latitudine geodetica di Montjouy	$45^g,9599'',30$
Latitudine geodetica di Formentera	$42,9626,24$

Si è inoltre avuto in parti e prendendo una media $\varphi=2^g,9974'',89$

il tutto nella supposizione che la terra sia un ellissoide di rivoluzione il cui schiacciamento sia eguale a $\frac{1}{309}$: e siccome la formula (2) può mettersi sotto questa forma

$$s=V\varphi-V'\,\text{sen}\,\varphi\cos\phi+V''\,\text{sen}\,2\varphi\cos 2\phi\ldots$$

e di più si ha $\text{Log}\,a=6,8046154$, essendo a espresso in metri, così diviene facile l'assicurarsi che prendendo il grado centesimale per unità si ha

$$\text{Log}\,V=5,0000313$$
$$\text{Log}\,V'=4,9912209$$
$$\text{Log}\,V''=1,4924200$$

logaritmi ai quali si deve aggiungere 9,7101800 per avere l'arco s in tese, e il primo dei quali dovrebbe essere $\text{Log}\,V=4,9542758$ se l'amplitudine φ fosse data in gradi. Facendo il calcolo, che non presenta difficoltà nessuna, si ha finalmente

$$s=153674^t.$$

E tale è il valore che è stato definitivamente assegnato da Puissant alla distanza meridiana tra Montjouy e Formentera in correzione di quella di $153605^t,2$

riferita nella *Base del sistema metrico decimale* in conseguenza di un errore di calcolo (Si veda la pag. 35 del tom. II della *Nuova Descrizione geometrica della Francia*, ovvero il tomo XVI delle *Memorie* dell'Istituto di Francia, pag. 457.)

Se nell' equazione (1) s' indica con Q ciò che diviene s quando la latitudine λ diviene di 90° ossia $\frac{1}{2}\pi$, esprimendo con π la semicirconferenza di un circolo avente l' unità per raggio, le quarta parte del meridiano ellittico avrà per espressione

$$Q = a\left(1-e^2\right)\frac{1}{2}m\pi = \frac{1}{2}\pi a\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4\ldots\right)\ldots\ldots(3),$$

e dividendo questa espressione per la (2), si otterrà

$$Q = \frac{\frac{1}{2}\pi s}{\varphi-\frac{n}{m}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\frac{p}{m}\operatorname{sen}2\varphi\cos2\varphi\ldots}\ldots\ldots(4),$$

altra espressione nella quale si ha

$$\frac{n}{m}=\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{8}e^4\ldots\ldots,\quad \frac{p}{m}=\frac{15}{64}e^4\ldots\ldots$$

Così, quando l' arco s e l' eccentricità e della terra supposte ellittica saranno noti, il quarto del meridiano si otterrà facilmente. Per esempio, se si combina il valore di quest' arco con quello dell' arco di meridano misurato sotto l' equatore, si trova lo schiacciamento della terra di $\frac{1}{303}$, e il quarto del meridiano di 5131658 tese. Così, in forza di quest' ultima determinazione, il metro, considerato come la diecimilionesima parte della distanza dal polo all' equatore, sarebbe di 3 piedi, o pollici, 11 linee e 375 millesimi, vale a dire un poco più lungo del metro *legale*, fissato dalle leggi francesi in 3 piedi, o pollici, 11 linee a 296 millesimi dell' antica tesa dell' Accademia presa a 13 gradi di Réaumur.

È facile il riconoscere che se si prenda il logaritmo di ciascun membro della serie (3), si avrà

$$\operatorname{Log}\frac{2Q}{\pi}=\operatorname{Log}a-\mu\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{5}{64}e^4\ldots\ldots\right),$$

ove $\mu = 0{,}4342945$ è il modulo delle tavole. Così, reciprocamente,

$$\operatorname{Log}a=\operatorname{Log}\frac{2Q}{\pi}+\mu\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{16}\alpha^2\ldots\ldots\right),$$

quando invece di e^2 si pone il suo valore $2\alpha-\alpha^2$, essendo α lo schiacciamento della terra. Parimente, a motivo di $b = a\sqrt{(1-e^2)}$, si ha

$$\operatorname{Log}b=\operatorname{Log}\frac{2Q}{\pi}-\mu\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{7}{16}\alpha^2\ldots\ldots\right),$$

e siccome il raggio terrestre è esattamente

$$r = \sqrt{(x^2+y^2)} = a\sqrt{\left(\frac{1-(2e^2-e^4)\,\text{sen}^2\lambda}{1-e^2\,\text{sen}^2\lambda}\right)},$$

si ottiene con una leggera attenzione la seguente serie

$$\text{Log}\,r = \text{Log}\frac{2Q}{\pi} + \frac{1}{4}\mu e^2 + \frac{5}{64}\mu e^4 - \frac{1}{2}\mu e^2\,\text{sen}^2\lambda + \frac{1}{2}\mu e^4\text{sen}^2\lambda - \frac{3}{4}\mu e^4\text{sen}^4\lambda \ldots.$$

la quale senza difficoltà si riduce alle due ultime, facendo successivamente

$$\lambda = 0 \quad e \quad \lambda = 90^\circ.$$

Il raggio di curvatura ρ di un arco di meridiano, in un punto la cui latitudine sia λ, essendo determinato di grandezza dall' intersezione di due normali consecutive nel punto medesimo, è evidente che il triangolo infinitesimale formato da queste due linee e dall' arco ds dà $\frac{ds}{d\lambda} = \rho$; per conseguenza

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\,\text{sen}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

e se s' indica con M l' arco di un grado del meridiano, si avrà

$$M = \frac{\pi}{180}\cdot\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\,\text{sen}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

ossia, riducendo in serie e non conservando che i termini che contengono e^2,

$$M = \frac{\pi}{180}a\left(1-e^2+\frac{3}{2}e^2\,\text{sen}^2\lambda\right),$$

resultato che fa vedere che sulla terra i gradi dei meridiani crescono presso a poco come i quadrati dei seni delle latitudini corrispondenti, andando dall' equatore verso i poli. Non deve però credersi che questa legge si verifichi costantemente, perchè le irregolarità del nostro globo, che si manifestano in diversi luoghi, l' alterano qualche volta in modo sensibilissimo.

RETTILINEO (*Geom.*). Termine che si applica alle figure terminate da linee rette.

REYNEAU (Carlo), geometra distinto, nato nel 1656 a Brissac nell' Angiò, entrò in età di venti anni nella congregazione dell' Oratorio a Parigi. Se unila si sa de' suoi primi anni, nei quali non si distinse che per l' applicazione sua allo studio e per la sua pietà, il resto della sua vita, consacrata tutta ai doveri del professorato, alla preghiera, e alla composizione di due opere di matematiche, non presenta nessuna notabile particolarità. Il p. Reyneau professò successivamente la filosofia a Tolone e a Pezenas, e le matematiche nel collegio di Angers. Per ventidue anni disimpegnò con sommo grido quest' ultimo ufficio, e fu quindi ammesso nell' Accademia delle Scienze come socio libero. Il p. Reyneau, amante della ritiratezza, avea poche relazioni e poco commercio: i principali suoi amici furono il p. Mallebranche di cui ammetteva tutti principj, e il cancelliere d' Aguesseau: morì a Parigi il 24 Febbrajo 1728. Le due opere di cui è autore sono: I *L' Analyse démontrée, ou Manière de résoudre les pro-*

blèmes de mathématiques, Parigi, 1708, 2 vol, in-4. Quest' opera presenta una raccolta interessante delle principali teorie di Cartesio, di Leibnitz, di Newton, dei Bernoulli e di tutti i grandi geometri del secolo XVII, dimostrate secondo Fontenelle con maggior chiarezza ed esattezza di quello che era stato fatto fino allora. L'*Analisi dimostrata* ottenne un gran successo all' epoca della sua pubblicazione, ma forse quest' opera elementare non merita gli elogi un poco esagerati che le dà lo scrittore testè nominato. Il *La Science du calcul des grandeurs en général*, ou *Élémens de mathématiques*, Parigi, 1714, in-4. Il p. Reyneau non pubblicò che questo volume; il secondo, che comparve nel 1735 per cura del p. Mazières noto nelle scienze per un premio riportato nel 1726 dall' Accademia, fu stampato presso a poco quale fu trovato nelle carte dell' autore, perchè l' editore stimò inutile il compiere un' opera che trattava di un soggetto, cui Guisnée aveva allora allora esaurito nella sua *Applicazione dell' algebra alla geometria*. Sopra questo dotto può consultarsi la *Storia delle matematiche* di Montucla, Tom. II, pag. 169.

RHEITA (Il. P. Antonio Maria Schyrle de), cappuccino, nato nella Boemia, verso la fine del secolo XVI, si rese celebre per le sue cognizioni e pei suoi lavori matematici. Si era acquistata una reputazione grande come teologo e come predicatore; ma lo studio delle matematiche e soprattutto dell' astronomia occupava tutti i suoi ozj. Era a Colonia nel 1642 e 1643, e Weidler narra che nelle osservazioni astronomiche che vi fece, gli parve di vedere cinque nuovi satelliti di Giove, scoperta di cui fu sollecito di fare omaggio al papa Urbano VIII, dando a queste stelle, che poi si è riconosciuta esser quelle dell' Aquario, il nome di *Astri Urbanottavi*. Il p. Rheita è stato più fortunato nelle sue ricerche di ottica. È stato il primo che abbia costrutto il canocchiale astronomico attuale con quattro lenti convesse, di cui una si dice *oculare* e le altre tre *obiettivi*. Keplero, che aveva proposto *a priori* questa specie di telescopio, non era riuscito a costruirlo. Il p. Rheita è pur anco l' inventore del telescopio binoculo, che fu poi perfezionato dal p. Cherubino d' Orléans, e che Montucla crede che si trascuri troppo. Egli è soprattutto celebre per un tentativo infelice contro il sistema di Copernico. Delle idee non poco bizzarre su questo soggetto vedonsi espresse nella sola opera che di lui citeremo e che ha per titolo: *Oculus Enoch et Eliae, sive radius sydereo-mysticus*, Anversa, 1645, in due parti, in-fol. Nella prima parte l' autore espone le rivoluzioni dei pianeti, secondo il sistema di Copernico e quello di Ticone Brahé, di cui si sforza di stabilire la superiorità. Ne propone un terzo che gli sembra più preferibile ancora, ma che in fondo non è, secondo l' espressione di Delambre, che il sistema di Ticone capovolto. Indica le cagioni più probabili del flusso e del riflusso del mare, e dà in seguito la descrizione di una macchina, cui denomina *Planetologia meccanica*, per cui si può agevolmente far comprendere il sistema dell' universo alle persone le più ignare di cognizioni astronomiche. La seconda parte contiene una teologia astronomica, che presenta le prove dell' esistenza di Dio nelle maraviglie dell' astronomia.

RHETICO. *Vedi* Gioachino.

RICCATI (Vincenzo), geometra celebre, nacque l' 11 Gennajo 1707 a Castelfranco nel Trevigiano. Suo padre, il conte Giacomo Riccati, era uno de' primi matematici dell' Italia. Il caso particolare dell' equazione differenziale del primo ordine a due variabili, cui propose ai geometri dopo averlo risoluto per quanto può esserlo, ha ritenuto il suo nome. Insegnò egli stesso le matematiche a' suoi due figli, di cui i progressi corrisposero alle sue cure, e vide così rinnovarsi nella propria famiglia lo stesso fenomeno che in quella di Bernoulli. Vincenzo, il primogenito, fu ammesso in età di diciannove anni nell' ordine dei Gesuiti, del

quale divenne in breve uno dei membri più distinti e pei suoi talenti e per le sue cognizioni. Il p. Riccati, inviato da' suoi superiori a Bologna, vi professò per trentacinque anni le matematiche sublimi con un grido ognora crescente, che attirava alle sue lezioni un concorso numeroso di uditori. Incaricato nel tempo stesso di sorvegliare il corso dei fiumi nel Bolognese e negli Stati Veneti, fece eseguire sul Reno, sul Po, sull' Adige e sulla Brenta dei lavori che palesarono in lui un ingegnere dotto e profondo. I Bolognesi vollero perpetuare la memoria dei servigj del p. Riccati con una medaglia d' argento: ma il senato di Venezia ne fece coniare una d' oro di gran valore, che gli fu offerta nel 1774. Egli morì il 17 Gennajo 1775 nella sua patria, ove si era ritirato dopo la soppressione del suo ordine. Oltre varie *Lettere* nella *Nuova Raccolta di opuscoli scientifici*, tom. XXI a XXXI, ed alcuni *Opuscoli* nelle *Memorie* dell' Accademia di Bologna, di cui era membro, ha pubblicato: I *Dialogo dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e delle azioni delle forze morte si tien discorso*, Bologna, 1749, in-4; II *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium commentarius*, ivi, 1752, in-4; opera assai stimata; III *De seriebus recipientibus summam generalem algebraicam aut exponentibilem*, ivi, 1756, in-4; IV *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentia*, Lucca, 1757-72, 2 vol., in-4: il primo contiene tutti gli opuscoli che il p. Riccati aveva fino allora pubblicati, eccetto quelli di cui abbiamo qui sopra dati i titoli. Tale raccolta è assai ricercata; V *Institutiones analyticae collectae*, Bologna, 1765-67, 3 vol., in-4; altra edizione, Milano, 1775, 3 vol., in-4. Il p. Girolamo Saladini ha avuto parte in quest' opera. La vita di questo dotto è stata scritta dal Fabroni, e si legge nel tomo XVI delle sue *Vitae illustrium Italorum*. Si può altresì consultare il *Supplemento* alla *Bibliotheca Societatis Jesu* di Caballero, pag. 241.

RICCATI (Il Conte Giordano), fratello del precedente, fu a un tempo matematico, architetto e musico. Il suo nome ha avuto molta celebrità, ed è specialmente conosciuto per un Trattato assai stimato *sulle corde vibranti*. Il conte Riccati, nato nel 1709, morì a Treviso nel 1790.

RICCIOLI, (Giambatista), uno dei più celebri astronomi del secolo decimosettimo, ed uno degli uomini più dotti della società dei Gesuiti, nacque a Ferrara nel 1598. All' età di sedici anni abbracciò la regola di sant' Ignazio, e da' suoi superiori, si abilì a discernere il talento particolare di ciascun membro del loro ordine, fu destinato alle funzioni difficili dell' insegnamento. Dopo aver lungo tempo professato le belle lettere, la filosofia e la teologia, si applicò indefessamente allo studio dell' astronomia. In quel tempo, la Germania nel primo zelo della riforma rigettava la correzione del calendario, perchè procedente da Roma; e gl' Italiani al contrario ricusavano di ammettere come sospette di eresia tutte le scoperte dei dotti tedeschi. Il p. Riccioli fu perciò incaricato da' suoi superiori di dimostrare la falsità del sistema di Copernico e delle dottrine di Keplero. Questo dotto aveva troppa sagacità per non comprendere tutte le difficoltà di tale missione; quindi, dice l' autore della *Storia dell' astronomia moderna*, il p. Riccioli impugnò questo sistema con tutti gli argomenti che potè immaginare; ma, dal modo con cui ne parla si crederebbe di udire un avvocato incaricato d' uffizio di una cattiva causa, e che fa ogni suo sforzo per perderla. Egli conviene, per esempio, che, considerato come una semplice ipotesi, il sistema di Copernico è il più bello, il più semplice e il meglio immaginato. Nonostante, subito che non l' ammettava, bisognava sostituirgliene un altro, e siccome quelli di Tolomeo, di Ticone e del p. Rheita non erano più sostenibili, ne propose uno nuovo. Egli espose le sue idee su questo soggetto in un' opera intitolata: *Almagestum novum*: noi però non lo seguiremo nella spie-

gazione di questo sistema, che oggi non può esser considerato che come un semplice oggetto di curiosità. Ma il p. Riccioli, che aveva veduto quanto difettosa fosse l'astronomia lasciata dagli antichi, gettò in questo libro le fondamenta della riforma completa di tale scienza. Aveva ben compreso che la vera misura della terra doveva servir di base a questo gran lavoro, nel quale dovevano esser corretti i metodi e le dottrine degli antichi. Con questo fine, ajutato dai missionarj che i Gesuiti avevano in tutte le parti del mondo, compose il primo sistema generale ed uniforme di metrologia comparata, cui però hanno fatto dimenticare i nuovi lavori pubblicati posteriormente. Ei criticò giustamente la misura della terra eseguita da Snellio; ma la sua propria misura di cui si occupò dal 1644 al 1656, intrapresa con un metodo assolutamente diverso e che non poteva allora offrire esattezza, attese le irregolarità delle illusioni della refrazione orizzontale, sì poco conosciute anco al dì d'oggi, gli diede un resultato anco più difettoso di quello di Snellio.

Il p. Riccioli fu più felice ne' suoi lavori sulla luna, cui osservò lungamente con un eccellente cannocchiale di quindici piedi; portò fino a seicento il numero delle macchie che vi scoperse e di cui pubblicò la descrizione: Langren non ne aveva contate che dugentosettanta ed Evelin cinquecentocinquanta. La nomenclatura di Riccioli ha prevalso a quella di quest' ultimo, e viene adoperata anco presentemente. Scheiner e Rheita non avevano dato che abbozzi della figura della luna: quella che diede Riccioli è di gran lunga superiore. Le sue osservazioni sulla librazione, sì imperfettamente conosciuta da Evelio, comporrebbero esse sole un volume. Osservò anco a lungo Saturno, di cui indovinò per così dire l'anello, poichè notò che le due appendici da cui il disco di tale pianeta era accompagnato formavano una specie di ellisse: non restava che una parola a dire per definire l'anello di Saturno; ma tale parola fu detta da Huygens.

Non ostante gli errori che si possono rimproverare al Riccioli, non si può negare che non abbia recati immensi vantaggi tanto all'astronomia quanto alla geografia e alla cronologia. Assunse la difesa della riforma gregoriana di cui l'esattezza era contrastatata da Fr. Levera, e pubblicò sotto il nome di Michele Manfredi: *Vindiciae Kalendarii Gregoriani*, Bologna, 1661, in-fol. opera che ottenne l'approvazione di Cassini. Quantunque fosse di salute delicata e sovente infermiccia, lavorava con un ardore infaticabile. Finalmente, oppresso d'enni e d'infermità, morì a Bologna il 25 Giugno dell' anno 1671.

Il catalogo compiuto delle opere del p. Riccioli si trova nella *Bibliotheca Societatis Jesu*, p. 416: noi ci contenteremo di citare le principali: I *Almagestum novum astronomiam veterem novamque complectens*, Bologna, 1651, 2 vol. in-fol. » Tale opera, dice Lalande nella sua *Bibliografia astronomica*, è un tesoro di » erudizione astronomica: contiene 1500 pagine, e 10,565,000 lettere. Gli astro- » nomi ne fanno un uso continuo. » Lalande la cita di continuo nella sua *Astronomia*. Vi si trova la lista e la discussione di tutti gli ecclissi citati dagli storici, da quello che avvenne al nascere di Romolo (anno 772 av. G. C.) fino all'anno 1647; II *Astronomia reformata*, ivi, 1665, 2 vol. in-fol. Quest' opera, che è il complemento della precedente, è assai più rara e più importante per le osservazioni cui contiene. Vi si possono altresì vedere delle utili osservazioni sulla vera data di alcuni ecclissi falsificati dagli autori che ne hanno parlato; III *Geographiae et hydrographiae reformatae libri XII*, ivi, 1661, in-fol. Tale opera piena di dotte investigazioni non è meno importante delle precedenti: Wolf la chiama *opus praestantissimum, in hoc scientiarum genere fere unicum*, e può anco al presente esser consultata con frutto. Vi si distingue una tavola di tutte le longitudini e latitudini osservate o dedotte dalle migliori osservazioni. Tale tavola contenente circa 2700 articoli è notabilissima. Le longitudini più erronee

che racchiude non si scostano di più di sette o otto gradi da quelle che si conoscono oggigiorno. Se l'opera di Riccioli fosse stata accompagnata da una raccolta di carte costruite sulla scorta della sua tavola di longitudini e di latitudini, la rivoluzione fatta nella geografia da Delisle sarebbe accaduta trenta o quaranta anni prima, nè a questo geografo sarebbero state attribuite nè tuttora si attribuirebbero una moltitudine di rettificazioni che sono unicamente dovute al p. Riccioli: ma, privo di un siffatto accessorio, tale importante lavoro è rimasto inosservato; IV *Chronologia reformata et ad certas conclusiones redacta*, ivi, 1669, 3 parti, in-fol. Nella prima parte, l'autore espone con grandi particolarità i calendarii e le ere delle diverse nazioni: vi discute settanta sistemi diversi sull'anno del mondo in cui è nato Gesù Cristo, e trova, secondo la Volgata e la Bibbia ebraica, l'anno 4184; ma preferisce l'anno 5634, giusta le versione dei settanta. La seconda parte contiene una cronaca dei principali avvenimenti, anno per anno, dalla creazione (di cui il primo giorno corrisponde alla domenica 1.º Maggio dell'anno giuliano 5634 av. G. C.) fino all'anno 1668. La terza parte contiene le liste cronologiche dei sovrani di diversi stati, dei patriarchi, de' concilj, delle eresie, ec. Tale opera, superata in seguito da molte altre e in specie dall' *Arte di verificare le date*, è oggi poco consultata. Sopra questo dotto astronomo si consultino le *Memorie istoriche de' letterati Ferraresi* dell' abate Barotti, Ferrara, 1793, tom. II, pag. 270 e segg.

RICHARD (Claudio), gesuita, nato nel 1589 ad Ornans in Borgogna, insegnò per 40 anni con sommo grido le matematiche nel collegio reale di Madrid, e morì in questa città il 20 Ottobre 1664. Le sue opere sono: I Un' edizione delle opere di Archimede, Parigi, 1626, in-fol. Questo lavoro ha per base l' edizione pochi anni avanti pubblicata da Rivault; II *Commentarius in omnes libros Euclidis*, Anversa, 1645, in-4; III *Commentarii in Apollonii Pergaei Conicorum libros IV*, ivi, 1655, in-fol. IV *Ordo novus et reliquis facilior, tabularum sinuum et tangentium*.

RICORRENTE (*Alg.*). Si chiama, in generale, *serie ricorrente*, qualunque serie nella quale ciascun termine è formato da un certo numero di termini che lo precedono, mediante una stessa legge. Tale è, per esempio, il seguito dei numeri

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ \text{ec.}$$

di cui ciascun termine è uguale alla somma dei due termini che lo precedono immediatamente; tale è ancora

$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ \text{ec.},$$

di cui ciascun termine è formato da quello che lo precede di due posti, aggiunto al doppio di quello che lo precede immediatamente.

Queste serie considerate per la prima volta dal Moivre, nelle sue *Miscel. analyt.* e nella sua *Doctrine of chances*, sono generate dallo sviluppo di qualunque funzione frazionaria razionale, e si classano per *ordini* secondo il grado del polinomio che forma il denominatore della frazione. Così, la serie che resulta dallo sviluppo di

$$\frac{a}{p+qx},$$

dicesi *ricorrente del prim' ordine*; quella che resulta da

$$\frac{a+bx}{p+qx+rx^2},$$

si chiama *ricorrente del second' ordine*; e così di seguito.

In una *serie riccorrente* dell' ordine m, gli m primi termini sono indipendenti gli uni dagli altri, e la legge di generazione non comincia a manifestarsi che nell' $m+1^{\text{simo}}$ termine che allora è formato, come tutti quelli che lo seguono, dalla somma degli m termini precedenti, moltiplicati ciascuno per delle quantità costanti, il cui complesso si chiama la *scala di relazione*.

Per render più chiaro questa teoria, esaminiamo in particolare la formazione delle serie ricorrenti del second' ordine. Poniamo

$$\frac{a+bx}{p+qx+rx^2} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}$$

e determiniamo i coefficienti A, B, C, D, ec. mediante il metodo dei coefficienti indeterminati. (*Vedi* Coefficienti.) Moltiplicando i due membri di quest' uguaglianza per $p+q+rx^2$, e quindi trasportando tutti i termini nel secondo membro, otterremo

$$o = \left\{ \begin{array}{r|r|r|r|l} Ap+Bp & x+Cp & x^2+Dp & x^3+Ep & x^4+\text{ec.} \\ -a+Aq & +Bq & +Cq & +Dq & \\ -b & +Ar & +Br & +Cr & \end{array} \right.$$

il che dà l' equazioni

$$Ap-a = o, \quad \text{donde} \quad A = \frac{a}{p}.$$

$$Bp+Aq-b = o, \qquad B = -\frac{q}{p}A+\frac{b}{p},$$

$$Cp+Bq+Ar = o, \qquad C = -\frac{q}{p}B-\frac{r}{p}A,$$

$$Dp+Cq+Br = o, \qquad D = -\frac{q}{p}C-\frac{r}{p}B,$$

$$Ep+Dq+Cr = o, \qquad E = -\frac{q}{p}D-\frac{r}{p}C,$$

ec. . . . . . ec. . . . .

Si vede subito che i due primi coefficienti A e B si ottengono senza veruna legge, e, che a cominciare dal terzo, ciascun coefficiente è formato dalla somma dei due precedenti, moltiplicati respettivamente per $-\frac{q}{p}$, $-\frac{r}{p}$; vale a dire il coefficiente che precede di due posti per $-\frac{r}{p}$, e quello che non precede che di un posto per $-\frac{q}{p}$. Ne segue che i coefficienti A, B, C, ec. formano essi stessi una *serie ricorrente* del second' ordine la cui scala di relazione è

$$-\frac{r}{p}, \quad -\frac{q}{p}.$$

Ora, se esaminiamo ciascun termine della serie, troveremo che

$$\text{il } 3.° \text{ è } -\frac{q}{p}Bx^2-\frac{r}{p}Ax^2, \quad \text{ovvero} \quad -\frac{r}{p}x^2A \quad -\frac{q}{p}x\,.\,Bx,$$

$$\text{il } 4.° \quad -\frac{q}{p}Cx^3-\frac{r}{p}Bx^3, \qquad -\frac{r}{p}x^2Bx \quad -\frac{q}{p}x\,.\,Cx^2,$$

$$\text{il } 5.° \quad -\frac{q}{p}Dx^4-\frac{r}{p}Cx^4, \qquad -\frac{r}{p}x^2Cx^2-\frac{q}{p}x\,.\,Dx^3,$$

ec. ec. ec.

Così, ciascun termine della serie, a partire dal terzo, è uguale alla somma dei due precedenti, moltiplicati respettivamente per

$$-\frac{r}{p}x^2, \quad -\frac{q}{p}x.$$

Si troverebbe nella stessa maniera che nella saria ricorrente che resulta dallo sviluppo della frazione

$$\frac{a+bx+cx^2}{p+qx+rx^2+sx^3},$$

ciascun termine, a partire dal quarto, è uguale alla somma dei tre termini che lo precedono, moltiplicati respettivamente per

$$-\frac{s}{p}x^3, \quad -\frac{r}{p}x^2, \quad -\frac{q}{p}x,$$

e così di seguito. Se, per maggior semplicità, si prende $p=1$, il che d'ora in avanti faremo, *la scala di relazione* dei coefficienti è $-s$, $-r$, $-q$, e quella dei termini: $-sx^3$, $-rx^2$, $-qx$. Generalmente, non si ha bisogno che di considerare la scala di relazione dei coefficienti.

Resulta dunque da tutto ciò che precede, che la scala di relazione dei coefficienti della serie ricorrente generata da una frazione il cui denominatore è uguale

$$1+qx+rx^2+sx^3+\text{ ec. } \ldots\ldots +zx^m,$$

è

$$-z, \quad -\text{ec.} \ldots\ldots -s, \quad -r, \quad -q,$$

vale a dire che questa scala si compone del seguito dei coefficienti medesimi di questo denominatore preso in senso inverso e con segni contrari. Così, quando mediante la divisione avremo ottenuto gli m primi termini della serie, potremo continuarla indefinitamente per mezzo della scala di relazione.

I due problemi principali che possono essere proposti sopra le serie ricorrenti, sono, di determinare il loro *termine generale* e il loro *termine sommatorio* (*Vedi* Termine); ne indicheremo la loro soluzione.

Sia proposta la serie ricorrente

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ ec.}$$

dovuta allo sviluppo della frazione

$$\frac{a+bx+cx^2+\text{ ec. } \ldots\ldots +mx^{m-1}}{1-qx-rx^2-\text{ ec. } \ldots\ldots -tx^m};$$

e la cui scala di relazione è

$$+t_1 \quad + \text{ec.} \ldots\ldots +s, \quad +r, \quad +q.$$

Se si decompone questa frazione in frazioni parziali

$$\frac{\alpha'}{1-\alpha x}+\frac{\beta'}{1-\beta x}+\frac{\gamma'}{1-\gamma x}+\frac{\delta'}{1-\delta x}+\text{ ec.}$$

e che si sviluppi ciascuna di queste frazioni parziali in *serie ricorrente* del prim' ordine, si avrà il seguito delle serie

$$\begin{array}{l} a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3+e_1x^4+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3+e_2x^4+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ a_3+b_3x+c_3x^2+d_3x^3+e_3x^4+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ a_4+b_4x+c_4x^2+d_4x^3+e_4x^4+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ \text{ec.}\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ec.} \end{array}$$

la cui somma sarà evidentemente uguale alla serie proposta. Così

$$\begin{array}{l} A=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ B=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ C=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ D=d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+\text{ ec.}\ldots\ldots \\ \text{ec.}=\text{ec.}\ldots\ldots \end{array}$$

ed è evidente che il coefficiente del termine generale della serie proposta si trova uguale alla somma dei coefficienti dei termini generali di tutte le serie parziali. Ora la decomposizione delle frazioni razionali in frazioni parziali non condoce solamente a frazioni parziali della forma

$$\frac{\alpha'}{1-\alpha x},$$

ma ancora a frazioni della forma

$$\frac{M}{(1-\alpha x)^{\mu}};$$

diviene dunque essenziale di esaminare le serie che resultano da queste frazioni.

In primo luogo la frazione $\frac{M}{1-\alpha x}$, dà la serie

$$M+M\alpha x+M\alpha^2x^2+M\alpha^3x^3+M\alpha^4x^4+\text{ ec.},$$

il cui termine generale è $M\alpha^{m-1}x^{m-1}$, m essendo l' indice del posto dei termini.

La frazione $\frac{M}{(1-\alpha x)^2}$ genera la serie

$$M+2M\alpha x+3M\alpha^2x^2+4M\alpha^3x^3+5M\alpha^4x^4+\text{ ec.},$$

il cui termine generale è $mM\alpha^{m-1}x^{m-1}$.

La frazione $\frac{M}{(1-\alpha x)^3}$ dà la serie

$$M + 3M\alpha x + 6M\alpha^2x^2 + 10M\alpha^3x^3 + 15M\alpha^4x^4 + \text{ec.},$$

il cui termine generale è $\frac{m(m+1)}{1.2} M\alpha^{m-1}x^{m-1}$.

In generale, la frazione $\frac{M}{(1-\alpha x)^\mu}$ dà la serie

$$M + \mu M\alpha x + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} M\alpha^2x^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3} M\alpha^3x^3 + \text{ec.};$$

il cui termine generale è

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+\mu-2)}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-1)} M\alpha^{m-1}x^{m-1}.$$

Dunque tutte le volte che la decomposizione di una frazione razionale potrà effettuarsi in frazioni parziali della forma

$$\frac{M}{(1-\alpha x)^\mu},$$

potremo sempre determinare il termine generale della serie ricorrente generata da questa frazione. Questo è quello che renderemo più chiaro mediante esempi particolari.

Esempio I. Trovare il termine generale della serie ricorrente prodotta dallo sviluppo della frazione

$$\frac{1-x}{1-x-2x^2}.$$

Questa serie è

$$1 + 0x + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + \text{ec.},$$

nella quale il coefficiente di ciascun termine, a partire dal terzo, è uguale alla somma dei due che lo precedono, moltiplicati respettivamente per $+2$, $+1$.

I fattori del primo grado, del denominatore $1-x-2x^2$, essendo $1+x$, $1-2x$, poniamo

$$\frac{1-x}{1-x-2x^2} = \frac{P}{1+x} + \frac{Q}{1-2x},$$

e ricaviamo da quest' uguaglianza il valore di P e di Q, troveremo (*Vedi* Integrale).

$$P = \frac{2}{3}, \quad Q = \frac{1}{3}.$$

Ora i termini generali delle serie generate da

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+x}, \quad \frac{\frac{1}{3}}{1-2x}$$

sono, mediante quello che abbiamo veduto,

$$\frac{2}{3}\left(-1\right)^{m-1}.x^{m-1},\quad \frac{1}{3}2^{m-1}.x^{m-1}.$$

Così il termine generale della serie proposta è

$$\left[\frac{2}{3}\left(-1\right)^{m-1}+\frac{1}{3}2^{m-1}\right]x^{m-1}:$$

ossia

$$\frac{2^{m-1}+2(-1)^{m-1}}{3}x^{m-1}.$$

Facendo successivamente in quest'espressione $m=1, 2, 3$, ec., si otterranno i termini successivi 1, $0x$, $2x^2$, ec. della serie, senza aver bisogno di costruirli gli uni mediante l'aiuto degli altri.

Esempio II. Trovare il termine generale della serie che resulterebbe dalla frazione

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^3}.$$

Decomponendo questa frazione si ottiene

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}=\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}.$$

Il termine generale domandato è dunque

$$\frac{1}{2}mx^{m-1}+\frac{1}{4}x^{m-1}+\frac{1}{4}\left(-1\right)^{m-1}.x^{m-1}$$

$$=\frac{2m+1+(-1)^{m-1}}{4}.x^{m-1};$$

donde resulta la serie

$$1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+\text{ec.}\ldots.$$

La ricerca del termine generale di una serie ricorrente è dunque fondata sopra la decomposizione della frazione generatrice in frazioni parziali, decomposizione di una grande utilità nel calcolo integrale, e che in ultimo luogo si riduce alla determinazione dei fattori del denominatore. Questa questione è per conseguenza sottoposta a tutte le difficoltà della risoluzione dell'equazioni. La ricerca del termine sommatorio dà luogo a due differenti problemi; o si domanda il vero termine sommatorio, vale a dire quello che dà la somma di un numero qualunque di termini di una serie ricorrente proposta, o si domanda solamente la somma di tutti i termini, vale a dire, la frazione generatrice della serie. Tratteremo solamente in questo punto l'ultimo caso, che è il più facile; il primo sarà esaminato in altra parte. (*Vedi* Sommatorio).

Per fissare le idee, sia

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ec.}$$

una serie ricorrente del terz'ordine, la cui scala di relazione è

$$+r,\quad +q,\quad +p.$$

Questa scala ci fa immediatamente conoscere il denominatore della frazione generatrice

$$1-px-qx^2-rx^3;$$

così il numeratore dovendo essere della forma $a+bx+cx^2$, poniamo

$$\frac{a+bx+cx^2}{1-px-qx^2-rx^3}=A+Bx+Cx^2+\text{ ec. . . . .}$$

e il metodo dei coefficienti indeterminati ci farà trovare le relazioni

$$a=A,$$
$$b=B-pA,$$
$$c=C-pB-qA;$$

dunque la frazione domandata è

$$\frac{A+(B-pA)x+(C-pB-qA)x^2}{1-px-qx^2-rx^3},$$

sia, per esempio, la serie del terz' ordine

$$1-2x+3x^2-10x^3+22x^4-51x^5+\text{ec.}$$

La scala di relazione è -3, $+2$, -1, e, per conseguenza, il denominatore, $1+x-2x^2+3x^3$; siccome inoltre abbiamo $A=1$, $B=-2$, $C=3$, sostituendo questi valori nella formula, troveremo per la frazione generatrice di questa serie

$$\frac{1-x-x^2}{1+x-2x^2+3x^3}.$$

Se la serie fosse del quart' ordine e la sua scala di relazione $+s$, $+r$, $+q$, $+p$, un metodo simile ci farebbe trovare per l' indeterminate a, b, c, d della frazione generatrice

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4},$$

le espressioni

$$a=A,$$
$$b=B-pA,$$
$$c=C-pB-qA,$$
$$d=D-pC-qB-rA.$$

La legge generale di queste determinazioni è facile a comprendersi.

Daniello Bernoulli ha ricavato dalla teoria delle serie ricorrenti un processo ingegnosissimo per ottenere per approssimazione le radici dell' equazioni numeriche di un grado qualunque. Abbiamo esposto questo processo alla parola Approssimazione; ci rimane in questo punto da far conoscere i principii sopra i quali esso è fondato: sia

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{ ec. . . .}}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4-tx^5-\text{ ec. . . .}}$$

la frazione razionale, la quale sviluppata dà la serie ricorrente

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{ec.}$$

Mediante quello che precede, i coefficienti A, B, C, D, ec. di questa serie, sono determinati dall' espressioni

$$\begin{aligned} A&=a,\\ B&=pA+b,\\ C&=pB+qA+c,\\ D&=pC+qB+rA+d,\\ E&=pD+qC+rB+sA+e,\\ \text{ec.}&=\text{ec.};\end{aligned}$$

e il suo termine generale si trova mediante la risoluzione della frazione generatrice in frazioni parziali, i cui denominatori sono i fattori del denominatore

$$1-px-qx^2-rx^3-\text{ec.}$$

Supponiamo che la decomposizione della frazione razionale in frazioni parziali dia la serie

$$\frac{a'}{1-\alpha x}+\frac{b'}{1-\beta x}+\frac{c'}{1-\gamma x}+\frac{d'}{1-\delta x}+\text{ec.}$$

allora il termine generale della serie ricorrente sarà

$$(a'\alpha^{m-1}+b'\beta^{m-1}+c'\gamma^{m-1}+d'\delta^{m-1}+\text{ec.})x^{m-1}.$$

Se indichiamo con P il coefficiente di x^{m-1}, e con Q, R, ec. quelli delle potenze che seguono, la serie prenderà la forma

$$A+Bx+Cx^2+\text{ec.}\ldots+Px^{m-1}+Qx^m+Rx^{m+1}+\text{ec.}\ldots$$

Premesso ciò, osserviamo che le potenze dei numeri inegnali diventano tanto più ineguali le une per rapporto alle altre, quanto queste potenze hanno esponenti più grandi, così ammettendo che α sia un numero più grande di tutti gli altri β, γ, δ, ec., e che m sia un numero grandissimo, avremo con poca differenza

$$P=a'\alpha^{m-1},\quad Q=a'\alpha^m.$$

donde

$$\frac{Q}{P}=\alpha.$$

Dunque, quando la serie ricorrente sarà stata prolungata assai lontano, il coefficiente di un termine qualunque diviso pel coefficiente del termine precedente darà con pochissima differenza il valore di α, e questo valore sarà tanto più approssimato quanto i coefficienti impiegati per ottenerlo apparterranno a potenze più grandi di x.

Ma $1-\alpha x$ è un fattore del prim' ordine del denominatore $1-px-qx^2-$ ec. della frazione razionale, e quando si conosce un tal fattore si conosce ancora una radice dell' equazione

$$1-px-qx^2-rx^3-sx^4-\text{ec.}\ldots=0\ \ldots\ (a)$$

cioè $x=\frac{1}{\alpha}$, dunque, poichè mediante la serie ricorrente si trova il più gran numero α, si ottiene nello stesso tempo mediante questa serie la più piccola radice $\frac{1}{\alpha}$ dell' equazione (a).

Se si fa $x=\frac{1}{z}$, l' equazione diventa

$$z^m-pz^{m-1}-qz^{m-2}+rz^{m-3}-\text{ec.} \ldots\ldots =0 \ldots\ldots (b),$$

la più gran radice della quale è $z=\alpha$.

Così, ammettendo che l' equazione (b) abbia tutte le sue radici reali e ineguali tra esse, si troverà la più grande nella seguente maniera. Si prendano a piacere dei numeri a, b, c, d, ec. e con questi numeri e i coefficienti dell' equazione proposta si formi la frazione razionale

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.}}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4-\text{ec.}}$$

ovvero, il che equivale allo stesso, si prendano a piacere gli m primi termini di una serie ricorrente e si formino i seguenti con la scala di relazione

$$\text{ec.} \ldots\ldots +s,\ +r,\ +q,\ +p$$

si prolunghi sufficientemente questa serie; il quoziente del coefficiente di uno dei suoi termini per il coefficiente del termine precedente darà il valore approssimato della più gran radice.

Per esempio, si abbia da trovare la più gran radice dell' equazione

$$x^2-3x-1=0,$$

formiamo la frazione

$$\frac{a+bx}{1-3x-x^2},$$

il cui sviluppo, supponendo 1 e 2 per i due termini, dà la serie ricorrente

$$1,\ 2,\ 7,\ 23,\ 76,\ 251,\ 829,\ 2738,\ \text{ec.} \ldots$$

Avremo dunque pel valore approssimato della radice domandata

$$\frac{2738}{829}=3,3027744 \ldots\ldots$$

Ora, la più gran radice dell' equazione proposta è

$$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}=3,3027756 \ldots\ldots;$$

donde si vede che il valore trovato è esatto fino al quinto decimale. Calcolando un termine di più, nella serie, questo termine, che è 9043, dà un valore ancora più approssimato, poichè si ha

$$\frac{9043}{2738}=3,3027759 \ldots\ldots$$

Eulero ha esposto questo metodo facendolo minutamente conoscere nella sua *Introduzione all' analisi degli infinitamente piccoli*, e il Lagrange ne ha fatto il soggetto di una delle note del suo *Trattato della risoluzione dell' equazioni numeriche.* Siamo perciò costretti a rimandare a quest' opere.

RIDUZIONE. Nella *Scienza dei numeri*, ciò significa in generale, la conversione di una quantità in un' altra quantità equivalente espressa più semplicemente.

Per esempio $\frac{30a^3b^2}{15a^2b}$ si *riduce* a $2ab$ sottraendo i fattori comuni ai due termini.

Alcuni autori hanno distinto le *riduzioni*, puramente aritmetiche, in *ascendenti* e *discendenti.* La *riduzione ascendente* è quella che si opera quando si esprime in unità di una più alta indicazione una quantità data in unità di un' indicazione inferiore. Tale è la riduzione di 120 *secondi* in a *minuti.* La *riduzione discendente* è il contrario, tale è quella di 4 *tese* in 24 *piedi.* Queste due specie di *riduzioni* si effettuano sempre, la prima con delle *divisioni*, e la seconda con delle *moltiplicazioni.* Siccome esse sono di un uso comune nei calcoli ne daremo alcuni esempi.

1. *Riduzione ascendente.* Per ridurre una quantità data, le unità della quale sono di un' indicazione qualunque, in un' altra d' indicazione superiore, bisogna precedentemente conoscere il rapporto che ei è tra le unità di ciascuna di queste indicazioni, così, per esempio, per ridurre 155 *scellini* in *lire sterline*, bisogna sapere che uno *scellino* è la ventesima parte di una *lira sterlina*, ovvero che una *lira* vale 20 *scellini*, poichè questo rapporto essendo conosciuto, una semplice divisione basta per operare la riduzione. Infatti, tante volte 20 è contenuto in 155, quante volte 155 scellini valgono delle lire sterline, e siccome in questo caso

$$\frac{155}{20} = 7, \quad \text{resto} \quad 15,$$

si trova, effettuando la divisione, che 155 scellini equivalgono a 7 lire, più 15 scellini.

Se si trattasse di ridurre $2565''$ in *minuti*, siccome il minuto vale $60''$, si dividerebbe 2565 per 60, e si troverebbe

$$\frac{2565}{60} = 42, \quad \text{resto} \quad 45,$$

donde $2565'' = 42', 45''$. Ed ugualmente per tutti i casi.

2. *Riduzione discendente.* Quando una quantità è espressa, in unità di un' indicazione qualunque, e che si vuole ridurla in unità d' un' indicazione inferiore, bisogna evidentemente moltiplicarla per il numero che esprime quante volte la prima unità contiene la seconda; poichè, ammettendo che un' unità delle prima indicazione sia equivalente ad m unità della seconda, A unità della prima indicazione saranno equivalenti ad m volte A unità della seconda indicazione; così, se si trattasse di ridurre 7 lire sterline in scellini, si moltiplicherebbe 7 per 20; come se si trattasse di ridurre $42'$ in secondi; si moltiplicherebbe 42 per 60, ed ugualmente per tutti i casi.

Le *riduzioni numeriche* non sono mai che semplici cangiamenti di forma, e la quantità primitiva è sempre equivalente alla quantità ridotta. Non segue lo stesso nelle *riduzioni geometriche*, come lo vedremo.

RIDUZIONE *delle frazioni alla loro più semplice espressione.* (*Vedi* COMUN DIVISORE.)

Riduzione. (*Geom.*). Ridurre una figura geometrica, equivale a fare una figura simile le cui dimensioni siano più piccole. Il *levare di pianta* non si compone che di questa specie di riduzione, poichè il suo oggetto principale è di tracciare sopra la carta l' immagine in piccolo di ciò che è sul terreno.

Per ridurre il quadrilatero ABCD (*Tav.* XLVI, *fig.* 11), si tratta dunque di costruire un quadrilatero più piccolo e simile *abcd*; così avendo condotto una retta *ab* che sia la metà, il terzo, il quarto, e in generale una parte qualunque del lato AB, si faranno ai punti *a* e *b* degli angoli uguali agli angoli A e B, quindi si darà ai lati *ad* e *bc* delle lunghezze che abbiano il medesimo rapporto con AD e BC, come *ab* con AB; si condurrà in seguito la retta *cd*, e il quadrilatero ridotto *abcd* sarà costruito.

La riduzione delle figure geometriche si effettua principalmente mediante la riduzione dei loro lati; così è necessario di costruire precedentemente delle *Scale* (*Vedi* Questa parola), o di servirsi del *compasso proporzionale*. Questo instrumento si compone di due rami (*Tav.* CI, *fig.* 3) terminati in punte alle loro estremità e riuniti mediante un asse mobile, che si fissa con l' aiuto di una vite (*Tav.* CI, *fig.* 7). Delle divisioni incise sopra uno dei suoi rami indicano il punto ove bisogna fissare l' asse perchè prendendo la lunghezza di una retta con due delle punte l' apertura delle due punte opposte dia la lunghezza della retta ridotta. Se vogliamo, per esempio, che i lati della figura ridotta siano il terzo di quelli della figura data, si regola il compasso in modo che l' apertura dei più piccoli bracci sia il terzo di quella dei grandi bracci.

Si riduce ancora una carta, un disegno o una figura per mezzo dell'*ingraticolatura*, vale a dire dividendo l' originale, come pure la carta sopra la quale si deve fare la copia, in piccoli quadrati mediante linee rette, quindi disegnando in ciascun quadrato della carta ciò che si trova contenuto nel quadrato corrispondente dell' originale. Il numero dei quadrati dev' essere necessariamente lo stesso nelle due figure; solamente si fanno quelli della seconda più piccoli o più grandi, secondo che si vuole avere la copia più piccola o più grande. Le figure 5 e 6 della Tavola CXCVII danno un modello di questa riduzione.

Riduzione *degli angoli al centro della stazione*. Nell' operazioni dell' agrimensura, spesso succede che non si può situare esattamente il grafometro al centro degli oggetti presi per punti d' osservazione, e siamo allora obbligati di *ridurre* gli angoli osservati per riportargli a quelli che si sarebbero trovati se lo strumento fosse stato situato al centro. Quest' operazione che non presenta veruna difficoltà è descritta in tutti i trattati di agrimensura.

RIDUZIONE ALL' ECCLITTICA (*Astron.*). Si dà questo nome alla differenza dell' arco NP, compreso tra il luogo P di un pianeta (*Tav.* CXCVII, *fig.* 2) e il suo nodo N, coll' arco NR dell' ecclittica, intercetto tra il nodo e il circolo di longitudine del pianeta. Essendo dato l' angolo d' inclinazione dell' orbita egualmente che l' arco NP, si trova questa riduzione calcolando, nel triangolo sferico NRP, il lato NR che si toglie quindi da NP.

RIFLESSIBILITÀ. *Vedi* Reflessibilità.

RIFLESSIONE. *Vedi* Reflessione.

RIFLESSO. *Vedi* Reflesso.

RIFLUSSO. *Vedi* Marea.

RIFRANGIBILITÀ. *Vedi* Refrangibilità.

RIFRAZIONE. *Vedi* Refrazione.

RIGA (*Geom.*). Instrumento semplicissimo fatto in generale di un legno duro, il quale serve per tracciare linee rette.

La riga è molto in uso in tutte le arti meccaniche e grafiche; ci si assicura della sua esattezza tracciando col suo mezzo una linea sopra la carta, poi si

rovescia in modo che il limite che era a destra sia a sinistra, all'estremità di questa linea, e *vice-versa*, e si traccia di nuovo una linea facendo strisciare una punta di lapis lungo del suo lato. Se la riga è esatta, le due linee tracciate debbono confondersi e non formare che una sola retta.

RIPERCUSSIONE. Termine di meccanica che significa la stessa cosa di Riflessione.

RISOLUZIONE. Preso nel suo senso generale, questa parola indica la divisione o la separazione di qualche quantità composta nella sue parti costituenti.

In *algebra*, la Risoluzione *dell'equazioni* è la determinazione dei valori dalle quantità incognite delle quali quest' equazioni sono composte. (*Vedi* Equazioni. Vedi ancora Approssimazione e Radice).

Risoluzione si prende ancora nel senso di *soluzione:* risolvere un problema, equivale a darne la soluzione.

RISULTANTE (*Mec.*). Si dà questo nome alla forza unica la cui azione produrrebbe lo stesso effetto che quello di più forze le quali agissero simultaneamente sopra un mobile. Quest' ultime prendono allora il nome di *componenti* rapporto alla prima.

Le relazioni che esistono tra una risultante e le sue componenti formano la base della statica. Ne daremo la deduzione, dopo avre precedentemente rammentato alcune nozioni generali della meccanica.

1. Si può concepire un corpo qualunque come composto di un' infinità di punti materiali legati tra essi in un modo particolare, secondo la natura particolare di questo corpo, il quale così diventa un *sistema di punti*. L' equilibrio o il moto di un tal sistema dipendendo evidentemente dall' equilibrio o dal moto delle sue parti componenti; cominceremo dal considerare l' azione delle forze sopra un solo punto materiale isolato.

2. Una forza la quale agisce sopra un punto materiale può farlo in due maniere differenti, o spingendolo avanti essa, o trasportandolo dalla sua parte: l' effetto prodotto essendo sempre lo stesso, possiamo impiegare indifferentemente l' una o l' altra di queste ipotesi.

3. Si chiama *direzione* del moto la linea retta secondo la quale una forza agisce.

4. Quando una sola forza agisce sopra un mobile, esso si muove necessariamente in linea retta; poichè non vi è veruna ragione perchè esso cangi di direzione.

5. Se molte forze, della natura di quelle che si chiamano istantanee (*Vedi* Forza), agiscono simultaneamente sopra uno stesso punto materiale, il moto si effettua ancora in linea retta, poichè queste forze non possono che modificarsi reciprocamente, per produrre un effetto unico. Così, siccome quest' effetto unico può attribuirsi all' azione di una sola forza, è sempre possibile di porre una forza unica invece di tutte le forze che fanno muovere un punto.

6. Si chiama *sistema di forza* la riunione delle forze che concorrono a produrre il moto, e queste forze esse stesse, considerate rapporto alla forza unica, o *risultante* che può essergli sostituita, si chiamano le componenti.

7. Quando più forze applicate ad uno stesso punto materiale si distruggono, in modo che il punto rimanga in riposo, si dice che esso è in *equilibrio*, o che le forze si fanno equilibrio. Supponiamo, per esempio, che un punto A (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 7) riceva simultaneamente l'azione delle due forze uguali P e P′, di cui la prima lo spinge nella direzione AP e la seconda nella direzione opposta AP′, questo punto non potendo obbedire ad una di queste impulsioni piuttosto che all' altra, rimarrà necessariamente in riposo. Seguirebbe lo stesso se, oltre le due forze P e P′, il punto A ricevesse ancora l' azione di due altre forze uguali Q e Q′ opposte nella loro direzione.

In tutti i casi dove un sistema di forze applicate simultaneamente ad un punto materiale produce il moto, è evidente che aggiungendo al sistema una forza ugnale alla risustante e che agisca in una direzione opposta, il nuovo sistema sarà in equilibrio; poichè potremo considerarlo come composto di due sole forze ugnali ed opposte. La questione di stabilire l'equilibrio in un sistema di forze date dipende dunque dalla determinazione della loro risultante. Questo problema, che s'indica sotto il nome di *composizione delle forze*, è il problema fondamentale della statica; esso presenta diversi casi particolari.

8. Quando più forze agiscono sopra un punto nella stessa direzione, la loro *risultante* agisce necessariamente in questa medesima direzione, ed essa è ugnale alla loro somma. Se alcune solamente di queste forze agiscono in una stessa direzione, e tutte le altre in una direzione opposta, la risultante è uguale alla differenza tra la somma delle prime e quella delle seconde, e agisce nella direzione della più gran somma. Il problema non presenta difficoltà che nel caso in cui le direzioni delle componenti formano degli angoli tra esse.

9. Comincismo dal considerare il caso più semplice, quello di due forze nguali che tirano simultaneamente il punto A (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 2) nelle direzioni AN ed AM che fanno tra esse un angolo qualunque MAN. Il punto A non potendo muoversi nello stesso tempo sopra due direzioni differenti, prenderà una direzione intermediara AR, e siccome non esiste alcuna ragione perchè questa direzione della risultante sia situata più vicina ad AM che ad AN, al di sopra piuttosto che al di sotto del piano di queste direzioni, essa dividerà evidentemente l'angolo MAN in due parti uguali.

Così rappresentando l'intensità della prima forza mediante la retta AP presa sopra la sua direzione AM, e l'intensità della seconda forza mediante la retta $AP' = AP$, presa ugualmente sopra la sua direzione AN, se si costruisce il parallelogrammo AMQN, la diagonale AQ di questo parallelogrammo sarà la direzione della *risultante* della quale non ci rimane più che da trovare la grandezza, e potremo stabilire come teorema:

La risultante di due forze uguali concorrenti in uno stesso punto ha per direzione la diagonale del parallelogrammo costruito sopra queste forze.

10. AP ed AP′ rappresentando sempre due forze ngnali le quali agiscono sul punto A (*Tav.* CLXXXVI *fig.* 3), supponiamo che la forza AP′ cresca delle quantità $P'Q = AP'$, ovvero che essa diventi doppia delle forze AP, la risultante delle due forze AP ed AQ, di cui la prima è metà più piccola della seconda, sarà ancora diretta seguendo la diagonale AS del loro parallelogrammo. Infatti, la diagonale AR del parallelogrammo costruito sopra le forze nguali AP ed AP′ essendo la direzione della loro risultante o la strada che percorre il punto A mediante l'azione di queste forze, immaginiamo i punti A ed R legati tra essi in un modo invariabile, uno non potrà muoversi senza trasportare l'altro, e il resultamento sarà lo stesso, tanto che si consideri il punto A come tirato dalle forze AP ed AP′ nella direzione AR, o il punto R come spinto nella direzione RM dalle forze PR e P′R. Possiamo dunque sostituire al sistema delle tre forze AP, AP′, P′Q, quello delle tre forze PR, P′R, P′Q.

Ma la forza P′R, che spinge il punto R, agisce come se essa trasportasse il punto P′, e possiamo ancora sostituire alle forze P′R e P′Q uguali e concorrenti al punto P′ una forza che agisca nella direzione della loro diagonale P′S. Così le tre forze PR, P′R, P′Q si riducono a due forze, l'una diretta seguendo PR o RS, e l'altra seguendo P′S, la cui risultante deve necessariamente passare pel punto di concorso S; poichè possiamo considerare le forze RS e P′S come agenti nel loro punto di concorso, e questo punto S dovendo esser mosso nella stessa maniera come se esso fosse sollecitato dall'azione simultanea di

queste due forze, non può essere che uno dei punti della risultante. Ora, questa risultante dovendo essere quella di tutto il sistema, passa ancora pel punto A; dunque essa ha necessariamente per direzione la diagonale AS.

Aumentando la forza AQ = 2AP di una nuova quantità AP, si dimostrerebbe con i medesimi ragionamenti, che la risultante delle due forze AP e 3AP è diretta seguendo la diagonale del loro parallelogrammo, e che per conseguenza segue sempre lo stesso per le forze AP e 4AP, AP e 5AP, ec. Dunque, in generale, *m* indicando un numero intero qualunque; due forze AP ed *m*AP, le cui grandezze stanno tra loro nel rapporto di $1:m$, hanno la loro risultante nella direzione della diagonale del loro parallelogrammo.

Lo stesso metodo applicato successivamente alle forze $m\times$AP e 2AP, $m\times$AP e 3AP, ec., proverebbe che la proposizione ha ancora luogo per due forze le cui grandezze sono tra loro nel rapporto di due numeri interi qualunque *m* ed *n*, ed è facile assicurarsi, mediante una riduzione all'assurdo, che esso si estende al caso di due forze incommensurabili.

Siano, infatti, due forze rappresentate, in grandezza e in direzione, dalle rette incommensurabile tra loro AP ed AQ (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 4), se la loro risultante non fosse diretta seguendo la diagonale AR del loro parallelogrammo, essa avrebbe un'altra direzione AR′ la quale taglierebbe in un certo punto R′ il lato PR del parallelogramma o suo prolungamento; e allora, prendendo tra R′ ed R un punto O, tale che conducendo ON parallela ad AP, le rette AP ed AN siano commensurabili tra esse, la diagonale AO sarebbe la direzione della risultante delle due forze AP ed AN. Ma la forza AP restando la stessa, la risultante deve ravvicinarsi tanto più dall'altra componente quanto questa componente è più grande; così è assurdo che AR′ sia la direzione della risultante di AP e di AQ, nel mentre che AO è la direzione della risultante di AP e di AN. È dunque impossibile di supporre che la risultante di due forze incommensurabili abbia una direzione diversa dalla diagonale del loro parallelogrammo. Premesso ciò, è facile dimostrare il seguente teorema, il quale contiene tutta la composizione delle forze.

11. Teorema. *La risultante di due forze qualunque applicate ad uno stesso punto e rappresentate da rette prese sopra le loro direzioni, a partire da questo punto, è rappresentata in grandezza e in direzione dalla diagonale del parallelogramma costruito sopra queste due forze.*

Indichiamo con P e Q le componenti e con R la loro risultante. Le forze P e Q essendo rappresentate dalle rette AP ed AQ (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 5), se al punto A e nella direzione della diagonale AM del parallelogrammo costruito tra AP ed AQ, applichiamo una forza AR uguale e direttamente opposta alla risultante R, le tre forze AP, AQ, AR saranno in equilibrio (n.° 8), e potremo considerare una qualunque tra esse, AQ, come uguale e direttamente opposta alla risultante delle due altre. Così, conducendo pel punto P una retta PQ′ parallela ad AR, il punto Q′ dove questa parallela incontra la direzione della risultante AQ′ di AP e di AR, determinerà la grandezza del lato PQ′, il quale, nel parallelogrammo delle forze AP ed AR è uguale ed opposto al lato AR; ma PM essendo parallela ad AQ′ il quadrilatero AQ′PM è un parallelogrammo; dunque PQ′ = AM, e per conseguenza AM = AR = R. Così la diagonale AM rappresenta non solamente la direzione della risultante delle due forze P e Q, ma ancora la sua grandezza.

Questa dimostrazione del parallelogrammo delle forze è la più semplice e la più rigorosa di tutte quelle che riposano sopra considerazioni geometriche. Essa appartiene al signor Duchayla. (*Vedi* Forza).

Indichiamo ora le principali conseguenze di questo teorema.

Se le due forze P e Q sono uguali tra esse, si ha nel triangolo rettangolo APO (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 6), indicando l'angolo PAO, metà dell'angolo PAQ delle forze, con φ,

$$1 : \cos\varphi = AP : AO ;$$

donde

$$AO = AP \times \cos\varphi ;$$

ma

$$AP = P \quad e \quad AO = \frac{1}{2} AR = \frac{1}{2} R ,$$

dunque

$$R = 2 P \cos\varphi .$$

Questa formula fa conoscere la grandezza della risultante R delle due forze uguali P facienti tra esse un angolo 2φ.

12. Se le forze P e Q sono ad angolo retto (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 7), si ha nei triangoli rettangoli APR, AQR

$$AP = AR \,.\, \cos PAR ,$$
$$AQ = AR \,.\, \cos QAR ,$$

ovvero, indicando con φ l'angolo della risultante $AR = R$ con la forza $AP = P$,

$$P = R \cos\varphi ,$$
$$Q = R \operatorname{sen}\varphi ,$$

si ha, di più

$$R^2 = P^2 + Q^2 .$$

13. L'angolo PAQ delle componenti (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 9) non essendo retto, se lo indichiamo con ψ, e con φ quello della risultante con una delle componenti $P = AP$, siccome l'angolo APR è il supplemento dell'angolo ψ, avremo

$$R : Q = \operatorname{sen}\psi : \operatorname{sen}\varphi ;$$

vale a dire, che la risultante sta ad una componente, come il seno dell'angolo delle componenti sta al seno dell'angolo compreso tra la risultante e l'altra componente.

14. Finalmente, qualunque sia l'angolo PAQ delle componenti (*Tav.* CLXXXIII, *fig.* 9), il triangolo APR dà (*Vedi* Trigonometria)

$$\overline{AR}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PR}^2 - 2AP \times PR \times \cos APR ;$$

ma $PR = AQ$, e siccome l'angolo APR è il supplemento dell'angolo delle forze, $PAQ = \psi$, si ha

$$\cos APR = -\cos\psi ;$$

dunque

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\psi .$$

Quest'espressione fa conoscere la grandezza della risultante delle due forze qualunque P e Q facienti tra esse un angolo qualunque ψ. Ponendoci $\psi = 90°$, si ritrova la formula del n.° 12, e prendendo $P = Q$, quella del n.° 11.

Lo stesso triangolo APR dà ancora

$$AP : PR : AR = \text{sen}\,PRA : \text{sen}\,PAR : \text{sen}\,APR.$$

Ora, prolungando AR in R′ e osservando che PR = AQ e che

$$\text{sen}\,PRA = \text{sen}\,RAQ = \text{sen}\,R'AQ,$$
$$\text{sen}\,PAR = \text{sen}\,PAR',$$
$$\text{sen}\,APR = \text{sen}\,PAQ,$$

si vede che questa proporzione equivale a

$$P : Q : R = \text{sen}\,R'AQ : \text{sen}\,PAR' : \text{sen}\,PAQ.$$

Ora, se si applica al punto A una forza AR′ = R′ uguale e direttamente opposta alla risultante R, il sistema delle tre forze P, Q, R′ sarà in equilibrio, e siccome R′ = R, avremo ugualmente tra queste tre forze la relazione

$$P : Q : R' = \text{sen}\,R'AQ : \text{sen}\,PAR' : \text{sen}\,PAQ,$$

donde possiamo concludere che *tre forze stanno in equilibrio quando la grandezza di ciascuna di esse è proporzionale al seno dell' angolo formato dalla direzione delle due altre.*

15. Il parallelogrammo delle forze conduce immediatamente alla determinazione della risultante di un numero qualunque di forze applicate ad uno stesso punto, quando ancora esse non sono situate in uno stesso piano; poichè, componendole due a due, possiamo sempre diminuire successivamente il numero delle forze del sistema e ridurle finalmente ad una sola, che è la risultante generale. Siano, per esempio (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 8), le forze P, P′, P″, ec., le quali concorrono al punto A, avendole rappresentate mediante le parti AP, AP′, AP″, ec., delle loro direzioni, si costruirà sopra AP e AP″ il parallelogrammo APRP′, la cui diagonale AR sarà la risultante delle due forze P e P′; sopra AR ed AP″, in seguito si costruirà il parallelogrammo ARR′P″, e la sua diagonale AR′ sarà la risultante delle tre forze P, P′, P″; costruendo ancora sopra AR′ ed AP‴ il parallelogrammo AR′R″P‴, avremo, per la risultante delle quattro forze P, P′, P″, P‴ la diagonale AR″, e così di seguito. Procedendo in questo modo, si giungerà sempre tanto ad un' ultima diagonale che sarà la risultante del sistema, quanto a due forze direttamente opposte. Se il sistema fosse in equilibrio, queste due ultime forze sarebbero uguali.

16. Quando le forze concorrenti ad uno stesso punto non sono che nel numero di tre e che le loro direzioni non sono comprese nello stesso piano, la precedente costruzione fa conoscere una proprietà assai importante della risultante. Siano, infatti, le tre forze P = AP, P′ = AQ P″ = AR (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 9), dirette in un modo qualunque nello spazio; costruiamo nel piano delle due forze AQ ed AR il parallelogrammo AQTR, la diagonale AT sarà la risultante di queste due forze, e se quindi costruiamo nel piano delle due rette AT ed AP il parallelogrammo PATS, la sua diagonale AS sarà la risultante delle due forze AT ed AP o quella delle tre forze AP, AQ ed AR; ma è facile vedere che AS è la diagonale del parallelepipedo costruito sopra le tre forze AP, AQ ed AR; dunque *la risultante di tre forze applicate ad uno stesso punto e le cui direzioni non sono nello stesso piano è rappresentata in grandezza e in direzione dalla diagonale del parallelepipedo, costruito sopra queste forze.*

Le relazioni conosciute tra la diagonale di un parallelepipedo e le sue tre costole danno immediatamente il valore della risultante AS, che chiameremo S. In-

dichiamo respettivamente con (P, Q), (P, R), (Q, R) gli angoli che fanno tra esse le forze P e Q, P ed R, Q ed R, avremo

$$S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos(P, Q) + 2PR\cos(P, R) + 2QR\cos(Q, R).$$

Se le forze P, Q ed R sono perpendicolari tra esse, avremo semplicemente

$$S^2 = P^2 + Q^2 + R^2.$$

17. La decomposizione delle forze riposa sopra gli stessi principii della loro composizione. È evidente mediante quello che precede, che possiamo sempre sostituire ad una forza qualunque un sistema di due forze, che agiscano nello stesso piano o un sistema di tre forze che agiscono nello spazio a tre dimensioni. Sia infatti AR una forza applicata ad un punto A (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 10) rappresentiamo con AP un'altra forza di una direzione qualunque, uniamo i punti P ed R con la retta PR, conduciamo RQ parallela ad AP ed AQ parallela a PR, AR sarà la diagonale del parallelogrammo AQRP, e potremo conseguentemente sostituire alla forza AR le due forze AQ ed AP. Prendiamo ora fuori del piano AQRP una retta AS per rappresentare un'altra forza di una grandezza e di una direzione arbitraria, conduciamo SQ poi AT parallela ad SQ e TQ parallela ad AS, AQ sarà la diagonale del parallelogrammo ASQT, dimodochè potremo sostituire alla forza AQ le due forze AS ed AT: così la forza primitiva AR potrà essere sostituita dalle tre forze AP, AT, AS. Questa decomposizione può effettuarsi in un'infinità di modi differenti, poichè le forze AP ed AS sono interamente arbitrarie.

18. Quando si decompone una forza, ordinariamente si assoggettano le componenti alla condizione di essere perpendicolari tra loro, il che rende più semplici le relazioni; ma allora le grandezze di queste componenti si trovano determinate dagli angoli che esse fanno con la risultante, e non ne possiamo prendere alcuna di esse arbitrariamente. Sia, per esempio, AR (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 7) la forza a cui si vogliano sostituire due altre forze rettangolari applicate allo stesso punto A; conduciamo la retta AP in una direzione qualunque, poi la retta AQ perpendicolare ad AP; dal punto R abbassiamo respettivamente sopra AP e sopra AQ le perpendicolari RP ed RQ, queste perpendicolari determineranno le componenti AP ed AQ; e in questa costruzione si vede che d'arbitrario non vi è che l'angolo PAR. Se si trattasse di decomporre AR in tre forze rettangolari, nello spazio, si potrebbe di nuovo prendere una componente di una direzione qualunque, operando nella stessa maniera.

19. Si chiamino α, β e γ gli angoli che tre forze rettangolari X, Y, Z fanno respettivamente con la loro risultante R, ed osserviamo che poichè R è la diagonale del parallelepipedo rettangolo costruito sopra le rette X, Y, Z, abbiamo (*Vedi* Applicaziona dell' Algebra alla Geometria)

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma,$$

e

$$R = \sqrt{\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right]},$$

gli angoli α, β e γ sono d'altra parte legati dalla relazione (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Quest' equazioni servono a trovare il valore e la direzione della risultante quando le componenti son date, e *vice-versa*.

20. Se una delle componenti è nulla, Z, per esempio, si ha solamente

$$X = R\cos\alpha\,,\quad Y = R\cos\beta,$$

$$R = \sqrt{\left[X^2 + Y^2\right]};$$

in questo caso, la risultante R è compresa nel piano delle due componenti X ed Y, come lo abbiamo veduto sopra.

21. Quest' ultime espressioni conducono facilmente alle condizioni dell'equilibrio di un numero qualunque di forze applicate ad uno stesso punto e comprese o non comprese in uno stesso piano. Siano P, P′, P″, ec. (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 11) delle forze concorrenti al punto A e che cominceremo dal supporre situate in uno stesso piano; conduciamo pel punto A gli assi rettangolari AX, AY, e rappresentando, le forze P, P′, P″, ec., mediante le parti AP, AP′, P″, ec., delle loro direzioni; decomponiamo ciascuna di queste forze in due altre dirette seguendo gli assi AX ed AY. In questo modo, il sistema dato sarà trasformato in un altro il quale non conterrà più che forze dirette seguendo i due assi, e di cui sarà facile trovare la risultante.

Si chiamino α, α', α'', ec., gli angoli che le forze P, P′, P″, ec., fanno con l'asse delle x, e β, β', β'', ec., gli angoli che esse fanno con l'asse delle y. Se consideriamo particolarmente la forza P o AP, vedremo che le sue due componenti AM ed AN hanno per valori

$$AM = P\cos\alpha\,,\quad AN = P\cos\beta\,,$$

e che in generale le componenti nel senso delle x sono espresse da

$$P\cos\alpha\,,\quad P'\cos\alpha'\,,\quad P''\cos\alpha''\,,\ \text{ec.},$$

e le componenti nel senso delle y da

$$P\cos\beta\,,\quad P'\cos\beta'\,,\quad P''\cos\beta''\,,\ \text{ec.}$$

Prendendo la somma di tutte le componenti che agiscono nel senso delle x e chiamandola X; prendendo ugualmente la somma di tutte le componenti che agiscono nel senso delle y e chiamandola la Y, avremo

$$\left.\begin{aligned} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ec.} &= X \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{ec.} &= Y \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (a),$$

e, per conseguenza tutte le forze proposte saranno ridotte a due forze rettangolari X ed Y, la cui risultante R avrà per valore

$$R^2 = X^2 + Y^2 \ldots\ldots (b).$$

22. È essenziale, formando la *somma* delle componenti rapporto a ciascun asse, di aver riguardo ai *segni* dai quali i coseni possono essere affetti, poichè questi segni determinano il senso secondo il quale agiscono le componenti. Per fissare le idee, consideriamo solamente due forze P e P′ (*Tav.* CLXXXVI, *fig.* 12). Le loro componenti seguendo l'asse delle x saranno

$$AQ = P\cos PAX\,,\quad AS = P'\cos P'AX'.$$

e siccome queste componeoti agiscono in una direzione opposta, avremo per la loro risultante

$$X = P \cos PAX - P' \cos P'AX'.$$

Ora, α ed α' indicando gli aogoli che formano rispettivamente le forze P e P' con l'asse positivo AX, si ha

$$PAX = \alpha, \quad P'AX' = 180^\circ - \alpha',$$

doode $\cos P'AX' = -\cos \alpha'$; la risultante X è dunque ancora espressa da

$$X = P \cos \alpha + P' \cos \alpha';$$

e si vede che riservandosi a determinare i segni dei eoseoi qoando vorremo eseguire i calcoli, possiamo dare a tutte le compooenti il segno +, come l'abbiamo fatto nell'espressioni (a).

23. La grandezza della risoltante trovaodosi fissata dall'espressione (b), non si tratta più che di trovare la soa direzione, e per qoest'effetto, se si chiamino a e b gli aogoli che essa forma con gli assi coordinati, avremo, mediante il n.° 20,

$$X = R \cos a, \quad Y = R \cos b,$$

il che ci darà

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}.$$

24. Se tutte le forze proposte sono in equilibrio, la risultante R è nulla, e si ha

$$X^2 + Y^2 = 0,$$

equazione che non può essere soddisfatta che mediante i valori

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

poichè, qoalunque sia il segoo della somme X ed Y, i loro quadrati sono essenzialmenta positivi.

25. Consideriamo ora on sistema di forze P, P', P'', ec., sempre concorreoti ad ono stesso punto, ma dirette in un modo qoalonqoa oello spazio. Per il punto di concorso, immaginiamo tre assi rettaogolari AX, AY, AZ, e si chiamino α, α', α'', ec., gli angoli respettivi della forze coo l'asse AX; β, β', β'', ec., i loro angoli con l'asse AY, e γ, γ', γ'', ec., i loro angoli con l'asse AZ. Se decompooiamo ciascooa forza in tre altre dirette segnendo gli assi, le componenti oel senso delle x, saraono (n.° 19)

$$P \cos \alpha, \quad P' \cos \alpha', \quad P'' \cos \alpha'', \text{ ec.};$$

quelle nel senso delle y

$$P \cos \beta, \quad P' \cos \beta', \quad P'' \cos \beta'', \text{ ec.};$$

e le compooeoti nel senso delle z

$$P \cos \gamma, \quad P' \cos \gamma', \quad P'' \cos \gamma'', \text{ ec.}$$

Chiamando X, Y, Z le somme respettive delle componenti rapporto a ciascun asse, e ponendo

$$\left.\begin{array}{l} X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ec.} \\ Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{ec.} \\ Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (1),$$

il sistema proposto si ridurrà a tre forze rettangolari x, y, z, ed avremo pel valore della sua risultante (n.° 19)

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \ldots\ldots (d).$$

Eseguendo i calcoli, bisognerà aver riguardo ai *segni* dei coseni come l'abbiamo indicato sopra.

26. Per determinare la direzione della risultante R bisogna trovare gli angoli che essa forma con gli assi coordinati. Ora, chiamando a, b, c, questi angoli, si ha, mediante l'espressione del n.° 19,

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

27. Nel caso dell'equilibrio delle forze P, P′, P″, ec., la risultante R dovendo esser nulla, si ha

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

equazione che non può essere soddisfatta se non che nel caso in cui ciascun termine sia nullo isolatamente; così

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

ovvero, ciò che equivale allo stesso,

$$\begin{array}{l} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ec.} = 0, \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{ec.} = 0, \\ P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{ec.} = 0, \end{array}$$

sono le equazioni di equilibrio di un sistema di forze concorrenti ad uno stesso punto e situate in un modo qualunque nello spazio.

28. Esaminiamo la composizione delle forze applicate a differenti punti di un corpo o sistema di corpi, nell'ipotesi in cui questi punti sono mantenuti a distanze fisse gli uni dagli altri; il che permette di considerargli come legati tra loro mediante rette inflessibili.

Concepiamo una retta AB (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 1) composta di punti materiali legati in un modo costante, e all'estremità A e B della quale sono applicate due forze P e Q, le cui direzioni sono parallele. Si tratta di determinare la grandezza della risultante di queste forze e il suo punto d'applicazione sopra la retta AB.

Rappresentiamo le forze P e Q mediante le parti AP e BQ delle loro direzioni, e osserviamo che applicando ai punti A e B due nuove forze AR e BS uguali e direttamente opposte, il sistema delle forze P e Q non proverà verun cangiamento, poichè queste nuove forze si distruggono. La risultante del sistema delle quattro forze AR, AP, BQ, BS, sarà dunque identicamente lo stesso di quello delle due forze P e Q; ma costruendo i parallelogrammi RAPM, SBQN, abbiamo per la risultante delle due forze AR ed AP la diagonale AM,

e per la risultante delle due forze BS e BQ la diagonale BN. Così, il sistema delle quattro forze AR, AP, BQ, BS, e per conseguenza al sistema delle due forze P e Q possiamo sostituire il sistema delle due forze AM e BN, le quali non sono parallele, e che conseguentemente concorrono in un punto O, pel quale deve ancora passare la loro risultante o la risultante cercata delle forze parallele P e Q.

Conduciamo pel punto O, OR parallela alle forze P e Q; e CD parallela ad AB, e immaginiamo inoltre che le due forze AM e BN siano applicate al punto O, il che ci permetterà di decomporre, da una parte, AM in due altre forze dirette seguendo OC ed OR; e dall'altra BN in due altre forze dirette seguendo OD ed OR; ora, le circostanze della decomposizione delle forze AM e BN sono le stesse in O che in A e B; così le componenti di AM saranno OC = AR e OE = AP, e quelle di BN saranno OD = BS e OF = BQ; ma le due forze uguali ed opposte OC ed OD si distruggono. Così le sole forze che agiscono sul sistema sono OE ed OF, la cui risultante OE + OF = P + Q segue la direzione OR; dunque

La risultante di due forze parallele è uguale alla loro somma ed è loro parallela.

Per trovare il punto H, dove passa questa risultante, osserviamo che i due triangoli simili OAH, AMP danno

$$AP : PM = OH : AH,$$

e che gli altri due triangoli simili OBH, BQN danno ancora

$$BQ : QN = OH : BH.$$

I medii di queste due proporzioni essendo uguali, gli estremi sono in proporzione, e si ha

$$AP : BQ = BH : AH,$$

ovvero

$$P : Q = BH : AH,$$

vale a dire, che il punto H divide la retta AB in due parti reciprocamente proporzionali alle forze P e Q. *La risultante di due forze parallele è dunque uguale alla loro somma, è loro parallela, e divide la retta d'applicazione in due parti reciprocamente proporzionali alle componenti.*

29. Tutto ciò che riguarda il punto d'applicazione della risultante di due forze parallele essendo indipendente dalla direzione di queste forze, se supponiamo che le due forze P e Q prendano le direzioni AP′, BQ′ (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 2), la risultante R prenderà ugualmente la direzione HR′ parallela a quest'ultime; ma il suo punto d'applicazione H non cangerà, poichè si deve sempre avere

$$P : Q = BH : AH.$$

Questo punto d'applicazione della risultante ha ricevuto, a motivo di questa proprietà, il nome di *centro delle forze parallele.*

Indichiamo con a la retta AB, con p la distanza AH del centro delle forze al punto d'applicazione della forza P, e con q la distanza BH di questo medesimo centro al punto d'applicazione della forza Q; avremo, mediante ciò che precede, le tre equazioni

$$R = P+Q \ldots\ldots (1),$$
$$Pp = Qq \ldots\ldots (2),$$
$$a = p+q \ldots\ldots (3),$$

le quali implicitamente contengono la soluzione di tutte le questioni che possono esser proposte sopra le forze parallele.

Per mettere, per esempio, due forze date P e Q in equilibrio, siccome basta di applicare al *centro* una forza uguale e direttamente opposta alla risultante, la cui grandezza è P+Q, bisogna determinare questo centro, o trovare il valore di p o di q. Sostituendo dunque nell' equazione (2) il valore di q rilevato dall' equazione (3), viene

$$Pp = Q(a-p),$$

donde si deduce

$$p = \frac{aQ}{P+Q}.$$

Il valore di p essendo così conosciuto, si conosce il centro H, ed applicandogli forza P+Q parallela alle componenti, ma direttamente opposta, l' equilibrio sarà prodotto nel sistema.

30. Se le due forze parallele P e Q (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 3) agiscono in senso inverso, le stesse equazioni possano ancora servire a trovare la loro risultante, il suo punto d' applicazione, e, per conseguenza, somministrare i mezzi di mettergli in equilibrio. Infatti, supponendo che questa risultante sia ER applicata ad un punto E legato in un modo fisso alla retta AB, il sistema delle tre forze P, Q, R essendo in equilibrio, la forza Q può considerarsi come uguale ed opposta alla risultante delle due forze P ed R, le quali agiscono nello stesso senso; così, prolungando BQ di una quantità BS = BQ, la retta BS rappresenterà la risultante delle forze P ed R, e si avrà

$$S = P+R,$$

donde

$$R = S-P,$$

e conseguentemente, R = Q—P a motivo di S = Q. Così *la risultante di due forze parallele opposte è uguale alla differenza di queste forze.*

Per determinare il punto d' applicazione E, abbiamo (n.° 28)

$$P : R = BE : AB,$$

donde

$$(P+R) : R = (BE+AB) : AB,$$

vale a dire

$$Q : R = AE : AB,$$

proporzione dalla quale si deduce

$$AE = \frac{Q \times AB}{R},$$

e, sostituendo invece di R il suo valore Q—P

$$AE = \frac{Q \times AB}{Q-P}.$$

Resulta da quest' espressione che più la differenza Q—P delle componenti è piccola, e più il punto E è allontanato da B. Nel caso di Q = P, AE diviene in-

finitamente grande ed $R=o$; il che c' insegna che, per stabilire l' equilibrio tra due forze uguali parallele ed opposte, bisognerebbe poter applicare una forza nulla ad una distanza infinita dal punto B, condizione impossibile ad essere adempita. Due forze simili non possono dunque esser messe in equilibrio da una terza, e non hanno altro effetto che quello di far girare la linea AB sopra il suo mezzo.

Un sistema di due forze parallele uguali ed opposte si chiama una *coppia*: esso presenta la singolarità che non gli possiamo sostituire una forza unica.

31. Si ottiene la risultante di un numero qualunque di forze parallele componendole due a due in un modo analogo a quello che abbiamo indicato per le forze concorrenti ad uno stesso punto (n.° 15).

Siano, infatti, P, Q, R, S, ec. (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 4), delle forze parallele applicate ai punti A, B, C, D, ec., di una stessa retta inflessibile. Si comincerà dal cercare il punto d' applicazione E della risultante delle due prime forze, mediante la formula del n.° 29

$$AE=\frac{Q\times AB}{P+Q}.$$

Questo punto essendo trovato, si condurrà una retta $ET=P+Q=AP+BQ$; questa retta rappresenterà la risultante delle due forze P e Q. Operando nella stessa maniera sopra ET e CR, si determinerà il punto d' applicazione della loro risultante mediante l' espressione

$$EF=\frac{R\times EC}{T+R},$$

ovvero

$$EF=\frac{R\times EC}{P+Q+R}.$$

Conducendo quindi pel punto F la retta $FT'=P+Q+R$, essa sarà la risultante delle tre forze P, Q, R. Il punto d' applicazione delle forze T' ed S sarà dato dall' espressione

$$FG=\frac{S\times FD}{T'+S},$$

ovvero

$$FG=\frac{S\times FD}{P+Q+R+S},$$

e la risultante generale delle quattro forze P, Q, R, S si costruirà conducendo pel punto G una retta $GT''=P+Q+R+S$. Questo processo, che si estende evidentemente ad un numero qualunque di forze, ci fa conoscere che *la risultante di un sistema di forze parallele è uguale alla loro somma.*

Se più forze P, Q, R, S, ec., fossero dirette in un senso, ed altre P', Q', R', S', ec., nel senso opposto, si cercherebbe da una parte la risultante delle prime, e dall' altra la risultante delle seconde, il che ridurrebbe il sistema a due sole forze parallele che agiscono in sensi opposti; la loro risultante, ottenuta come è stato detto al n.° 30, sarebbe la risultante generale del sistema.

32. Lo stesso processo può applicarsi, con una leggera modificazione, al caso in cui i punti d' applicazione A, B, C, D, ec., delle componenti non siano in linea retta. Consideriamo solamente le tre forze P, Q, S (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 5) applicate respettivamente ai tre punti A, B, C, legati dalle due rette inflessibili AB e BC. Dopo aver determinato il punto E della risultante delle forze P

e Q e condotto $ER = P+Q$, si uniranno i punti E e C mediante una retta EC; e siccome, supponendo questa retta legata al sistema delle due altre AB e BC, possiamo considerare le forze ER ed S come se agissero alle sue estremità E e C, si determinerà il punto G della loro risultante mediante l'espressione

$$EG = \frac{S \times EC}{R+S}.$$

Conducendo quindi GR′ parallela alle componenti, si potrà prendere indifferentemente il punto F o il punto G, per il punto d'applicazione della risultante generale, facendo nel primo caso

$$FR'' = R+S = P+Q+S,$$

e nel secondo

$$GR' = P+Q+S.$$

33. Quando un sistema di forze contiene delle forze concorrenti e delle forze parallele, si ottiene la sua risultante cominciando dal ridurre tutte le forze parallele ad una sola; poi, quando non si hanno che forze concorrenti, si compongono due a due supponendo le forze applicate a ciascun punto di concorso. L'ultimo punto di concorso è quello al quale possiamo considerare come applicata la risultante generale. Le condizioni d'equilibrio di un tal sistema sono sempre che la risultante sia nulla. *Vedi* Momento.

RITARDATRICE (*Mec.*). La forza *ritardatrice* è quella che ritarda il moto di un corpo; tale è la gravità di un mobile lanciato di basso in alto e il cui moto è continuamente ritardato, mediante l'azione che questa gravità esercita sopra esso in una direzione contraria. Le leggi delle forze ritardatrici si deducono da quelle delle forze acceleratrici, mediante un semplice cangiamento nel segno di certi valori nell'equazioni del moto. (*Vedi* Accelerazione e Accelerato).

RITARDO (*Mec.*). Rallentamento del moto di un mobile. Questa parola è poco usata.

RITORNO DELLE SERIE (*Alg.*). Metodo che ha per oggetto di esprimere in serie, procedente seguendo le potenze progressive di una variabile y, il valore di un'altra variabile x, quando y è dato mediante una serie la quale procede seguendo le potenze di x. Vale a dire, avendo la serie

$$y = ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\text{ec.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1),$$

il *ritorno* di questa serie consiste a trovare i coefficienti A, B, C, D, ec. di questa seconda serie

$$x = Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+Ey^5+\text{ec.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2),$$

la quale dà x per y.

La soluzione di quest'importante problema, proposto per la prima volta dal Newton nella sua *Analisis per equationes*, può ottenersi in una maniera assai semplice col metodo dei coefficienti indeterminati, poichè formando le potenze successive dei due membri dell'equazione (2), si trova

$$\begin{aligned}
x &= Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+Ey^5+\text{ec.}\\
x^2 &= \ldots A^2y^2+2ABy^3+2ACy^4+2ADy^5+\text{ec.}\\
&\qquad\qquad +B^2y^4+2BCy^5+\text{ec.}\\
x^3 &= \ldots\ldots\ldots A^3y^3+3A^2By^4+3A^2Cy^5+\text{ec.}\\
&\qquad\qquad +3AB^2y^5+\text{ec.}\\
x^4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^4y^4+4A^4By^5+\text{ec.}\\
x^5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^5y^5+\text{ec.}\\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}$$

Se ora si sostituiscono questi valori di x, x^2, x^3, ec. nell' uguaglianza (1), si ottiene

$$
y = \begin{array}{r|r|r|r|l}
aAy + aB & y^2 + aC & y^3 + aD & y^4 + \quad aE & y^5 + \text{ec.} \\
+ bA^2 & + 2bAB & + 2bAC & + 2bA\,D & + \text{ec.} \\
 & + cA^3 & + bB^2 & + 2bB\,C & + \text{ec.} \\
 & & + 3cA^2B & + 3cA^2C & + \text{ec.} \\
 & & + dA^4 & + 3cA\,B^2 & + \text{ec.} \\
 & & & + 4dA^3B & + \text{ec.} \\
 & & & + \quad eA^5 & + \text{ec.} \\
 & & & & + \text{ec.}
\end{array}
$$

ovvero, facendo passare y nel secondo membro,

$$o = (aA - 1)y + (aB + bA^2)y^2 + (aC + 2bAB + cA^3)y^3 + \text{ ec.}$$

Così, poichè quest' uguaglianza deve aver luogo, qualunque sia il valore di y, si ha separatamente

$$
\begin{aligned}
aA - 1 &= o, \\
aB + bA^2 &= o, \\
aC + 2bAB + cA^3 &= o, \\
\text{ec.} \quad & \quad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

equazioni di condizione con l' aiuto delle quali potremo ottenere i valori dei coefficienti A, B, C, ec. in funzioni dei coefficienti dati a, b, c, d, e, ec. Il calcolo dei nove primi di questi coefficienti è stato eseguito da Filippo Rubbiani il quale con moltiplicate prove si è assicurato dell' esattezza del suo lavoro. Ecco questi valori, essi possono servire di formule generali per ritornare una serie, di qualunque forma ch' essa sia,

$$
\left.
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{a} \\
B &= -\frac{b}{a^3} \\
C &= \frac{1}{a^5}\left[2b^2 - ac\right] \\
D &= \frac{1}{a^7}\left[-5b^3 + 5abc - a^2d\right] \\
E &= \frac{1}{a^9}\left[14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e\right] \\
F &= \frac{1}{a^{11}}\left[-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 + 7a^3be \right.\\
&\qquad \left. + 7a^3cd - a^4f\right] \\
G &= \frac{1}{a^{13}}\left[132b^6 - 330ab^4c - 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 \right.\\
&\qquad - 36a^3b^2e - 72a^3bcd + 8a^4bf - 12a^3c^3 \\
&\qquad \left. + 8a^4ce + 4a^4d^2 - a^5g\right]
\end{aligned}
\right\} \ldots (3).
$$

$$H = \frac{1}{a^{15}}\Big[-429b^7+1287ab^5c-495a^2b^4d-990a^2b^3c^2$$
$$+165a^3b^3e+495a^3b^2cd-45a^4b^2f+165a^3bc^3$$
$$-90a^4bce-45a^4bd^2+9a^5bg-45a^4c^2d$$
$$+9a^5cf+9a^5de-a^6h\Big]$$

$$I = \frac{1}{a^{17}}\Big[1430b^8-5005ab^6c+2002a^2b^5d+5005a^2b^4c^2$$
$$-715a^3b^4e-2860a^3b^3cd+220a^4b^3f$$
$$-1430a^3b^2c^3+660a^4b^2ce+330a^4b^2d^2$$
$$-55a^5b^2g+660a^4bc^2d-110a^5bcf-110a^5bde$$
$$+10a^6bh+55a^4c^4-55a^5cd-55a^5c^2e$$
$$+10a^5cg+10a^6df+5a^6e^2-a^7i\Big] \quad \ldots\ldots (3).$$

$K =$ ec. . . . .

Applichiamo queste formule al ritorno della serie

$$x = 1 + \frac{1}{1}Lx + \frac{1}{1\,.\,2}\Big(Lx\Big)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\Big(Lx\Big)^3 + \text{ec.}$$

la quale dà un numero per mezzo del suo logaritmo. (*Vedi* Logaritmo n.° 15) mettendola sotto la forma

$$x - 1 = Lx + \frac{1}{1\,.\,2}\Big(Lx\Big)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\Big(Lx\Big)^3 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\Big(Lx\Big)^4 + \text{ec.}$$

Avremo in questo caso

$$a = 1,\quad b = \frac{1}{2},\quad c = \frac{1}{6},\quad d = \frac{1}{24},\quad e = \frac{1}{120},\quad \text{ec.}$$

ed otterremo mediante la sostituzione di questi valori nelle formule precedenti,

$$A = 1,\quad B = -\frac{1}{2},\quad C = \frac{1}{3},\quad D = -\frac{1}{4},\quad E = \frac{1}{5},\quad \text{ec.};$$

donde

$$Lx = \Big(x-1\Big) - \frac{1}{2}\Big(x-1\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(x-1\Big)^3 - \frac{1}{4}\Big(x-1\Big)^4 + \text{ec.}$$

Prendiamo ancora per esempio la serie conosciuta

$$\text{sen}\,x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{x^7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \text{ec.}$$

Faremo, osservando che le potenze pari di x mancano,

$$a = 1,\quad b = 0,\quad c = -\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3},\quad d = 0,\quad e = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5},\quad f = 0,\ \text{ec.}$$

ad otterremo, sostituendo nelle formule (3)

$$A = 1,\ B = o,\ C = \frac{1}{2 \cdot 3},\ D = o,\ E = \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$F = o,\ G = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7},\ H = o,\ I = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9},\ \text{ec.}$$

Dunde

$$x = \text{sen}\, x + \frac{\text{sen}^3 x}{2 \cdot 3} + \frac{3\, \text{sen}^5 x}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5\, \text{sen}^7 x}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ec.}$$

Le formule (3) hanno l' inconveniente di non far conoscere la legge dei coefficienti della serie generale di ritorno, e non possiamo considerarli che come quadri, d' altra parte utilissimi, dell' operazioni che bisogna fare per ottenere i valori numerici di questi coefficienti nei casi particolari. Considereremo in altra parte il *ritorno delle serie* in un modo più diretto e più generale (*Vedi* Serie).

RIVARD (Domenico Francesco), matematico, nato nel 1697 a Neufchâteau nella Lorena, fiol gli studi a Parigi, ove per multo tempo professò la filosofia e le matematiche. Si deve a lui l' introduzione dell' insegnamento di tali scienze nell' università di Parigi. Dalla sua vita altro non si sa se non che fu interamente consacrata alla istruzione dei giovani, sia colla composizione di opere elementari, sia coll' insegnamento orale che dava dalla sua cattedra nel collegio di Beauvais. Questo dotto modesto e laborioso morì a Parigi il 5 Aprile 1778. I suoi scritti sono: I *Élémens de mathématiques*, Parigi, 1740, in-4; quinta ediz. riveduta e corretta, 1752, in-4. Ne pubblicò egli stesso un *Compendio*, 1740, in-8, ristampato più volte. È, dice Montucla, libro classico e il germe di tutte le eccellenti opere che fatte vennero dipoi in tal genere; II *Traité de la Sphère*, Parigi, 1741, in-8; III *Abrégé du Traité de la Sphère et du Calendrier*, ivi, 1743, in-8, sovente ristampato. La più recente edizione è quella del 1837 che contiene diverse correzioni di Puissant, e che è fatta su quella pubblicata da Lalande nel 1798 coll' aggiunta del calendario repubblicano. Tale operetta, che ha goduto di molta reputazione, è stata utilissima nei collegi. IV *Nouveau traité de gnomonique*, ivi, 1742, 1746, in-8. Obliar fece quello di Ozanam e fu superato in seguito da quello di D. Bedos. V *Trigonométrie rectiligne et sphérique, avec des tables des sinus, des tangentes, des secantes et des logarithmes*, ivi, 1743, 1750, 1757, in-8. Tale libro, dice Lalande, è, come tutti quelli dello stesso autore, notabile per la sua chiarezza. Le tavole ne sono esatte, e quantunque meno ampie e meno comode di quelle di Callet, pure vengono tuttora qualche volta ricercate quando si ha bisogno di avere i seni naturali e le tangenti, di cui Callet non dà che i logaritmi. VI *Traité d' arithmétique*, ivi, 1747, in-8; VII *Élémens de géométrie*, 1732, 1739, 1747, 1750, in-4: l' autore ne ha pubblicato un *Compendio* nel 1747, in-8. Delle altre opere di Rivard non riguardanti le matematiche si potrà vedere l' elenco nella *Biografia universale*.

RIVAULT (David), signore di Flurance, matematico francese nato nel 1571 a Laval e morto a Tours nel 1616. È a lui dovuta una pregevole edizione delle *Opere* di Archimede con una traduzione in latino a con note, Parigi, 1615, in-fol., che fu ristampata nel 1646 dal p. Richard con parecchie correzioni.

RIVOLGIMENTO. (*Idrul.*). Già si dava esclusivamente il nome di *rivolgimento* ad un' acqua senza moto progressivo nel letto di un fiume, sopra uno dei lati della corrente, e la quale si rivolgeva sopra sè stessa in conseguenza dell' impulso della parte adiacente della corrente; ma dopo il Dubuat, questa denominazione si è estesa a qualunque elevazione della superficie della corrente al di

sopra del piano generale di questa superficie, cagionata da un ostacolo qualunque, come una diga, una scogliera o i pilastri di un ponte.

La determinazione dell'altezza dei rivolgimenti prodotti da costrozioni fatte nel letto dei fiumi è una questione interessantissima dell'architettura idraulica. Bisogna distinguere in ogni *rivolgimento* la sua *altezza* AB (*Tav.* CLXXXIX, *fig.* 7), o l'elevazione del livello MN del fiume, e la sua *grandezza* AM, o la distanza alla quale esso si propaga. Questi due elementi variano mediante la ostura dell'ostacolo BD.

Se quest'ostacolo BD è una diga che chiuda interamente il fiume, essa forza l'acqua ad elevarsi ed a passare al di sopra; dimodochè si può paragonare, in questo caso, il moto dell'acqua agli sgorghi che hanno luogo mediante dei diversivi. Così, chiamando H l'altezza AD dell'acqua al di sopra della diga, l la larghezza di questa diga, e Q il volume di acqua inclinato in un secondo di tempo, si ha la relazione (*Vedi* SGORGO n.° 18)

$$Q = 1{,}80lH\sqrt{H},$$

la quale dà pel valore di H

$$H = \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{1{,}80l}\right)^2},$$

ovvero, dopo la riduzione

$$H = 0{,}676\sqrt[3]{\left(\frac{Q}{l}\right)^2} \ldots\ldots (1).$$

Chiamando b l'altezza CD della diga sul fondo del letto, e b' l'altezza BC dell'acqua avanti lo stabilimento della diga, è evidente che l'altezza AB del rivolgimento, che chiameremo H', ha per espressione

$$H' = H + b - b' \ldots\ldots (2).$$

Supponiamo, per esempio, che la larghezza del fiume sia di 20 metri, la sua profondità senza la diga di $1^m{,}50$; che la quantità d'acqua ch'esso rotola in un secondo sia di 75 metri cubi, e finalmente che l'altezza della diga sia di 2 metri, faremo,

$$Q = 75,\quad l = 20,\quad b = 2,\quad b' = 1{,}50,$$

e troveremo con questi valori

$$H = 0{,}676\sqrt[3]{\left(\frac{75}{20}\right)^2} = 1{,}631,$$

il che ci darà per l'altezza H' del rivolgimento

$$H' = 1{,}631 + 2 - 1{,}50 = 2^m{,}131.$$

La determinazione della grandezza del rivolgimento presenta delle difficoltà che le nuove Teorie non hanno ancora vinto. Secondo il Dubuat, il primo degli autori che si siano occupati della questione, questa grandezza ha per valore, indicandola con A,

$$A = \frac{1{,}9H'}{p - p'},$$

H' essendo l' altezza del rivolgimento, p il declivio della corrente avanti lo stabilimento della diga, e p' il declivio dell'acqua inalzata, immediatamente avanti il punto culminante. Il Funck gli dà per valore.

$$A = \frac{3H'}{2p},$$

il che si accorda un poco meglio con le osservazioni; ma il sig. Belanger ha inseguito fatto conoscere, che il valore reale di A è infinito, vale a dire che il rivolgimento si perde insensibilmente nella corrente ad una distanza che non si potrebbe assegnare esattamente; dimodochè tutte le formule impiegate fin quì per calcolare la grandezza di un rivolgimento non fanno che indicare con più o meno esattezza la distanza della diga dove l' effetto del rivolgimento non è più apparente. D' altra parte questo è il punto essenziale per la pratica.

Si chiama *grandezza idrostatica*, per distinguerla dalla grandezza reale, la lunghezza che avrebbe il rigonfiamento se l' acqua inalzata fosse in riposo e indipendente dall' azione della corrente. Immaginiamo per il punto culminante A una retta orizzontale prolungata fino al suo incontro in E con la superficie naturale della corrente; questa retta AE sarà la grandezza idrostatica, e la sua grandezza sarà data dall' espressione

$$\frac{H'}{p},$$

p indicando il declivio naturale della corrente. Osservando che il declivio p' dell' acqua inalzata è sempre piccolissimo rapporto a p, e che mediante ciò l' espressione del Dubuat differisce poco da

$$A = \frac{1,9H'}{p}.$$

Si vede che adottando la sua formula, la grandezza reale sarebbe quasi doppia della grandezza idrostatica, nel mentre che non si dovrebbe valutare che una volta e mezzo quest' ultima secondo la formula del Funck. Dobbiamo, ciò non ostante, dire, che dopo l' esperienze del signor Bidone non è più possibile di ammettere che la grandezza reale sia sempre di una longhezza superiore a quella della grandezza idrostatica; poichè le osservazioni di questo sapiente hanno fatto conoscere dei rivolgimenti dove il contrario ha precisamente luogo. (*Vedi le Memorie dell' Accademia di Torino*, Tomo XXV).

Se l' ostacolo elevato nel letto del fiume non abbracciasse tutta la sua larghezza, e che ne abbracciasse solamente una parte, tutta l' acqua, forzata di scorrere per l' uscita che gli fosse lasciata, dovrebbe necessariamente passarci più veloce, e siccome un accrescimento di velocità non può provenire che da un accrescimento di carico, ci sarebbe una maggiore elevazione della superficie della corrente al di sopra della costruzione e una caduta al di sotto, circostanze che abbiamo esaminate in altra parte per quello che appartiene ai ponti. (*vedi* QUESTA PAROLA), esponendo la formula proposta dal Dubuat per calcolare allora l' altezza del rivolgimento. Partendo dal principio che la maggiore elevazione dell'acqua è uguale alla differenza tra le altezze dovute alle velocità avanti e dopo lo stabilimento dell' ostacolo il signor d'Aubuisson giunse ad una formula che si accorda con le osservazioni in un modo assai soddisfacente, e della quale faremo conoscere la deduzione.

Sia x l' altezza dell' elevazione, L la larghezza media del fiume avanti il ri-

stringimento, l la larghezza dello spazio ristretto, V la velocità a questo spazio, v quella del fiume quando essa era libera, ed h la profondità dell'acqua a questa stess' epoca: la sezione della massa fluida era allora Lh, dopo il ristringimento essa era $l\,(h+x)$, o piuttosto $ml\,(h+x)$, m essendo il coefficiente di contrazione all'entrata dello spazio ristretto. Poichè le velocità sono in ragione inversa delle sezioni, avremo

$$V : v = Lh : ml\,(h+x),$$

donde

$$V = v\,\frac{Lh}{ml\,(h+x)}.$$

L'altezza dovuta a questa velocità sarà

$$\frac{v^2}{2g}\cdot\frac{L^2h^2}{m^2l^2\,(h+x)^2},$$

e siccome l'altezza dovuta a v è $\frac{v^2}{2g}$, avremo dunque

$$x = \frac{v^2}{2g}\left\{\left(\frac{Lh}{ml\,(h+x)}\right)^2 - 1\right\},$$

e ponendo invece di $2g$ il suo valore

$$x = 0{,}051v^2\left\{\left(\frac{Lh}{ml\,(h+x)}\right)^2 - 1\right\}\ \ldots\ldots\ (3).$$

Nell' applicazione, si comincerà dal trascurare la funzione $\frac{h}{h+x}$; il che darà un primo valore di x, con l'aiuto del quale se ne otterrà un secondo che sarà più approssimato, e il quale alla sua volta, ne darebbe un terzo, quando si volesse una maggiore esattezza. Allorquando si tratterà di rivolgimenti cagionati dai pilastri dei ponti, l sarà la somma degli intervalli compresi tra i pilastri, ed L la larghezza del fiume vicino al ponte; il coefficiente m avrà per valore 0,855 ovvero 0,95, secondo i casi (*Vedi* PONTE).

Il signor di Prony ha proposto le seguenti formule, le quali danno immediatamente l'altezza x del rivolgimento senza tentativi nè successive sostituzioni

Siano:

Q il valore d'acqua che sgorga in un secondo di tempo;
ω la sezione trasversale della corrente, avanti il ristringimento;
h la profondità dell'acqua, *idem*.
v la velocità media, *idem*;
l la larghezza dello spazio ristretto;
m il coefficiente di contrazione.

Si comincerà dal calcolare le seguenti quantità ausiliare:

$$h' = \frac{v^2}{2g},$$

$$r = \frac{2ml}{\omega} \sqrt{\left(\frac{h-h'}{3h'}\right)},$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{3}{(h-h')r},$$

$$\text{tang } \psi = \sqrt[3]{\text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)},$$

quindi avremo il valore cercato

$$x = \frac{1}{r \,\text{tang}(2\psi - 90^\circ)} - h.$$

Potremo verificare il calcolo numerico di x con l' aiuto delle due formule

$$\text{tang } \theta = \sqrt[3]{\text{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right)},$$

$$x = \frac{1}{r \cot(2\theta)} - h.$$

Prendiamo per esempio l' applicazione che il signor d' Aubuisson fa della sua formula al rivolgimento del ponte di Minder sul Weser

» Nel 1804, sul rapporto del Funck, furono fatte diverse esperienze sopra l'elevazione alla quale il ponte di Minden dava luogo: la larghezza media del fiume al di sopra era di $180^m,71$ e la sua profondità media di $5^m,37$: esso rotolava allora 1318 metri cubi d'acqua, e l'altezza del rivolgimento fu trovata di $0^m,383$. La somma dell' aperture del ponte, ovvero l, era $96^m,03$. »

» La velocità media al di sopra del rivolgimento era, mediante ciò che abbiemo detto, di

$$\frac{1318}{180,7 \times 5,37} = 1^m,358;$$

ma siccome nelle questioni relative ai rivolgimenti, è la velocità dello strato superiore che bisogna introdurre nel calcolo, e che, mediante osservazioni fatte sopra grandi fiumi, come l'Weser, essa è circa un decimo più considerabile dalla velocità media, faremo $v = 1^m,494$. Davanti i pilastri, ci erano delle costrozioni destinate ad arrestare i ghiacci, e i quali impedivano l' ingresso dell' acqua sotto gli archi, daremo, in conseguenza, al coefficiente di contrazione il più gran valore indicato dal Eyletwein, 0,855, abbiamo di più $L = 180,7$ ed $h = 5,37$. »

» Con i valori numerici, la formula (3), diventerà

$$x = 0,051\left(1,494\right)^2 \left\{\left(\frac{180,7 \times 5,37}{0,855 \times 96(5,37+x)}\right)^2 - 1\right\}.$$

Cominciando del trascurere $\frac{5,37}{5,37+x}$, si ha per

primo valore di x . . . . $0^m,437$
il quale indica per secondo valore. . . . . . 0 ,358
poi si ha per terzo valore . . . . 0 ,370
e, finalmente, per quarto . . . . 0 ,369

Quest' ultimo valore è il risultamento del calcolo, quello dell' esperienza era . . . . 0 ,383.

» Le variazioni che continuamente prova il coefficiente di contrazione, come pure quello che si adotterà per ridurre la velocità media a quella della superficie, aggiunge il signor d' Aubuisson, non permetteranno mai di risolvere con una grande esattezza le questioni relative ai rivolgimenti. Nella pratica, ugualmente, la loro altezza e la loro grandezza non potrebbero prendersi abbastanza esattamente; e da qualunque parte non possiamo avere che delle approssimazioni. »

Da quest' esempio, si vede, che bisogna proseguire le sostituzioni fino a tanto che si siano ottenuti due risultamenti i quali non differiscano più che di un' unità dell' ordine delle cifre che vogliamo trascurare. Le formule del signor di Prony sono molto più speditive; ma esse non danno, almeno con gli elementi che abbiamo impiegati, un resultamento tanto approssimato. Infatti, abbiamo in questo caso

$$Q = 1318\,; \quad L = 180,71\,; \quad h = 5,37\,; \quad l = 96,03\,;$$

così:

$$\omega = Lh = 970^{mq},413\,,$$

$$v = \frac{Q}{\omega} = 1^m,358\,,$$

$$h' = \frac{v^2}{2g} = 0^m,094\,,$$

introducendo questi valori nelle formule, prendendo sempre $m = 0,855$, viene

$$r = \frac{2 \times 0,855 \times 96,03}{970,413} \sqrt{\left(\frac{5,276}{3 \times 0,094}\right)}$$
$$= 0,73194\,,$$

donde inseguito si ottiene

$$\varphi = 37^\circ\ 50'\ 32'',\quad \psi = 51^\circ\ 45'\ 33'',$$

e finalmente

$$x = 0^m,313\,,$$

valore che differisce di 7 centimetri da quello dato dall'esperienza, 0, 383. Faremo osservare, ciò non ostante, che questa differenza non supera i limiti dell' approssimazione dei quali possiamo contentarci nella pratica, e che d' altra parte è facile di ottenere identicamente gli stessi risultamenti dalle formule dei signori di Prony e d'Aubuisson, impiegando nelle prime, come si fa nelle seconde, la velocità alla superficie, in luogo della velocità media della quale si serve il signor di Prony. Per esempio, in questo caso, in cui la velocità media $1^m,358$ corrisponde ad una velocità di superficie $= 1^m,494$; mediante l' osservazione del signor d'Au-

buisson, se poniamo $v = 1,494$, troveremo

$$h' = \frac{(1,494)^2}{19,6176} = 0^m,1138,$$

e siccome tutte le altre quantità sono le stesse, verrà

$$r = \frac{2 \times 0,855 \times 96,03}{970,413} \sqrt{\frac{5,2562}{3 \times 0,1138}}$$

$$= 0,66397,$$

troveremo in seguito

$$\varphi = 40^\circ\ 40'\ 57''; \quad \psi = 52^\circ\ 21'\ 8'',17,$$

e definitivamente

$$x = 0^m,369,$$

che è il resultamento del signor d' Aubuisson. I due metodi sono i medesimi nel principio, solamente il signor d'Aubisson risolve con sostituzioni successive l'equazione del terzo grado che dà il valore di x, nel mentre che il signor di Prony ottiene immediatamente questo valore per mezzo delle funzioni circolari, processo il quale non esige che le regole le più semplici dell' aritmetica, e l' uso dei logaritmi. Vedi per tutto ciò che riguarda i rivolgimenti: Il Navier, *Corso di meccanica dei ponti e argini*. — Il Bidone, *Memorie di Torino*, tomo XXV. — Il Dubuat, *Architettura idraulica*. — Il Belanger, *Soggio sopra la soluzione d'alcuni problemi d'idraulica*. — Il Prony, *Annali dei ponti e ed orgini*, 1835. — Il D' Auboisson, *Idroulica degl' ingegneri*.

RIVOLUZIONE (*Astron.*). Si dà ordinariemente in astronomia questo nome alla durata del tempo, che un pianeta, o un satellite, impiega a fare l' intero suo giro intorno al sole, o al suo pianeta principale.

ROBERVAL (Egidio Parsonna o Parsonnier de), uno dei più illustri geometri del secolo XVII, nacque verso il 1602 da genitori poveri e oscuri nel villaggio da cui prese il nome, nella diocesi di Beauvais. Nessun biografo ci ha lasciato scritto con quali mezzi potè fare i suoi studj e darsi all' inclinazione sua per le scienze. Lo stesso Baillet nulla dice su questo proposito, quantunque tale storico di Cartesio non trascuri mai simili ricerche nel parlare degli avversarj dell' illustre suo eroe. Comunque sia, al pari di Cartesio, Roberval ebbe la curiosità di andare all' assedio della Roccella, che, per la novità dei mezzi che impiegava il cardinale di Richelieu, offriva uno spettacolo degno de' matematici. Tornò a Parigi nel 1629 e vi legò presto amicizia col p. Mersenne e con altri cultori delle scienze esatte. Nel 1631 fu fatto professore di filosofia nel collegio del *Maestro Gervasio*, e 18 mesi dopo ottenne la cattedra di matematiche fondata nel collegio reale dall' infelice Ramo. Non si deve passare sotto silenzio che, secondo le intenzioni del fondatore, tale cattedra si metteva a concorso ogni tre anni: Roberval superò sempre tutti gli altri pretendenti e la conservò per tutta la vita, quantunque dopo la morte di G. B. Morin fosse stato provveduto di un'altra cattedra di matematiche nel medesimo collegio.

Rincresce che quest' uomo di talento abbia perduto tanto tempo in vane discussioni, nelle quali non ebbe quasi mai la ragione dalla sua parte. Impegnò dispute contro Cavalieri, contro Cartesio e contro Torricelli in circostanze, che ei è permesso appena di accennare. Non si può dubitare che Roberval non fosse già da lungo tempo in possesso di un metodo geometrico per mezzo del quale risolver poteva i più difficili problemi, quando Cavalieri pubblicò il suo *Metodo degl' indivisibili* e gli rapì l' onore che sperar poteva dalla sua scoperta. La lettera che

Roberval scrisse al geometra italiano per reclamare l'anteriorità di questa invenzione è notabile per gli esempj ch'ei cita dell'uso frequente che per l'avanti aveva fatto di questo metodo. Ei confessa ingenuamente siccome il tenera nascosto con somma cura, per procurarsi una specie di superiorità sui suoi rivali per la difficoltà dei problemi che esso lo mettava in grado di risolvere. Roberval fu dunque giustamente deluso nelle sue speranze, perchè è cosa indegna di un uomo di talento di fare un mistero delle sue scoperte per un motivo così frivolo. Roberval fu pure inventore di un altro metodo assai ingegnoso per le tangenti, quantunque inferiore a quelli di Fermat e di Cartesio. La sua presunzione e il suo orgoglio lo portava perfino ad esser geloso della gloria di quest' ultimo, contro il quale prese insieme col padre di Pascal la difesa dello scritto cui Fermat aveva allora allora pubblicato sui quesiti *De maximis et minimis*, ed osò rimproverare a Cartesio di non averlo criticato se non perchè non lo aveva inteso. Il tuono di superiorità cui prese Cartesio indirizzando a Mersenne la soluzione del problema della tangente delle cicloidi, cui i geometri di Parigi non avevano saputo risolvere, spiacque a Roberval e lo rese il suo più irreconciliabile nemico. Cartesio aveve scritto a Mersenne che avevasi torto di menar tanto romore per cosa sì facile: eppure anco Roberval aveva cercato inutilmente la soluzione di quel problema, e per vendicarsi impugnò la *Geometria* dell'illustre suo avversario; ma, per l'onore di questo matematico, conviene dimenticare affatto le objezioni senza fondamento e senza forza che una cieca passione gli dettò contro quella produzione immortale. Fu più felice nella sua ricerca dei centri di percussione, poichè il suo metodo, per quanto non fosse generale com'ei lo annunziava, applicavasi a casi ai quali non giungeva quello di Cartesio. Non entreremo in alcuna particolarità sulla sua disputa con Torricelli. È noto come Roberval aveva risoluto parecchi problemi intorno alla cicloide, scoperta della quale il celebre inventore del barometro rivendicava l'onore per Galileo suo maestro. Chi desiderasse veder trattata con tutta l'estensione necessaria questa questione potrà consultare: *J. Groningii Historia cycloidis*, Amsterdam, 1701, in-8.

Roberval è inventore della classe di linee curve alle quali Torricelli, malgrado i torti di Roberval verso di lui, diede il nome di *Robervalliane*, che hanno conservato, e in tutti i suoi scritti mostrò bastante ingegno parchè debba grandemente rammaricare che siasi perduto interamente in vane dispute ed in ricerche che superflue rendevano le scoperte di Cartesio, di cui sarebbe stato il primo discepolo, se avesse studiata la sua geometria invece di combatterla. Come fisico, Roberval non fece nulla, perchè allora bisognava creare i principj delle scienza, ed egli mancava delle qualità necessarie per riuscirvi. Morì nel collegio di Maestro Gervasio il 27 Ottobre 1675 in età di 73 anni. Era membro dell'Accademia delle Scienze di Parigi fino dalla sua fondazione. Quantunque d'indole capricciosa ed irascibile, e malgrado l'eccessivo suo amor proprio, Roberval abbe molti amici, tra i quali voglionsi citare Gassendi e il padre di Pascal. Il geometra Gallois, uno di questi, raccolse e pubblicò le sue produzioni nel *Recueil de divers ouvrages de mathématiques et de physique des membres de l'académie des sciences*, 1693, in-fol.: sono state poi ristampate nel tomo sesto delle *Memorie* dell'antica Accademia. Sono: *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les tangentes des lignes courbes*; — *Projet d'une méchanique, traitant des mouvemens composés*; — *De recognitione aequationum; de geometrica planarum et cubicorum aequationum resolutione*; — *Traité des indivisibles*; — *De trochoide ejusque spatio*; — *Epistolae ad Mersennum et Torricellum.*

Oltre gli scritti citati, abbiamo di Roberval: I *Traité de méchanique des poids soutenus par des puissances sur les plans inclinés à l'horizon*, in-fol., di 36

pagine, pubblicato da Mersenne in seguito al suo *Trattato dell' armonia*; II *Aristarchi Samii de mundi systemate, partibus et motibus ejusdem, libellus cum notis*, Parigi, 1644, in-12, ristampato più correttamente nel tomo terzo delle *Cogitationes physicae metaphys.* del p. Mersenne. In tale libro, che parecchi biografi e Voltaire stesso ingannato dal titolo e dalla prefazione di Roberval hanno attribuito al filosofo di Samo, l'autore ammette un' attrazione reciproca di tutte le parti della materia, idea cui avea preso da Kepplero. Baillet, che con ragione si dolse dei travestimenti degli autori, avrebbe voluto che Roberval imitato avesse Viète, il quale pubblicato aveva l'*Apollonio Francese*, come Snellio aveva pubblicato l'*Eratostene Batavo*. Vedasi su tal proposito una nota molto particolarizzata nell' *Aristarco di Samo*, greco-latino, pubblicato da de Fortia-d'Urban, pag. 233: III *Nouvelle manière de balance inventée par M. de Roberval* (*Journal des Savans*, 1670, pag. 9). Tale macchina, composta di parecchie righe unite insieme come quelle di un pantografo, ha l'apparenza di un paradosso, e potrebbe figurare in una raccolta di ricreazioni matematiche, ma non presenta niuna applicazione utile. Si può consultare su tale geometra francese il suo *Elogio* scritto da Condorcet, la *Storia del collegio reale* di Goujet, e il tomo II della *Storia delle matematiche* di Montuela.

ROBINS (Beniamino), membro della Società Reale di Londra, e uno degl' ingegneri più distinti dell' Inghilterra, nacque a Bath nel 1707 da genitori quaccheri. Il genio suo per le scienze fisiche e matematiche e per la letteratura gli fece trascurare lo studio della teologia, e l'allontanò dall' arringo al quale voleva destinarlo la sua famiglia: e siccome questa non era in grado di dargli un' esistenza indipendente, il giovine Robins dovette di buon' ora pensare a trarre un utile partito dalla sua istruzione. Il dottore Pemberton, al quale comunicò una delle sue memorie matematiche, concepì un' alta opinione dei talenti del suo autore, divenne suo protettore, lo indusse a fermare stanza a Londra e lo produsse nel mondo. Allora Robins si diede indefessamente allo studio delle opere dei più celebri matematici antichi e moderni; studio al quale aggiunse quello delle lingue moderne. I suoi progressi furono sì rapidi, che in età appena di venti anni diede una dimostrazione dell' ultima proposizione del *Trattato delle quadrature* di Newton, che fu giudicata degna di essere inserita nel volume delle *Transazioni filosofiche* del 1727; e, verso la fine del medesimo anno, la Società Reale lo ammise nel numero dei suoi membri. L'anno susseguente, osò misurarsi coll' illustre geometra Giovanni Bernoulli, in occasione della celebre questione delle *forze vive*. L'Accademia Reale delle Scienze di Parigi aveva proposto nel 1724 e 1725, come soggetto di premio, la dimostrazione delle leggi matematiche della comunicazione del moto: Giovanni Bernoulli concorse, e, non essendo stato il suo scritto coronato, fece, pubblicando la sua teoria, che era quella di Leibnitz, una specie di appello a tutti i dotti: Robins vi rispose con uno scritto cui diede in luce nel Maggio 1728, intitolato: *Stato presente della repubblica delle lettere*, contenente una confutazione della teoria *leibniziana* e *bernoulliana*: è però oggi riconosciuto che le dispute che su tale materia tennero tanto occupati i geometri sul principio del secolo decimottavo furono questioni di pure parole.

Frattanto la fama che Robins andava acquistando per le molte e variate sue cognizioni gli attirò un numero grande di scolari di matematiche. Fu allora che egli rivolse i suoi studj all' applicazione di queste scienze alla fisica, alla meccanica pratica e all' ingegneria. Pubblicò importanti osservazioni sulla prima parte della *Meccanica* di Eulero, sull' *Ottica* di Smith, e sopra altri argomenti di non minor rilievo: ma egli stabilì soprattutto la sua riputazione colle sue ricerche sull' *ar-*

tiglieria. Quantunque grandi fossero i passi fatti dalla balistica per le ingegnose invenzioni di Niccolò Tartaglia, e per le scoperte dell'immortale Galileo, molto ancora rimaneva a farsi; poichè la teoria galileiana, quanto era vera allorchè si trattava che i projetti si movessero nel vuoto, altrettanto si riscontrava inesatta nella pratica, quando la resistenza dell'aria si opponeva al moto dei projetti. Prendere in considerazione questa resistenza, calcolarne l'influenza sull'ampiezza della portata, sulla celerità, sull'elevazione verticale dei projetti, determinare con una lunga serie di delicatissime osservazioni i dati necessarj per dedurre alla pratica le proprietà dimostrate *a priori* e con ragionamenti puramente teorici, furono per Robins l'oggetto di studj profondi e di faticosi lavori, di cui espose il resultato nell'opera alla quale deve egli principalmente la sua celebrità, e che porta per titolo: *New Principles of Gunnery* (*Nuovi Principj d'artiglieria*), Londra, 1742. Dovette presto rispondere ad alcune obiezioni promosse contro la sua dottrina, ed inserite nel n° 465 delle *Transazioni filosofiche*; e le sue confutazioni fanno parte del n.° 469 della stessa raccolta. In seguito fece nuovi esperimenti confermanti i primi, innanzi ai membri della Società Reale di Londra, e queste gli conferì una medaglia d'oro. Ma l'elogio il più grande che farsi possa dell'opera di Robins è l'essere stata tradotta in tedesco e comentata dal sommo Eulero. Ne è stata pure fatta una traduzione in francese assai pregiata da Lombard, professore di artiglieria ad Auxonne, che l'arricchì del comento di Eulero e di parecchie note sue proprie, e la pubblicò nel 1783. In tutto ciò che si è proposto in appresso per misurare le celerità dei projetti alla loro uscita dalla bocca da fuoco, non si è fatto altro che modificare l'apparecchio fondamentale inventato da Robins, che è una semplice ma ingegnosissima applicazione del pendolo composto. Nel *Saggio sulla polvere* di Antoni, si legge però un altro mezzo non meno ingegnoso, immaginato dal piemontese Mattei, per misurare la stessa celerità, mezzo che è stato perfezionato in seguito dal colonnello d'artiglieria Grobert, e che ha formato soggetto di una interessante memoria di Prony letta all'Istituto di Francia e stampata a Parigi nel 1804.

Malgrado le occupazioni politiche alle quali per alcun tempo si diede, Robins non cessò mai di lavorare al progresso di quella parte della scienza che era stata l'oggetto particolare de' suoi studj. L'ammiraglio Anson, del quale avea scritto il *Viaggio intorno al mondo* col finto nome di Riccardo Walter, era divenuto suo protettore e suo amico, e gli somministrò i mezzi per far nuovi esperimenti sull'artiglieria. Robins si valse di questo forte appoggio per arricchire l'osservatorio di Greenwich di strumenti molto più grandi e più perfetti di quelli che prima vi si trovavano. Bradley fece di tali strumenti un uso assai utile ai progressi dell'astronomia. Eletto ingegnere della Compagnia delle Indie Orientali, Robins partì il 25 Dicembre 1749 per l'India, e vi morì il 29 Luglio 1751 nella giovane età di quarantaquattro anni, non avendo la sua complessione, naturalmente debole e delicata, potuto resistere al cambiamento del clima. Le sue opere tanto matematiche che filosofiche vennero raccolte con un ragguaglio della sua vita dal suo amico dott. Wilson, e pubblicate furono a Londra in due volumi, 1761. Sedici anni dopo, nel 1777, Ugo Brown pubblicò un'edizione dei *Nuovi principj d'artiglieria*, col comento di Eulero, tradotto dal tedesco in inglese e con note.

ROBISON (Giovanni), dotto matematico scozzese, nato nel 1739 a Boghall nella contea di Stirling, e morto il 30 Gennajo 1805, è autore d'un'opera assai stimata, intitolata: *Elementi di filosofia meccanica*. La migliore edizione è quella pubblicata da Brewster col seguente titolo: *A system of mechanical phylosophy, by John Robison, ec., with notes by David Brewster*, Londra, 1822, 4 vol. in-8. È una serie di articoli o trattatelli sulla meccanica razionale ed appli-

cata, sull' astronomia, sulla nautica, sulla fisica compresovi la teoria musicale del suono, ec. La lettura di tali trattati non esige cognizioni matematiche molto profonde ed è e un tempo gradevole ed istruttive.

ROCCHETTO (*Mec.*). Nome che vien dato alle piccole ruote dentate, le quali per mezzo di un ingranaggio trasmettono il moto da un pezzo ed un altro.

ROCHON (Alessio Maria di), astronomo e navigatore distinto, nato a Brest nel 1741, e morto il 5 Aprile 1817. Si ha di lui un numero grande di scritti sull' ottica, sulla fisica, sull' astronomia, e sulla nautica, scienze che il tennero costantemente occupato nell' intera sua vita, e nelle quali fece parecchie utili scoperte ed ingegnose osservazioni: ma l' invenzione del micrometro, fondato sulle proprietà della doppia refrazione che ha il cristallo di monte, gli assicura un grado distinto tra gli astronomi ottici che hanno ben meritato della scienza; mentre per un altro lato il grado di perfezione, che tale ingegnoso apparecchio applicato ai canocchiali ha dato alla misura degli angoli nell' astronomia o delle distanze sulla terra, è prova che nelle scienze nulla vi ha di speculativo, e che le proprietà le più curiose dei corpi hanno sempre o presto o tardi qualche utile applicazione. La nota completa degli scritti di questo dotto infaticabile si legge nella *Biografia universale*.

ROEHL (Lamberto Enrico), astronomo, nato a Ribbenitz nel Meklenburg, e morto il 25 Giugno 1790 a Greifswald, ove era professore di astronomia. Ha lasciato un numero grande di opere e di memorie molto stimate intorno all' astronomia ed alle matematiche: noi non citeremo che le principali: I *Osservazioni sul passaggio di Venere sul Sole*, Greifswald, 1768, in-8. L' autore vi espone i resultati delle osservazioni fatte in diversi luoghi del passaggio di Venere del 2 Giugno 1761, e ne deduce la distanza del sole, cui determina in 23984 diametri terrestri, facendo però astrazione delle osservazioni di Pingré, il quale, commesso avendo un errore di calcolo di un minuto, non si accorda con gli altri astronomi: osserva ancora come l' atmosfera di Venere deve sempre ingannare gli osservatori sul momento preciso in cui s' immerge o esce tale pianeta. Egli crede altresì che la luna abbia anch' essa un' atmosfera, ma meno densa di quella della terra, ed abbastanza sottile per farci scorgere in tutti i tempi le macchie di tale satellite; II *Introduzione alle scienze astronomiche*, Greifswald, 1768-79, 2 vol. in-8. Tale libro era considerato in Germania come la migliore opera elementare sull'astronomia, prima che comparsa fosse quella di Bode; III *Ristretto dell' arte del pilotaggio*, ivi, 1788, in-8.

ROEMER (Olao), celebre astronomo, nato a Copenaghen il 25 Settembre 1644, fu condotto in Francia da Picard nel 1672, nella circostanza del viaggio che questo dotto fece a Uraniburg. Roemer vi si trovava allora occupato a classare, sotto la direzione di Bartholin, i manoscritti lasciati da Ticone Brahé. Il giovine astronomo danese ricevè a Parigi la più lusinghiera accoglienza. Collocato presso il Delfino per insegnarli le matematiche, fu poco tempo dopo ammesso nell'Accademia delle Scienze. Nel 1675 espose, in una memoria all'Accademia, la teoria del moto progressivo della luce e la misura della sua velocità. Una serie di osservazioni sugli ecclissi dei satelliti di Giove lo aveva condotto a tale scoperta, che Cassini aveva intravednta e poscia abbandonata. Roemer indicò il primo il tempo che la luce impiega a giungere dal sole fino a noi, e tutti i suoi calcoli sono stati confermati da quelli di Bradley. Tale scoperta importante è oggi il titolo principale di Roemer alla celebrità, quantunque abbia numerose benemerenze verso la scienza. Lavorò molto alle livellazioni fatte per condurre le acque a Versailles; migliorò assai la teoria delle ruote dentate dando una forma più conveniente ai denti delle ruote e dei rocchetti; immaginò ancora diversi planetarj ingegnosissimi, tra i quali è da citarsi quello che faceva conoscere con

singolare esattezza gli ecclissi e le occultazioni dei satelliti di Giove. Richiamato nel 1681 a Copenaghen dal suo sovrano, che lo aveva fino dal 1676 eletto professore di matematiche nell'università di quella città, fu fatto tosto direttore della zecca. Si applicò egli allora a migliorare il sistema dei pesi della sua patria, perfezionò il lavoro delle miniere e la fabbricazione dei metalli, e si occupò dei progressi dell'artiglieria e della nautica. Promosso successivamente agl'impieghi più elevati della città nativa, non cessò mai di attendare all'astronomia. Il principale oggetto de' suoi lavori era la ricerca della parallasse delle stelle fisse, che doveva condurlo ad una dimostrazione positiva del moto della terra. Da 18 anni aveva raccolto numerose osservazioni su questo proposito, e si disponeva a pubblicarne il resultato, quando morì di mal di pietra il 19 Settembre 1710. La maggior parte de' suoi manoscritti andò distrutta nell'incendio dell'Osservatorio di Copenaghen avvenuto il 20 Ottobre 1728: si trovano però parecchie memorie e diverse osservazioni di tale illustre astronomo nella *Raccolta* dell'Accademia delle Scienze di Parigi, tom. VI e X. La *Raccolta delle macchine* approvate da quella dotta Società ne contiene alcune di sua invenzione, nel tomo I. Horrebow, suo discepolo e suo successore, ha pubblicato nell'opera intitolata: *Basis astronomiae*, 1735, in-4, la storia delle di lui scoperte, rivendicandone parecchie di cui altri si era fatto onore. Roemer deve considerarsi come il vero inventore dello *strumento dei passaggi*; immaginò pure un micrometro di un uso assai facile, e si adoprò molto, quantunque inutilmente, per fare ammettere negli stati del Nord la riforma gregoriana. Per altre notizie su questo astronomo si consulti la *Storia dell'astronomia* di Weidler, quella di Delambre, e il suo elogio scritto da Condorcet, che si legge nel tom. I, pag. 167-77 degli *Elogi degli accademici*.

ROMANO (*Mec.*). *Vedi* Bilancia.

ROMBO (*Geom.*). Quadrilatero i quattro lati del quale sono uguali, ma i di cui angoli sono ineguali. Più comunemente si chiama Losanga.

ROMBOIDE (*Geom.*). Ciò significa la stessa cosa che un Parallelogrammo.

RONDELLI (Gemigiano), matematico, nato a Roncoscaglia nel Modenese nel 1652, occupò successivamente nell'università di Bologna le cattedre di filosofia, di matematiche, di fortificazione e d'idraulica. La Santa Sede lo impiegò nelle famosa contesa che sul principio del passato secolo insorse sulle acque del Bolognese. Anco il duca di Modena gli affidò la direzione dei lavori necessarj per impedire lo straripamento del Po presso a Ferrara. Rondelli morì nel 1735: di lui si hanno i seguenti scritti: I *Aquarum fluentium mensura, nova methodo inquisita*, Bologna, 1691, in-4; II *Planorum et solidorum Euclidis elementa, facilioribus demonstrationibus explicata*, ivi, 1693, in-4; III *Urania, custode del tempo*, ivi, 1700, in-8: si tratta in questo opuscolo la questione se il 1700 fosse il primo anno del secolo XVIII o l'ultimo del XVII; IV *Universale trigonometria lineare o logaritmica*, ivi, 1705, in-4; V *Sex priora Euclidis elementa, quibus accesserunt undecimum et duodecimum*, ivi, 1691, in-4. Per altre notizie su questo dotto si consulti il suo articolo biografico nella *Biografia universale*.

ROSA DEI VENTI (*Naut.*). *Vedi* Bussola.

ROTAZIONE. (*Mec.*). Moto di un corpo intorno di una linea retta che prende il nome di *asse di rotazione*.

In *geometria*, questa parola significa la rivoluzione di una superficie intorno di una retta immobile, e si concepisce questa rivoluzione come se essa generasse un *solido*. (*Vedi* Generare).

Rotazione dei pianeti. Moto mediante il quale il sole e i pianeti girano sul loro asse da occidente in oriente. (*Vedi* Sole e i diversi nomi dei pianeti).

ROTEGGIO. Macchina composta di più ruote destinate a produrre un effetto qualunque mediante la loro combinazione.

ROTOLAMENTO (*Mec.*). Si chiama *attrito di rotolamento* ovvero attrito della *seconda specie* quello che ha luogo quando un corpo rotondo rotola sopra una superficie. La resistenza dovuta a quest' attrito è generalmente tanto piccola per i corpi duri e politi, che non se ne tiene conto nei calcoli relativi alle macchine, e che si considerano giustamente come assai vantaggiosi per trasformare lo strisciamento in rotolamento tutte le volte che ciò è possibile. Ed è così, per esempio, che, per trasportare dei blocchi di pietra, si pongono sopra dei cilindri che camminano essi stessi sopra dei tavolati stabiliti alla superficie del terreno. Quando la superficie sulla quale un corpo cilindrico rotola è perfettamente piana e unita, la resistenza dell' attrito è tanto minore quanto il diametro del cilindro mobile è più piccolo. (*Vedi* ATTRITO).

RUFFINI (PAOLO), celebre matematico e medico italiano, nato nel 1765 a Valentano nel ducato di Castro, studiò prima a Reggio e quindi a Modena, ove si addottorò in medicina. Nelle ore di ozio si applicò con particolare predilezione alle scienze esatte; e tali furono i progressi che vi fece, che fu giudicato degno di succedere al professore Cassiani nella cattedra di analisi nell' università di Modena. Ricusato avendo all' epoca della invasione dei Francesi di prestare il giuramento civico che allora si esigeva da ogni cittadino, perdè questo impiego che non gli fu restituito che nel 1799 allorchè l' Italia tornò in potere degli Austriaci, e che conservò fino 1806, epoca nella quale passò alla cattedra di matematiche applicate nel collegio militare di Modena. In seguito fu fatto presidente della Società Italiana dei quaranta, direttore dell' università di Modena e professore di clinica medica e di medicina pratica. Questo dotto, che apparteneva ad un numero grande di società scientifiche, morì il 10 Maggio 1822, pianto dagli amici, onorato dai colleghi, adorato dai discepoli. Le sue opere sono: I *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*, Bologna, 1798, 2 vol. in-8; II *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate, particolari, di un grado superiore al quarto*; memoria inserita nel tomo IX delle *Memorie della Società Italiana dei quaranta*; III *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo*; *Mem. cit.* tom. IX. IV *Dell' insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto*; *Mem. cit.* tom. X; V *Memoria sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*, Modena, 1804, in-4; VI *Risposta a' dubbj proposti dal socio Malfatti sopra l' insolubilità algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto*; *Mem. cit.* tom. XII; VII *Riflessioni intorno al metodo proposto da Malfatti per la soluzione delle equazioni di quinto grado*; *Mem. cit.* tom. XII; VIII *dell' immaterialità dell' anima*, Modena, 1806, in-8: l'autore vi dà una dimostrazione *matematica* dell'immortalità dell' anima. IX *Dell' insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto, qualunque sia il metodo che si adoperi, algebraico o trascendentale*; è questa una risposta a diverse obiezioni fatte contro gli scritti precedenti sullo stesso soggetto, e si legge nel tom. I part. II delle *Memorie* dell' Istituto nazionale italiano, 1806. X *Algebra e sua appendice*, Modena, 1807-8, 2 vol. in-8; XI *Alcune proprietà generali delle funzioni*; nelle *Memorie* della Società Italiana dei quaranta tom. XIII; XII *Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche con un' appendice*; *Mem. cit.* tom. XV; XIII *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*, Modena, 1813, in-4: l' autore prova in questo scritto con nuove dimostrazioni l' impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado; XIV *Intorno*

al metodo generale proposto dal sig. Wronski onde risolvere le equazioni di tutti i gradi; *Mem. cit.* tom. XVIII; XV *Due opuscoli sulla classificazione delle curve algebraiche a semplice curvatura*; *Mem. cit.* tom. XVIII; XVI *Riflessioni critiche sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del sig. Laplace*, Modena, 1821, in-8.

RUOTA (*Mec.*). Corpo rotondo e ordinariamente piatto, di legno, di metallo o altra materia, e mobile sopra un sostegno o asse.

La *ruota* è una macchina semplice di un grand' uso, la quale entra in un gran numero di macchine composte, come orologi, molini, ec. Si considerano due specie di *ruote*: le une che girano sempre nello stesso luogo sopra un asse che è fissato al loro centro, e i cui pernj girano in dei buchi che servono di appoggio, come le ruote degli orologi, dei molini, dei girarrosto, ec.; queste sorte di ruote ricevono il moto o lo trasmettono mediante certe parti salienti che si aggiungono alla loro circonferenza e che si chiamano *denti*, *caviglie*, *cateratte*, ec. Le ruote della seconda specie, rotolando sopra la loro circonferenza, portano il loro centro e l'asse o la sala che le traverse in una direzione parallela al piano o al terreno che esse percorrono: come le *ruote* delle vetture. Queste specie di *ruote* hanno dunque due moti, l'uno del loro centro che si avanza in linea retta, e l'altro di tutte le loro parti le quali girano intorno di questo centro.

Le *ruote* possono generalmente considerarsi come riunioni di leve, e la loro teoria si deduce facilmente da quella di questa macchina. Così le ruote della prima specie agiscono come leve del primo genere e servono ad uguagliare l'azione delle potenze differentissime le une dall' altre; a trasmettere il moto; a cangiare la direzione, e a far variare la velocità nella potenza e nella resistenza, nel mentre che le ruote della seconda specie agiscono generalmente come leve del secondo genere. La teoria delle ruote essendo legata a quella del *Verricello*, rimanderemo a quest' ultima parola.

Ruota Idraulica. Macchina mossa dalla percussione di un' acqua corrente, e destinata a trasmettere il moto ad altre macchine qualunque.

Una *ruota idraulica* è una ruota della prima specie la cui circonferenza è guarnita di palette che si chiamano *ali*, o di cavità che si chiamano *canali*. Quest' ali o questi canali essendo colpiti dall' acqua fanno girare la ruota come pure il suo asse, il quale, con l'aiuto di un ingranaggio, trasmette il moto alle macchine che si vuole mettere in azione.

La teoria delle ruote idrauliche essendo di un' alta importanza per gli stabilimenti industriali, i quali si servono di questi motori, esporremo in questo punto i suoi principii fondamentali.

1. *Ruote verticali* situate in una corrente di una larghezza e di una profondità indefinita.

In una ruota verticale, situata in una corrente di una larghezza e di una profondità indefinite, l' area dell' ali esposte all' urto della corrente può variare a piacere del costruttore. Più quest' area sarà grande, più la quantità d'azione trasmessa mediante la ruota potrà essere considerabile. L'area dell' ali essendo data, possiamo stabilire diversi rapporti tra la loro velocità e quelle della corrente. Le questioni che possono essere proposte nello stabilimento di un motore di questo genere sono: 1.° conoscere la frazione della velocità della corrente, di quella dell' ali e delle loro dimensioni, la quantità d' azione che può essere trasmessa dalla ruota; 2.° determinare la velocità della ruota in modo da rendere queste quantità d' azione le più grande possibile.

Chiamando

Ω l' area della parte dell' ala immersa nell' acqua quando quest' ala è verticale,

V la velocità circolare del centro di quest' area,

v la velocità della corrente,

P lo sforzo esercitato dalla corrente, tangenzialmente alla circonferenza che passa pel centro dell' area Ω,

Π il peso dell' unità di volume del fluido,

$h = \frac{(v-V)^2}{2g}$ l' altezza dovuta alla velocità relativa dell' ala e della corrente,

K un coefficiente numerico, da determinare mediante l' osservazione.

Osservando che l' azione della corrente sul segmento della ruota immersa nell' acqua è simile a quella avrebbe luogo sopra un corpo della stessa figura di questo segmento, il quale fosse mosso nel senso della corrente con la velocità V, si deve avere

$$P = K \Pi \Omega \frac{(v-V)^2}{2g} = K \Pi \Omega h.$$

Il coefficiente K può variare secondo il numero dell' ali che porta la ruota, la loro figura e la loro disposizione, la loro altezza paragonata a quella del raggio, ec. Si deduce da ciò per l' espressione della quantità d' azione trasmessa nell' unità di tempo

$$PV = K \Pi \Omega \frac{(v-V)^2 V}{2g}.$$

Facendo variare V, e supponendo che questa variazione lasci K costante, il valore di PV diventerà un maximum quando avremo

$$V = \frac{1}{3} v,$$

donde

$$PV = \frac{4}{27} . K \Pi \Omega \frac{v^3}{2g},$$

e

$$P = \frac{4}{9} K \Pi \Omega \frac{v^2}{2g}.$$

2. Sembra che il numero K rimanga sensibilmente costante quando v e V variano, allorquando le ali s' immergono interamente nell' acqua. Quando esse non s' immergono che in parte, K aumenta probabilmente un poco; quando V diminuisce rapporto a v, il valore di V corrispondente al maximum di effetto sarebbe allora un poco più piccolo di $\frac{1}{3} v$.

I tentativi fatti per valutare K, stimando le azioni esercitate sopre le ali mediante i principii delle antiche teorie della resistenza dei fluidi, non possono con-

durre che a resultamenti interamente illusori ed erronei. Il valore del coefficiente K non può determinarsi che mediante osservazioni fatte sopra delle ruote, e non sembra necessario che questo genere di osservazioni sia fatto molto in grande. L'esperienze conosciute non danno sopra questo soggetto resultamenti sufficientemente esatti ed assicurati. Per le ruote ad ali, come si costruiscono comunemente, il valore di K sembra essere compreso tra 2, 5 e 3.

Questo valore può essere aumentato mediante una disposizione più vantaggiosa della ruota. Non bisogna che la ruota s' immerga nell' acqua più di $\frac{1}{3}$ o piuttosto di $\frac{1}{4}$ del suo raggio. Le ali debbono avere almeno $0^m,33$ di altezza. Esse debbono essere spaziate di una quantità al più uguale alla loro altezza. Esse debbono essere inclinate in avanti, e formare col raggio un angolo uguale ad $\frac{1}{3}$ dell' angolo retto quando la ruota s' immerge di $\frac{1}{4}$ ovvero di $\frac{1}{5}$ del suo raggio, e un angolo metà minore se la ruota s' immerge di $\frac{1}{3}$ del raggio. Si deve trovare del vantaggio a dar loro una leggera concavità dal lato dove l'acqua gli colpisce.

3. *Ruote verticali* destinate a trasmettere l'azione di una corrente o di una caduta di acqua di una capacità data.

Per quanto variata sia la disposizione di queste ruote, l' azione dell' acqua sopra esse offre generalmente le seguenti circostanze. Avanti di colpire le ali o i canali fissi alla circonferenza della ruota, l' acqua ha percorso una parte dell' altezza della sua caduta ed acquistato una velocità. Questa velocità è più grande di quella della circonferenza della ruota. Dopo avere colpito le ali, l' acqua ha preso la loro velocità con la quale essa percorre il resto della sua caduta, e che essa possiede ancora all' istante in cui, essendo giunta al basso della caduta, essa cessa di agire sopra la ruota. Chiamando

H l' altezza totale della caduta,

h la porzione della caduta percorsa dall' acqua, avanti che essa ne colpisca le ali o i canali,

m la massa dell'acqua somministrata dalla caduta nell' unità di tempo,

E il volume di quest' acqua,

Π il peso dell' unità di volume del fluido,

Ω l' area media della sezione trasversale della vena d' acqua che agisce alla circonferenza della ruota,

V la velocità uniforme della circonferenza della ruota che passa per l' asse di questa vena, si ha

$$mg = \Pi E = \Pi \Omega V.$$

P lo sforzo che si esercita, in conseguenza dell' azione dell' acqua, nel senso di questa circonferenza,

S la lunghezza dell' asse della circonferenza suddetta, compresa tra il punto dove l'acqua colpisce le ali e il punto più basso dove essa abbandona la ruota,

s la distanza verticale di questi due punti,

p il peso del volume d'acqua che la porzione suddetta della circonferenza della ruota sposta, immergendosi nell' acqua contenuta nel serbatojo.

Supponendo il moto della ruota uniforme, osservando che nell' istante in cui l'acqua colpisce le ali o canali essa perde istantaneamente la velocità $\sqrt{2gh}-V$; che nell' istante in cui abbandona la ruota essa possiede la velocità V; si ha

Forza viva acquistata dal sistema nell' unità di tempo . . . . mV^2.

Forza viva perduta dall' effetto dell' urto . . . . $m\left(\sqrt{2gh}-V\right)^2$.

Quantità d' azione impressa nell' istesso tempo . . . . $mgH-PV$.

Uguagliando la somma delle forze viva acquistate e perdute al doppio delle quantità d'azione impresse, viene, per l'espressione della quantità d'azione trasmessa nell' unità di tempo

$$PV=mg\left(H-h\right)+m\left(\sqrt{2gh}-V\right)V.$$

Possiamo disporre delle quantità h e V, e si deve farlo in modo da rendere PV il più grande possibile. Si comincerà dal soddisfare a questa condizione, facendo

$$V=\frac{1}{2}\sqrt{2gh},\quad \text{donde}\quad PV=mg\left(H-\frac{1}{2}h\right).$$

Bisognerà quindi supporre

$$h=0,\quad \text{donde}\quad V=0,\quad \text{e}\quad PV=mg\,.\,H.$$

Donde resulta 1.° che il maximum d' effetto ha luogo quando la velocità dell'ali o canali è la metà di quella dell'acqua che gli colpisce; 2.° che questo maximum è tanto più grande quanto questa velocità è più piccola; 3.° che il limite teorico è la quantità d'azione rappresentata dalla caduta dell'acqua.

Stabilita questa teoria, esaminiamo successivamente le principali disposizioni conosciute per le ruote verticali.

4. *Ruota al di sotto.* Ciò che caratterizza questo genere di ruote è che l' acqua colpisce le ali dopo aver percorso tutta l' altezza della caduta, e con la velocità dovuta a quest' altezza (*Tav.* LI, *fig.* 8), si ha allora $h=H$, e

$$PV=m\left(\sqrt{2gH}-V\right)V.$$

Il più grand' effetto ha luogo quando

$$V=\frac{1}{2}\sqrt{2gH},\quad \text{donde}\quad PV=\frac{1}{2}mg\,.\,H.$$

Così, la velocità dell' ali dev' essere la metà di quella dell' acqua che le colpisce, e il limite teorico della quantità d' azione trasmessa è la metà di quella rappresentata dalla caduta dell' acqua.

Le osservazioni e l'esperienze fatte sopra questo genere di ruote ci ha insegnato 1.° che la velocità dell'ali dev'essere solamente i $\frac{2}{3}$ di quella dell'acqua che le colpisce, 2.° che la quantità d'azione trasmessa alla ruota era solamente il $\frac{1}{3}$ di quella rappresentata dalla caduta. Si ha dunque nella pratica:

generalmente

$$PV = \frac{2}{3} m\left(\sqrt{2gH} - V\right)V,$$

$$PV = \frac{2}{3} \frac{\Pi E}{g}\left(\sqrt{2gH} - V\right)V,$$

$$PV = \frac{2}{3} \frac{\Pi \Omega}{g}\left(\sqrt{2gH} - V\right)V^2,$$

nel caso del maximum d'effetto,

$$PV = \frac{2}{3} \sqrt{2gH}$$

$$PV = \frac{1}{3} mg \,.\, H, \quad P = \frac{1}{3} \frac{\Pi E}{g} \sqrt{2gH},$$

$$PV = \frac{1}{3} \Pi E \,.\, H, \quad P = \frac{1}{3} \frac{\Pi E}{g} \sqrt{2gH}$$

$$PV = \frac{1}{6} \Pi \Omega H \sqrt{2gH}, \quad P = \frac{1}{3} \Pi \Omega H$$

Ω ha in questo punto la stessa significazione che al n.° 1.

D'altra parte queste formule non rappresenteranno l'effetto ottenuto se non che tanto quanto le disposizioni ammesse saranno eseguite. Le principali condizioni da adempire sono 1.° che la velocità della vena d'acqua, quando essa viene a colpire le ali, sia veramente quella dovuta alla caduta (ci giungeremo rendendo libero l'ingresso dell'orifizio e frapponendo poca distanza fra quest' orifizio e le ali); 2.° Che le ali siano contenute in un serbatojo che esse riempiono esattamente, ed abbiano un'altezza sufficiente perchè la vena d'acqua non passi per di sopra. Troveremo del vantaggio a disporle conformemente a quanto è stato detto al n.° 2.

5. *Ruote da parte*. Queste son quelle in cui l'orifizio che dà l'acqua è situato ad un'altezza intermedia tra l'alto e il basso della ruota. Il loro stabilimento dev'essere sottoposto ai resultamenti del n.° 2.

La loro velocità dovrebbe essere la minima possibile, ma l'esperienza insegna che la velocità della circonferenza di una ruota idraulica, perchè questa ruota cammini regolarmente, dev'essere almeno di circa un metro per secondo. Bisogna regolare le dimensioni dell'orifizio e il carico sul suo centro, in modo che la velocità dell'acqua, quando essa colpisce le ali, sia doppia della velocità di queste ali.

Le ruote di cui si tratta (*Tav.* LI, *fig.* 7) possono essere disposte in due differenti modi: 1.° L'acqua può essere ricevuta in canali portati dalla

ruota; 2.ª essa può agire sopra ali che si muovono in un canale o serbatojo concentrico alla ruota, che quest' ali riempiono esattamente. Nel primo caso, il peso dell' acqua che agisce sopra la ruota è interamente sostenuto da essa, ne aggrava la macchina e aumenta l' attrito. Nella seconda disposizione, che sembra preferibile (soprattutto quando l' altezza della caduta è piccola), la più gran parte del peso di quest' acqua è portata dalla parete del serbatojo. Ma succede allora che una porzione della circonferenza della ruota immergendosi nell' acqua, ei perde un peso uguale a quello del volume d' acqua che essa sposta, la cui azione diminuisce quella che la corrente esercita sopra la ruota.

6. *Ruote al di sopra.* S' indicano così le ruote che ricevono l' acqua sul suo vertice (*Tav.* LII, *fig.* 7). Esse la ricevono ordinariamente nei canali, alcune volte tra le ali muovendosi in un serbatojo concentrico, come l' abbiamo detto. L' uso dei canali sembra convenire nel caso in cui vi sia una piccolissima quantità d' acqua, e una grande altezza; e l' altra disposizione nel caso contrario. Lo stabilimento della ruota è d' altra parte soggetto alle stesse considerazioni teoriche rammentate nel precedente numero. Le osservazioni e l' esperienze indicano che la quantità d' azione trasmessa alla ruota è i $\frac{4}{5}$ del valore dato dalla teoria.

Il calcolo delle ruote da parte e delle ruote al di sopra, quando l' acqua è ricevuta in canali, si farà per mezzo delle seguenti formule:

Nel caso generale,

$$PV = \frac{4}{5}\left[mg\left(H-h\right)+m\left(\sqrt{2gh}-V\right)V\right],$$

$$PV = \frac{4}{5}\left[\Pi\, E\left(H-h\right)+\frac{\Pi\, E}{g}\left(\sqrt{2gh}-V\right)V\right]$$

Nel caso del maximum d' effetto,

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{2gh},\quad h = \frac{2V^2}{g}.$$

$$PV = \frac{4}{5}\left(mgH-mV^2\right).$$

$$PV = \frac{4}{5}\,\Pi\, E\left(H-\frac{V^2}{g}\right)$$

Quando la ruota è contenuta in un serbatojo, avremo, pel caso generale,

$$PV = mg\left(H-h\right)+m\left(\sqrt{2gh}-V\right)V-p\,\frac{z}{s}\,V,$$

$$PV = \Pi\, E\left(H-h\right)+\frac{\Pi\, E}{g}\left(\sqrt{2gh}-V\right)-p\,\frac{z}{s}\,V;$$

nel caso del maximum d' effetto,

$$V = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2gh},\quad h = \frac{2V^2}{g}.$$

$$PV = mgH - mV^2 - p\frac{z}{s}V.$$

$$PV = \Pi E\left(H - \frac{V^2}{g}\right) - p\frac{z}{s}V.$$

Per aver riguardo alle perdite d' acqua che hanno luogo intorno dell' ali, bisognerà supporre uno sgorgo d'acqua un poco più grande del valore di E introdotto nella formule.

I canali debbono avere una figura particolare, che gli rende propri ad ammettere l'acqua facilmente, e a conservarla per molto tempo (*Vedi* le note del tomo primo dell' *Architettura idraulica* del Belidor, pag. 415). Quando la ruota si muove in un serbatojo, le ali debbono riempirle esattamente, essere un poco inclinate in avanti sul raggio, salire al di là delle porzioni di circolo della ruota (affinchè quest' ultime non s' immergano punto nell' acqua) al di là di un tamburo. Si diminuisce l' effetto delle perdite d' acqua lasciando prendere alla ruota una velocità più grande.

7. *Delle ruote orizzontali destinate a trasmettere l' azione di una caduta d' acqua di una capacità data.*

Le disposizioni delle ruote orizzontali sono più variate di quelle delle ruote verticali. La loro teoria non è capace come quella di quest' ultime di essere contenuta in una sola formula generale.

Ruote orizzontali mosse dall'urto dell' acqua. Consideriamo una ruota orizzontale (*Tav.* LII, *fig.* 6) la cui circonferenza è guarnita di palette inclinate fatte in forma di spatole vuote, le quali ricevono l' urto da una vena d'acqua zampillante fuori di un tubo o di un cilindro, supponiamo il moto della ruota uniforme, e si chiami,

H l' altezza AC della caduta,

V la velocità orizzontale circolare del punto C della paletta incontrata nell' asse dalla vena d' acqua,

λ l' angolo DCM inclinazione della paletta sopra l' orizzonte,

θ l' angolo dell' asse della vena d' acqua con la normale alla superficie della paletta in C,

P lo sforzo esercitato tangenzialmente alla circonferenza che passa pel punto C, in conseguenza dell' azione della corrente.

m, E, Π, g, hanno le stesse significazioni di sopra.

Si ha: velocità della paletta valutata perpendicolarmente alla sua superficie

$$V \operatorname{sen} \lambda.$$

Velocità perduta dall' acqua, per l' effetto dell' urto,

$$\sqrt{2gH} \, . \cos\theta - V \operatorname{sen}\lambda.$$

Velocità conservata dall' acqua, dopo l' urto, e quando essa cessa di agire sopra la ruota,

$$\sqrt{\left[2gH \, . \operatorname{sen}^2\theta + V^2 \operatorname{sen}^2\lambda\right]}.$$

Donde la forza viva acquistata dal sistema nell' unità di tempo,

$$m\left(2gH \, . \, \text{sen}^2\theta + V^2 \text{sen}^2\lambda\right).$$

Forza viva perduta dall' effetto dell' urto,

$$m\left(\sqrt{2gH} \, . \cos\theta - V \,\text{sen}\,\lambda\right)^2.$$

Le quantità d' azione impresse, sono

$$mg \, . \, H - PV.$$

Uguagliando la somma delle forze vive acquistate e perdute al doppio della quantità d' azione impresse, viene

$$PV = m\left(\sqrt{2gH} \, . \cos\theta - V \,\text{sen}\,\lambda\right) V \,\text{sen}\,\lambda,$$

per l' equazione del moto della ruota,

La ruota dev' esser disposta in modo da rendere quest' espressione di PV un maximum. Si comincia da vedere che si deve avere

$$\theta = 0,$$

vale a dire, che la vena d' acqua deve urtare perpendicolarmente le palette; donde

$$PV = m\left(\sqrt{2gH} - V \,\text{sen}\,\lambda\right) V \,\text{sen}\,\lambda.$$

Inseguito dovremo fare

$$V = \frac{\sqrt{2gH}}{2 \,\text{sen}\,\lambda},$$

donde

$$PV = \frac{1}{2} mgH,$$

ovvero

$$PV = \frac{1}{2} \Pi E \, . \, H.$$

Il moto della ruota dev' essere regolato in modo che la velocità abbia il valore di sopra. La quantità d'azione trasmessa è allora teoricamente la metà di quella che rappresenta la caduta. Si vede che, la velocità dell' acqua rimanendo la stessa, possiamo far variare la velocità della ruota senza cessare di ottenere il maximum d' effetto, variando l' inclinazione delle palette.

Non abbiamo sopra le ruote di questa specie esperienze speciali che facciano conoscere con certezza la quantità d' azione che esse trasmettono. Possiamo presumere che essa sia circa la stessa che per le ruote verticali considerate al n.° 4, e che vi sarebbe ancora del vantaggio a dare alla ruota una velocità un poco al di sotto di quella che la teoria indica; lo stabilimento della ruota si farebbe ancora mediante formule analoghe a quelle del numero citato.

8. *Ruote orizzontali mosse dall' urto e dalla pressione dell' acqua.* Si suppone una ruota la cui circonferenza è guarnita di palette curve. La vena d' acqua

BC (*Tav.* LI, *fig.* 8), che giunge seguendo una direzione inclinata, urta perpendicolarmente l'alto di queste palette, cola tra esse, e esce dalla ruota alla alla loro estremità inferiore D. La vena d'acqua si suppone, che nel tempo del suo moto nella ruota, rimanga alla stessa distanza dall'asse. Chiamando

H l'altezza totale della caduta,

h la porzione AC della caduta percorsa dall'acqua avanti che essa entri orizzontalmente, si ha allora

$$PV = m\left[\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh} + \sqrt{2g(H-h)} - \frac{1}{2}V\left(1+\text{sen}^2\theta\right)\right]V.$$

Inseguito, si dovrà fare

$$V = \frac{\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh} + \sqrt{2g(H-h)^2}}{1+\text{sen}^2\theta};$$

il che darà

$$PV = \frac{m\left[\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh} + \sqrt{2g(H-h)}\right]^2}{2(1+\text{sen}^2\theta)};$$

facendo variare h, avramo, pel valore che corrisponda al maximum,

$$h = \frac{H}{\text{sen}^2\theta + 1},$$

donde

$$PV = m\left(\frac{\text{sen}\,\theta\sqrt{2gH}}{1+\text{sen}^2\theta}\right)^2.$$

Finalmente, facendo variare θ, avremo pel valore che corrisponde al maximum

$$\text{sen}\,\theta = 1,$$

valore che conduce ai seguenti:

$$h = \frac{1}{2}H,$$

$$V = \sqrt{gH} = \sqrt{2gh},$$

$$PV = \frac{1}{2}mg \,.\, H.$$

Così, per ottenere il maximum d'effetto, 1.° la vena d'acqua, entrando nella ruota, dev'esser diretta orizzontalmente; 2.° L'altezza che essa ha allora percorsa dev'essere la metà dell'altezza della caduta; 3.° la velocità di rotazione del punto della ruota dove l'acqua entra, dev'essere uguale a quella dell'acqua, in modo che non vi sia verun urto. Il maximum d'effetto è teoricamente la metà della quantità d'azione che rappresenta la caduta. Questa ruota non offre dunque verun vantaggio sopra quella del numero precedente.

9. *Ruote orizzontali mosse solamente dalla potenza dell'acqua.* Conservando tutte le denominazioni del numero precedente, supporemo le ali talmente for-

mate che la vana d'acqua entrando nella ruota non la urti punto, ma s'introduca tra asse tangenzialmante alla loro curvatura. Supporramo sempre cha questa vana d'acqua rimanga nal tampo dal suo moto alla stessa distanza dall'asse dalla ruota. Siccome in questo caso non vi è varun urto, si tratta di conoscere solamente la forza viva nella ruota. Si chiami dunque

V la velocità circolare orizzontale della ruota, nal punto dove l'acqua antra nella ruota,

θ l'angolo ACB che forma la dirazione dalla vena d'acqua con la verticale,

φ l'angolo aha la tangenta DE, al punto più basso della paletta, forma con la verticale,

P lo sfozo asarcitato, iu consaguenza dell' azione della corrante, tangenzialmente alla circonferenza che passa pel punto dove l'acqua entra nella ruota,

m, E, Π, g hanno le stesse significazioni di sopra.

Le velocità che perde l'acqua, par l'affetto dall'urto, al suo ingresso nalla ruota, è, come sopra

$$\sqrt{2gh}-V \operatorname{sen}\theta.$$

Dopo quast'urto, non vi è più varuna velocità relativa nalla ruota; ma parcorrendo l'altezza $H-h$, essa acquista la velocità relativa $\sqrt{2g(H-h)}$. Quest' ultima si decompone in una velocità verticale =

$$\cos\varphi\sqrt{2g(H-h)},$$

a una velocità orizzontale =

$$\operatorname{sen}\varphi\sqrt{2g(H-h)}.$$

Quando l'acqua lascia la ruota, la sua valocità verticale non si altara punto, ma la sua valocità orizzontala effattiva si trova più piccola dalla velocità orizzontala relativa dalla quantità V. La valocità effettiva dall'acqua è dunque allora

$$\sqrt{\left[\cos^2\varphi \,.\, 2g(H-h)+\left(\operatorname{sen}\varphi\sqrt{2g(H-h)}-V\right)^2\right]},$$

donda si conclude: forza viva acquistata dal sistema nell' unità di tampo,

$$m\left[\cos^2\varphi \,.\, 2g(H-h)+\left(\operatorname{sen}\varphi\sqrt{2g(H-h)}-V\right)^2\right],$$

forza viva parduta dall'affetto dell'urto

$$m\left(\sqrt{2gh}-V \operatorname{sen}\theta\right)^2.$$

La somma delle quantità d'azione impresse è

$$mg\,.\,\mathrm{H}-\mathrm{PV},$$

l'equazione del moto della ruota è dunque

$$\mathrm{PV}=\frac{1}{2}\,m\left\{2\mathrm{V}\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{2gh}-\mathrm{V}^2\left(1+\mathrm{sen}^2\theta\right)\right.$$

$$\left.+2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\mathrm{V}\sqrt{2g(\mathrm{H}-h)}\right\},$$

quantità che bisognerà rendere la più grande possibile, regolando i valori di φ, θ, V ed h. Si vede subito che si deve fare $\mathrm{sen}\,\varphi=1$.

Conservando tutte le precedenti denominazioni, si chiami di più

v la velocità angolare della ruota,

r la distanza all'asse da un punto qualunque della ruota,

r' la distanza all'asse dal punto dove l'acqua entra nella ruota,

r'' la distanza all'asse dal punto dove l'acqua esce dalla ruota.

Si vedrà come sopra che la velocità relativa con la quale l'acqua comincia a colare lungo dell'ala, è

$$\sqrt{\left[\cos^2\theta\,.\,2gh+\left(\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{2gh}-vr'\right)^2\right]},$$

la forza viva che l'acqua possiede in quest'istante (non considerando che il suo moto relativo nella ruota), è

$$m\left[\cos^2\theta\,.\,2gh+\left(\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{2gh}-vr'\right)^2\right].$$

Nel tempo che l'acqua è contenuta nella ruota, la sua forza viva deve aumentare di una quantità uguale al doppio delle quantità d'azioni che gli sono impresse dalla gravità e dalla forza centrifuga. La quantità d'azione impressa dalla gravità è $mg(\mathrm{H}-h)$. Quella impressa dalla forza centrifuga è

$$\int_{r'}^{r''} mv^2 d\,.\,r\,.\,r=\frac{1}{2}\,mv^2\left(r''^2-r'^2\right).$$

Per conseguenza la forza viva dell'acqua deve diventare

$$m\left[\cos^2\theta\,.\,2gh+\left(\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{2gh}-vr'\right)^2\right]+2mg\left(\mathrm{H}-h\right)$$

$$+mv^2\left(r''^2-r'^2\right),$$

ovvero

$$m\left(2g\mathrm{H}-2vr'\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+v^2r''^2\right).$$

La sua velocità effettiva, nell'istante in cui essa abbandona la ruota è dunque, supponendo la sua direzione orizzontale,

$$\sqrt{\left[2g\mathrm{H}-2vr'\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+v^2r''^2\right]}-vr''.$$

La forza viva che essa possiede allora è uguale ad m moltiplicata pel quadrato della velocità. Uguagliando questa forza viva a $2mgH-2P \cdot vr'$, si ha

$$P \cdot vr' = m \left\{ vr' \operatorname{sen}\theta \sqrt{2gh} - v^2 r''^2 \right.$$

$$\left. + vr'' \sqrt{\left[2gH - 2vr' \operatorname{sen}\theta \sqrt{2gh} + v^2 r'' \right]} \right\}.$$

Questo valore dalla quantità d' azione trasmessa alla ruota sarà il più grande possibile, ed uguale alla quantità d' azione $mg \cdot H$ somministrata dalla caduta dell' acqua, se la velocità effettiva dell' acqua, all' uscire dalla ruota, è nulla, ovvero se si ha

$$\sqrt{\left[2gH - 2vr' \operatorname{sen}\theta \sqrt{2gh} + v^2 r''^2 \right]} - vr'' = 0,$$

donde

$$vr' = \frac{gH}{\operatorname{sen}\theta \sqrt{2gh}};$$

questo valore di V è quello che rende nulla la velocità effettiva dell' acqua all' uscire dalla ruota.

Delle tre quantità V, θ, h, ve ne sono due arbitrarie. La terza essendo regolata conformemente al resultamento precedente, la più gran quantità d'azione possibile si troverà trasmessa alla ruota.

Il valore teorico di questa quantità d'azione è quello stesso rappresentato dalla caduta dell' acqua.

10. Le ruote dove l' acqua non urta punto le ali possono dunque, secondo la teoria, trasmettere una quantità d' azione doppia di quella che potrebbero trasmettere le ruote dove l' ala è urtata. Vi è luogo a presumere che il vantaggio sia almeno così considerabile nella pratica. Non sono state fino a questo punto pubblicate esperienze sufficientemente esatte sopra le ruote di questo genere. Perchè l' acqua entri nella ruota senza urtare le ali, esse debbono essere tracciate come segue. BC (*Tav.* LI, *fig.* 8) rappresentando la velocità effettiva $\sqrt{2gh}$ dell' acqua quando essa entra nella ruota in C, le componenti orizzontale e verticale di questa velocità sono AB, AC. Portando la velocità V in BF, CF rappresenterà la velocità relativa con la quale l' acqua comincerà a colare lungo dell' ala. Questa linea indica la direzione della curva dell' ala in C. La figura della curva tra il punto C e il punto inferiore D dove la sua direzione dev' essere orizzontale, è indifferente.

Si potrebbe ancora dispensarsi di mettere dell' ali nella ruota. Basterebbe che il fondo offrisse degl' orifizj dai quali l' acqua uscisse seguendo una direzione orizzontale, e in senso contrario del moto di rotazione.

11. Considerando sempre la ruota nell' ipotesi del n.° 4, dove l' acqua non urta punto le ali, esaminiamo ciò che avrebbe luogo se l' acqua, discendendo nella ruota, si avvicinasse o si allontanasse dall' asse di rotazione.

La velocità dell' acqua, quando essa entra nella ruota, è $\sqrt{2gh}$ equivalente alla velocità verticale $\cos\theta \sqrt{2gh}$ e alla velocità orizzontale $\operatorname{sen}\theta \sqrt{2gh}$.

L'acqua comincia dunque a colare lungo dell'ala con la velocità relativa

$$\sqrt{\left[\cos^2\theta\,.\,2gh+\text{sen}\left(\theta\sqrt{2gh}-V\right)^2\right]}.$$

L'acqua discendendo nella ruota della quantità $H-h$, la sua velocità relativa, quando essa giunge all'estremità inferiore dell'ala, è dovuta all'altezza

$$\frac{1}{2g}\left[\cos\theta\,.\,2gh+\left(\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}-V\right)^2\right]+H-h,$$

vale a dire che questa velocità è

$$\sqrt{\left[2gH-2V\,\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+V^2\right]}.$$

Essa equivale alla velocità verticale

$$\cos\varphi\sqrt{\left[2gH-2V\,\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+V^2\right]},$$

e alla velocità orizzontale,

$$\text{sen}\,\varphi\sqrt{\left[2gH-2V\,\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+V^2\right]}.$$

Quando l'acqua abbandona la ruota, la sua velocità orizzontale effettiva è più piccola della velocità relativa della quantità V, e per conseguenza la velocità affettiva dell'acqua è allora

$$\sqrt{\left\{\cos^2\varphi\left(2gH-2V\,\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+V^2\right)\right.}$$

$$\left.+\left(\text{sen}\,\varphi\sqrt{\left[2gH-2V\,\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+V^2\right]}-V\right)^2\right\}.$$

La forza viva posseduta dall'acqua è uguale ad m moltiplicata pel quadrato di questa velocità.

La somma della quantità d'azione impresse essendo

$$mg\,.\,H-PV,$$

si ha dunque per l'equazione del moto della ruota,

$$PV=mV\left\{\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}-V\right.$$

$$\left.+\text{sen}\,\varphi\sqrt{\left[2gH-2V\,\text{sen}\,\theta\sqrt{2gh}+V^2\right]}\right\}.$$

Bisogna determinare φ, θ, V ed H, in modo da rendere quest'espressione di PV un maximum. Si comincia dal vedere, come nel numero precedente, che si deve supporre

$$\text{sen}\,\varphi=1,$$

ovvero che l'acqua esca dalla ruota seguendo una direzione orizzontale.

Avremo in questo caso

$$PV = mV \left\{ \operatorname{sen} \theta \sqrt{2gh} - V \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left[2gH - 2V \operatorname{sen} \theta \sqrt{2gh} + V^2\right]} \right\};$$

e facendo variare V, si trova pel valore corrispondente al maximum,

$$V = \frac{gH}{\operatorname{sen} \theta \sqrt{2gh}},$$

donde

$$PV = mg \,.\, H,$$

valore identico a quello trovato per V nel n.° 9. Così, quando l'acqua muovendosi nella ruota si avvicina o si allontana dall'asse, questa circostanza non ha veruna influenza sopra le condizioni dello stabilimento della macchina. Bisogna sempre dare la stessa velocità di rotazione al punto della ruota dove l'acqua entra.

12. La teoria delle diverse specie di ruote orizzontali conosciute, o che potrebbero essere proposte, è compresa nei resultamenti dei numeri precedenti. Il numero 9 si riferisce alle ruote simili a quelle dei molini del Basacle, descritte dal Belidor. Il n.° 11 fa conoscere che le ruote costruite sopra lo stesso principio come la Danaide del signor Manoury Dectot (vale a dire dove l'acqua entra alla circonferenza della ruota e ne esce vicino all'asse), offrono le stesse proprietà e debbono essere stabilite con le stesse condizioni delle precedenti. Queste condizioni convengono ancora alle ruote dove l'acqua entra vicino all'asse ed esce alla circonferenza, disposizione che costituisce le ruote a reazione propriamente dette. In quest'ultime, la ruota ha spesso tutta l'altezza della caduta e l'acqua vi entra con una velocità sensibilmente nulla. Si ha allora $\sqrt{2gh} = o$, donde $v = \infty$: così il maximum d'effetto ha luogo quando la velocità della ruota è infinita.

13. Lo stesso resultamento può ottenersi mediante un altro processo, il quale si applica più direttamente alle ruote a reazione dove l'acqua entra per disotto; supponiamo una ruota che giri nell'aria ovvero immersa nell'acqua del serbatojo inferiore, nell'interno della quale l'acqua giunge pel centro, e alla circonferenza della quale sono degli orifizii, disposti in modo che l'acqua esce orizzontalmente, e in senso contrario del moto di rotazione. Ammettiamo che l'area di questi orifizj sia piccolissima rapporto alle sezioni del serbatojo superiore, che il loro ingresso sia allargato, e che l'acqua non provi nei condotti che la portano nella ruota verun cangiamento brusco di velocità. Si chiami:

H l'altezza della caduta o la differenza di livello dei serbatoj superiore e inferiore,

V la velocità angolare della ruota,

r la distanza all'asse da un punto qualunque della ruota,

R la distanza degli orifizj all'asse,

P lo sforzo esercitato, in conseguenza dell'azione della corrente,

tangenzialmente alla circonferenza che passa pel centro degli orifizj.

m E, Π, g avendo le stesse significazioni di sopra.

Se la ruota fosse immobile, la pressione contro gli orifizj essendo dovuta all' altezza H, l' acqua uscirebbe dagl' orifizj con la velocità $\sqrt{2gH}$. La ruota essendo in moto, la forza centrifuga cagiona, nel luogo dove gli orifizj sono praticati, una pressione eccedente rappresentata dall' azione di questa forza sopra una colonna orizzontale la cui lunghezza contata a partire dall' asse è R. Questa pressione è espressa da

$$\frac{\Pi}{g}\int_0^R v^2 r^2 . dr = \Pi . \frac{v^2 R^2}{2g} = \Pi \frac{V^2}{2g},$$

la quale è dovuta all' altezza $\frac{V^2}{2g}$. La pressione contro gli orifizj è dunque dovuta in totalità all' altezza

$$H + \frac{V^2}{2g},$$

e per conseguenza la velocità relativa con la quale l' acqua ne esce, è

$$\sqrt{2gH + V^2}.$$

L' acqua abbandona dunque la ruota con una velocità effettiva.

$$\sqrt{2gH + V^2} - V,$$

e una forza viva

$$m\left(\sqrt{2gH + V^2} - V\right)^2.$$

La quantità d' azione impressa è sempre

$$mg\,H - PV.$$

Così l' equazione del moto della ruota è

$$PV = m\left(\sqrt{2gH + V^2} - V\right)V,$$

come si troverebbe facendo $h = 0$ nell' espressione del n.° 9. Questa quantità sarà la più grande possibile, ed uguale alla quantità d' azione mg. H somministrata dalla caduta dell' acqua, quando la velocità dell' acqua all' uscita sarà nulla, o quando si avrà

$$\sqrt{\left[2gH + V^2\right]} - V = 0,$$

donde

$$V = \infty.$$

Vedi, per le particolarità, l' *Architecture hydraulique* del Prony, e le *Recherches experimentales* dello Smeaton, tradotto dal signor Girard M. Poncelet, al quale si debbono diverse esperienze idrauliche importantissime. Esso ha proposto una nuova ruota ad ali corte, i cui effetti sono superiori a quelli dell'altre ruote dello stesso genere. (*Vedi* la sua *Memoria sopra le ruote idrauliche*).

14. Ruota della vettura. Per molto tempo si è creduto ed è ancora un pregiudizio delle persone estranee alla meccanica, che le vetture a due ruote esigessero meno forza di traizione delle vetture a quattro ruote, d'altra parte, tutte le cose uguali sotto il rapporto del peso. Quest'errore, fondato sopra una falsa valutazione degli effetti dell'attrito, è stato indicato, è più di un secolo, dal Camus nel suo trattato delle *Forze motrici*, e per render più chiara la questione basta citare le sue parole. » Si deve, egli dice, considerare le vetture dal vantaggio che se ne deduce per rotolare, e per applicarvi la forza dei cavalli o bovi in un modo che gli affatichi meno e che sia il più vantaggioso: ora, applicando la forza dei cavalli alla carretta a due ruote, si sa comunemente che la stanga porta una parte del peso, in qualunque maniera che il carico sia in equilibrio sull' asse; poichè, scendendo un' altezza, tutto il peso cade sul cavallo; salendo, esso cade dall' altra parte in addietro e solleva il cavallo, il che gli toglie una gran parte della sua forza; se esso è caricato sul dorso, in modo che il peso non lo porti salendo, in un terreno unito esso sarà doppiamente affaticato dal portare e dal tirare; e siccome le ruote cadono nei vuoti, una da una parte e l'altra dall'altra, le stanghe della carretta danno nei fianchi del cavallo, donde segue che molto si perde. Di più, nella carretta, il peso non è che sopra due ruote, e quando una cade in un vuoto o in una rotaja, la metà del carico ci cade, e per tirarla dal vuoto bisogna rilevare la metà del carico: se esse si trovano in terre molli, le due ruote avvallano ugualmente, e bisogna rilevarle. Ma allorquando vi sono quattro ruote, come al carro, lo stesso carico essendo sopra le quattro, e il carro non essendo più pesante della carretta, è costante che le quattro avvalleranno metà meno delle due, o presso a poco, e che bisognerà meno forza; se si trovano dei vuoti, e che cada una ruota in uno, non vi caderà che il quarto del carico del carro, invece che ne cadrà la metà con la carretta, e bisogna meno forza per rilevarne un quarto che per rilevarne una metà. Se due ruote del carro cadono nello stesso tempo in un vuoto, non vi caderà che la metà del carico, e bisognerà meno forza per ritirarlo che non ne bisognerà per la carretta quando le due ruote saranno in simili vuoti; e in degli alti e bassi i quali si trovano sempre sul selciato, spesso si trova un equilibrio tra le ruote del davanti del carro e quelle di dietro, il che succede quando due ruote sono sopra due selciati pronte a scendere, nel mentre che le due altre sono pronte a salire sopra due altri selciati; quelle che sono in alto scendendo, fanno equilibrio e spingono col loro peso quelle che salgono; se non ve ne è che una davanti o dietro che scende, essa fa equilibrio a quella che sale, così del rimanente, il che non succede alla carretta; al contrario, il timone, riceve un colpo nel fianco. Non bisogna obiettare che vi è meno attrito sopra due ruote che sopra quattro, che è, secondo ogni apparenza, la ragione che ha fatto preferire la carretta al carro; poichè all' articolo *attrito* abbiamo fatto vedere che ve ne è tanto sopra due ruote quanto sopra quattro, lo stesso peso e lo stesso foro di mezzo stando all' uno come all' altro . . . . . »

Abbiamo già indicato le due specie di resistenze che il motore deve vincere per mettere in moto una ruota di vettura, cioè, la resistenza dell' asse e la resistenza alla circonferenza della ruota. La prima di queste resistenze, la principale, è superata, come l' abbiamo veduto, con tanta più facilità pel motore, quanto il diametro dell' asse è più piccolo rapporto al diametro

della ruota; la seconda, dipendente dalla natura del terreno sul quale la ruota si muove, diviene tanto più piccola quanto questo terreno è più unito e più resistente, e, d'altra parte tutte le cose uguali, esige dal motore uno sforzo tanto più grande quanto il diametro della ruota è più piccolo. Infatti, sia OR l'altezza di un ostacolo cha deve superare la ruota A (*Tav.* CLXXXV, *fig.* 4) per portarsi in avanti, ed $AQ = R$ il raggio di questa ruota. Si chiami P la forza di traizione che agisce nella direzione AP, e Q il carico totale che agisce secondo la verticale AQ. Nel caso dell'equilibrio, i momenti (*Vedi* QUESTA PAROLA) di queste due forze dovendo essere uguali, conduciamo le rette mR ed nR, ed avremo

$$P \times nR = Q \times mR.$$

Ma, facendo $OR = h$, abbiamo $nR = R - h$ e

$$mR = \sqrt{\left[R^2 - \left(R-h\right)^2\right]}.$$

Così

$$P\left(R-h\right) = Q\sqrt{R^2-(R-h)^2} = Q\sqrt{2Rh-h^2};$$

donde si deduce

$$P = Q\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}.$$

Nel caso in cui l'altezza h dell'ostacolo sia piccolissima rapporto al raggio della ruota, si ha sensibilmente

$$P = Q\,.\,\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{R}},$$

vale a dire che la forza necessaria per elevare una ruota al di sopra di un ostacolo è con pochissima differenza in ragione inversa della radice quadrata del raggio della ruota. Così una ruota di un metro di raggio non avrebbe bisogno, per superare un ostacolo, che della metà della forza che sarebbe necessaria perchè una ruota di 25 centimetri di raggio superasse lo stesso ostacolo, il carico e il diametro dell'asse essendo i medesimi.

È dunque evidente che le grandi ruote sono molto più vantaggiose che le piccole, e le sole condizioni che debbono limitare il loro diametro sono da una parte la loro gravità a la solidità dei raggi, e, dall'altra, la necessità, quando ci serviamo di cavalli, di non situare l'asse troppo alto (*vedi* CAVALLO), affinchè il tiramento si effettui nel modo il più conveniente.

15. RUOTA A MOLLA. Organo meccanico impiegato per cangiare il moto di tempo in tempo. Questa è una ruota libera montata sopra un albero che riceve un moto di rotazione per mezzo di una manovella. Un pezzo A (*Tav.* CCIII, *fig.* 2) capace di attaccarsi alla sommità b di una leva ab è fissato all'albero. La leva ab mobile intorno di un asse m faciente corpo con la ruota è ciò che si chiama il grillatto; la sua sommità b è mantenuta attaccata col pezzo A mediante una molla s. Quando l'albero è in moto nel senso BM, il pezzo A gira con esso, e quando esso incontra la sommità b, esso vi si attacca, trasporta la leva ab, e per conseguenza la ruota, che fa allora salire un peso qualunque con l'aiuto di una corda D avvoltolata intorno della sua gola. Dopo aver percorso un certo arco,

il grilletto *ab* incontra un ostacolo esterno E che lo forza a girare sul suo asse *m*; la sommità *b* abbandona il pezzo A, e la ruota, diventata di nuovo libera, prende un moto in senso inverso di quello dell' albero che essa aveva sollevato, e che allora nuovamente scende. In questo tempo l'albero continua il suo moto, e quando il pezzo A incontra di nuovo la sommità *b*, lo stesso giuoco ricomincia.

16. Ruota a Rocchetto. Questa è una ruota B tenota da un albero e armata di denti ricurvi (*Tav.* CCII, *fig.* 4) nei quali s'ingrana un mazzapicchio *ob* fissato ad una ruota libera e spinto da una molla *e*. Quando la ruota B gira da sinistra a destra, i denti scappano all'azione del mazzapicchio, e la ruota libera rimane in riposo; ma quando la ruota B gira da destra a sinistra, i suoi denti sono sostenuti nel mazzapicchio *ob*, ed essa trasporta la ruota libera. La ruota a rocchetto è impiegata nei moti di orologeria.

FINE DEL TOMO SETTIMO.

ERRORI.	CORREZIONI.
Pag. 103 Verso 35. (*Tav.* CCII, *fig.* 1).	(*Tav.* CCIV, *fig.* 1).
« 128 Verso 11. (*Tav.* CCII, *fig* 2).	(*Tav.* CCIV, *fig.* 2).





